ThS. LÊ HOÀNH PHÒ
*Nhà giáo ưu tú*

MỚI

# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN
# HÌNH HỌC 11

- Dành cho HS lớp 11 ôn tập & nâng cao kĩ năng làm bài.
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. LÊ HOÀNH PHÒ
*Nhà giáo ưu tú*

MỚI

# BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN
# HÌNH HỌC 11

- Dành cho HS lớp 11 ôn tập & nâng cao kĩ năng làm bài.
- Chuẩn bị cho các kì thi quốc gia do Bộ GD&ĐT tổ chức.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899
***

***Chịu trách nhiệm xuất bản:***

*Giám đốc* PHÙNG QUỐC BẢO
*Tổng biên tập* PHẠM THỊ TRÂM

*Biên tập nội dung*
BÍCH HẠNH
*Sửa bài*
ANH THƯ
*Chế bản*
CÔNG TI ANPHA
*Trình bày bìa*
SƠN KỲ
*Đối tác liên kết xuất bản*
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

**BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC 11**
Mã số: 1L-262ĐH2009
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ti TNHH In Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 895 - 2009/CXB/09 - 155/ĐHQGHN, ngày 28/9/2009
Quyết định xuất bản số: 262 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2009.

# LỜI NÓI ĐẦU

*Để giúp cho học sinh lớp 11 có thêm tài liệu tự bồi dưỡng, nâng cao và rèn luyện kĩ năng giải toán theo chương trình phân ban mới. Trung tâm sách giáo dục ANPHA xin trân trọng giới thiệu quý bạn đồng nghiệp và các em học sinh cuốn: "Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 11" này.*

*Cuốn sách này nằm trong bộ sách 6 cuốn gồm:*

*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 10.*

*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số 10.*

*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 11.*

*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Đại số - Giải tích 11.*

*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Hình học 12.*

*- Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Giải tích 12.*

*do nhà giáo ưu tú, Thạc sĩ Lê Hoành Phò tổ chức biên soạn. Nội dung sách được biên soạn theo chương trình phân ban: cơ bản và nâng cao mới của bộ GD & ĐT, trong đó một số vấn đề được mở rộng với các dạng bài tập hay và khó để phục vụ cho các em yêu thích muốn nâng cao toán học, có điều kiện phát triển tốt nhất khả năng của mình. Cuốn sách là sự kế thừa những hiểu biết chuyên môn và kinh nghiệm giảng dạy của chính tác giả trong quá trình trực tiếp đứng lớp bồi dưỡng cho học sinh giỏi các lớp chuyên toán.*

*Với một nội dung súc tích, tác giả đã cố gắng sắp xếp, chọn lọc các bài toán tiêu biểu cho từng thể loại khác nhau ứng với nội dung của SGK. Một số bài tập có thể khó nhưng cách giải được dựa trên nền tảng kiến thức và kĩ năng cơ bản. Học sinh cần tự mình hoàn thiện các kĩ năng cũng như phát triển tư duy qua việc giải câu bài tập có trong sách trước khi đối chiếu với lời giải có trong sách này, có thể một số lời giải có trong sách còn cô đọng, học sinh có thể tự mình làm rõ hơn, chi tiết hơn, cũng như tự mình đưa ra những cách lập luận mới hơn.*

*Chúng tôi hy vọng bộ sách này sẽ là một tài liệu thiết thực, bổ ích cho người dạy và học, đặc biệt các em học sinh yêu thích môn toán và học sinh chuẩn bị cho các kỳ thi quốc gia do bộ GD & ĐT tổ chức sắp tới.*

*Trong quá trình biên soạn, cuốn sách này không thể tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được góp ý của bạn đọc gần xa để bộ sách hoàn thiện hơn trong lần tái bản.*

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

**- Trung tâm sách giáo dục Anpha**

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

**- Công ti sách - thiết bị giáo dục Anpha**

50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, Tp. HCM.

ĐT: 08. 62676463, 38547464 .

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin chân thành cám ơn!

***Tác giả.***

CHƯƠNG I:

# PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

## §1. PHÉP BIẾN HÌNH

– Định nghĩa: Phép biến hình trong mặt phẳng là một quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

Đặc biệt, với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M thì ta cũng được một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là phép đồng nhất.

– Nếu ta kí hiệu một phép biến hình là F và điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F thì ta viết M' = F(M), hoặc F(M) = M'. Khi đó, ta còn nói phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'.

Với mỗi hình (H), ta gọi hình (H') gồm các điểm M' = F(M), trong đó $M \in (H)$, là ảnh của (H) qua phép biến hình F, và viết (H') = F((H)).

## §2. PHÉP DỜI HÌNH

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

$$F: \begin{array}{l} M \longmapsto M' \\ N \longmapsto N' \end{array} \quad \text{thì } M'N' = MN$$

– Định lí cơ bản: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

– Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ cho trước, là phép biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$.

– Phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành điểm M' đối xứng với M qua d. Phép đối xứng đó gọi là phép đối xứng trục, kí hiệu là $Đ_d$.

– Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến (H) thành chính nó.

– Phép đối xứng qua điểm O là phép biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O. Phép đối xứng đó gọi là phép đối xứng tâm, kí hiệu là $Đ_0$.

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình (H) nếu phép đối xứng tâm $Đ_0$ biến (H) thành chính nó.

– Phép quay tâm O góc quay φ, biến điểm O thành O và biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho OM' = OM, (OM, OM') = φ, kí hiệu $Q_{(0;\,\varphi)}$.

– Các phép đồng nhất, phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép quay đều là phép dời hình.

– Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CÁC PHÉP DỜI HÌNH

• Để chứng minh phép biến hình F là một phép dời hình, ta lấy 2 điểm M và N bất kì, xác định 2 ảnh M' và N' rồi chứng minh M'N' = MN theo các hướng sau đây:

– dùng quan hệ hình học;

– dùng hệ thức về vectơ để suy ra quan hệ độ dài;

– dùng phương pháp toạ độ.

• Hợp thành của hai phép dời hình liên tiếp:

$F_1: M \longmapsto M'$ và $F_2: M' \longmapsto M''$. Xác định quy tắc biến M thành M'' theo các hướng sau đây:

– Nếu M'' luôn trùng với M thì hợp thành là phép đồng nhất.

– Nếu $\overrightarrow{MM''} = \vec{v}$: xác định thì hợp thành là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

– Nếu đoạn MM'' có trung điểm O cố định thì hợp thành là phép đối xứng tâm O.

– Nếu trung trực của MM'' là d cố định thì hợp thành là phép đối xứng trục d.

– Nếu có một điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi mà OM'' = OM và (OM, OM'') = φ thì hợp thành là phép quay tâm O với góc quay φ.

**Ví dụ 1**: Chứng minh các phép tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng trục và phép quay đều là các phép dời hình.

**Giải**

– Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến M thành M', N thành N' thì:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{M'N'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} \quad \Rightarrow MN = M'N'.$$

Vậy phép tịnh tiến là phép dời hình.

– Phép đối xứng tâm O biến M thành M', biến N thành N' thì

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}, \ \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{ON'} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{N'M'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{M'N'} \Rightarrow MN = M'N'.$$

Vậy phép đối xứng tâm là phép dời hình.

– Phép đối xứng trục d. Chọn hệ trục Oxy mà d là trục hoành, biến $M(x_1; y_1)$ thành $M'(x_1; -y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành $N'(x_2; -y_2)$ ta có:

$$M'N' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN.$$

Vậy phép đối xứng trục là phép dời hình

Phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ biến điểm M thành M' và biến điểm N thành N'.

Ta có: OM = OM'; ON = ON'

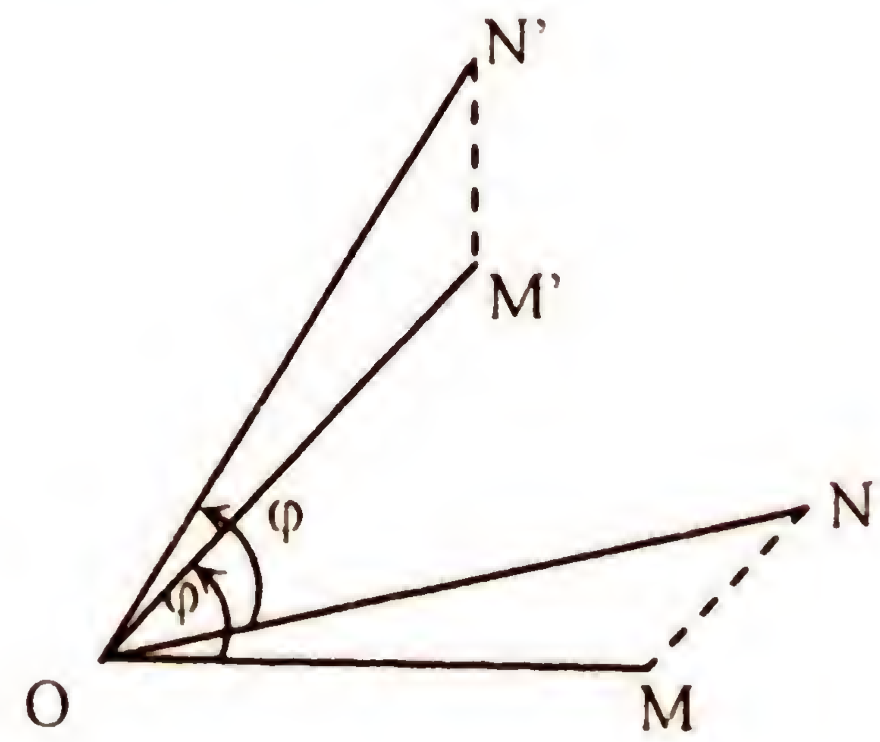
và (OM, OM') = (ON, ON') = $\varphi$.

Theo hệ thức Sa–lơ về góc lượng giác:

(OM, ON) = (OM, OM') + (OM', ON)

= (ON, ON') + (OM', ON) = (OM', ON')

Suy ra $\widehat{MON} = \widehat{M'ON'}$




• Khi O, M, N không thẳng hàng thì hai tam giác MON và M'ON' bằng nhau, do đó M'N'= MN.

Khi O, M, N thẳng hàng thì M'N' = MN.

Vậy phép quay là phép dời hình

**Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, phép biến hình nào sau đây là phép dời hình:

a) Phép biến hình $F_1$ biến mỗi điểm M = (x; y) thành điểm M' = (y; –x).

b) Phép biến hình $F_2$ biến mỗi điểm M = (x; y)thành điểm M' = (2x; y).

**Giải**

Lấy hai điểm bất kì $M = (x_1; y_1)$ và $N = (x_2; y_2)$, ta có:

$$MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a) Ảnh của M, N qua $F_1$ lần lượt là $M' = (y_1; -x_1)$ và $N' = (y_2; -x_2)$

Ta có:

$$M'N' = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (-x_1 + x_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

Do đó M'N' = MN, vậy $F_1$ là phép dời hình.

b) Ảnh của M, N qua $F_2$ lần lượt là $M' = (2x_1; y_1)$ và $N' = (2x_2; y_2)$

Ta có: $M'N' = \sqrt{4(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Do đó nếu $x_1 \neq x_2$ thì đoạn M'N' khác MN, vậy $F_2$ không phải là phép dời hình.

**Ví dụ 3**: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') trong đó:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

a) Chứng minh phép F là phép dời hình.

b) Khi α = 0, chứng minh F là phép tịnh tiến.

**Giải**

a) Phép F biến điểm $M(x_1; y_1)$ thành điểm $M'(x'_1; y'_1)$, điểm $N(x_2; y_2)$ thành điểm $N'(x'_2; y'_2)$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + a \\ y'_1 = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + b \end{cases}, \quad \begin{cases} x'_2 = x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha + a \\ y'_2 = x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha + b \end{cases}$$

Ta có: $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

và $M'N' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$

$$= \sqrt{[(x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\sin\alpha]^2 + [(x_1 - x_2)\sin\alpha + (y_1 - y_2)\cos\alpha]^2}$$

$$= \sqrt{\left[(x_1 - x_2)^2\cos^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\sin^2\alpha + (x_1 - x_2)^2\sin^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\cos^2\alpha\right]}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = MN.$$

Vậy phép F là phép dời hình

b) Khi α = 0 ta có $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ (a; b).

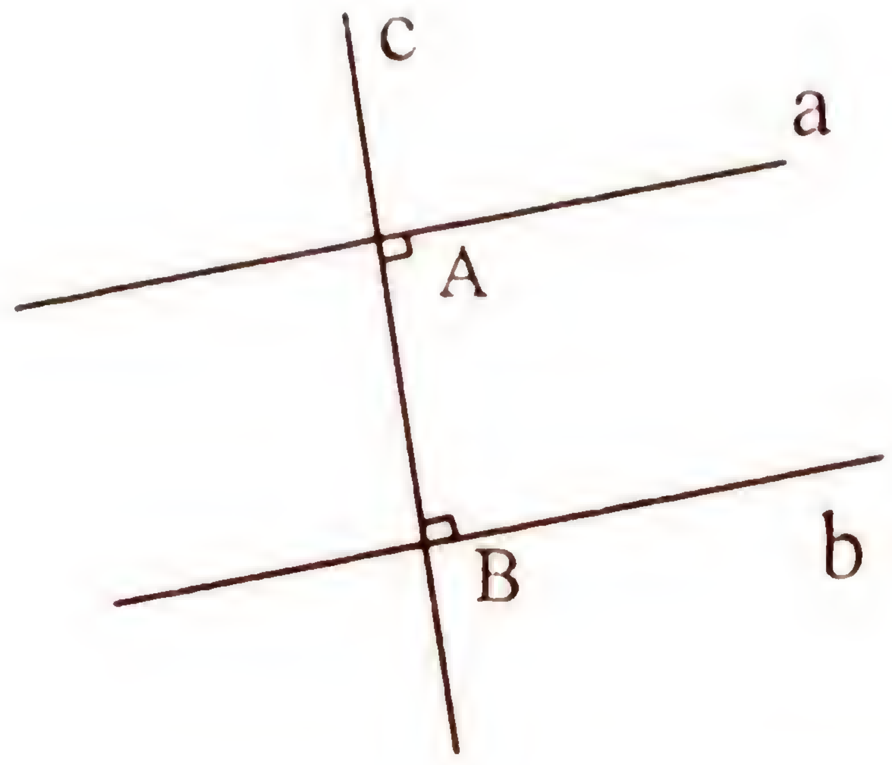
**Ví dụ 4**: Chứng minh phép dời hình biến một đường tròn thành một đường tròn bằng nó.

**Giải**

Giả sử cho đường tròn (O; R) và phép dời hình F. Gọi O' = F(O) và với mọi điểm M ∈ (O; R), gọi M' = F(M). Vì F là phép dời hình nên O'M' = OM = R. Vậy M' ∈ (O; R).

Ngược lại, cũng đúng nên phép dời hình F biến đường tròn (O; R) thành đường tròn (O'; R) bằng nó.

**Ví dụ 5**: Chứng minh rằng phép dời hình biến hai đường thẳng song song đã cho thành hai đường thẳng song song, sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng song song đã cho bằng khoảng cách giữa các ảnh của chúng.




**Giải**

Giả sử phép dời hình F biến hai đường thẳng song song a và b thành hai đường thẳng a' và b'. Ta lấy đường thẳng c nào đó vuông góc với a và b, cắt a và b lần lượt tại A và B. Khi đó F biến A thành A' nằm trên a', biến B thành B' nằm trên b'. Vì a $\perp$ AB và b $\perp$ AB nên a' $\perp$ A'B' và b' $\perp$ A'B'. Vậy a' // b' và vì AB = A'B' nên khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a' và b'.

**Ví dụ 6**: Một điểm gọi là bất động nếu nó trùng với ảnh của nó qua phép biến hình. Chứng minh một phép dời hình có hai điểm bất động là một phép đồng nhất hoặc là một phép đối xứng trục.

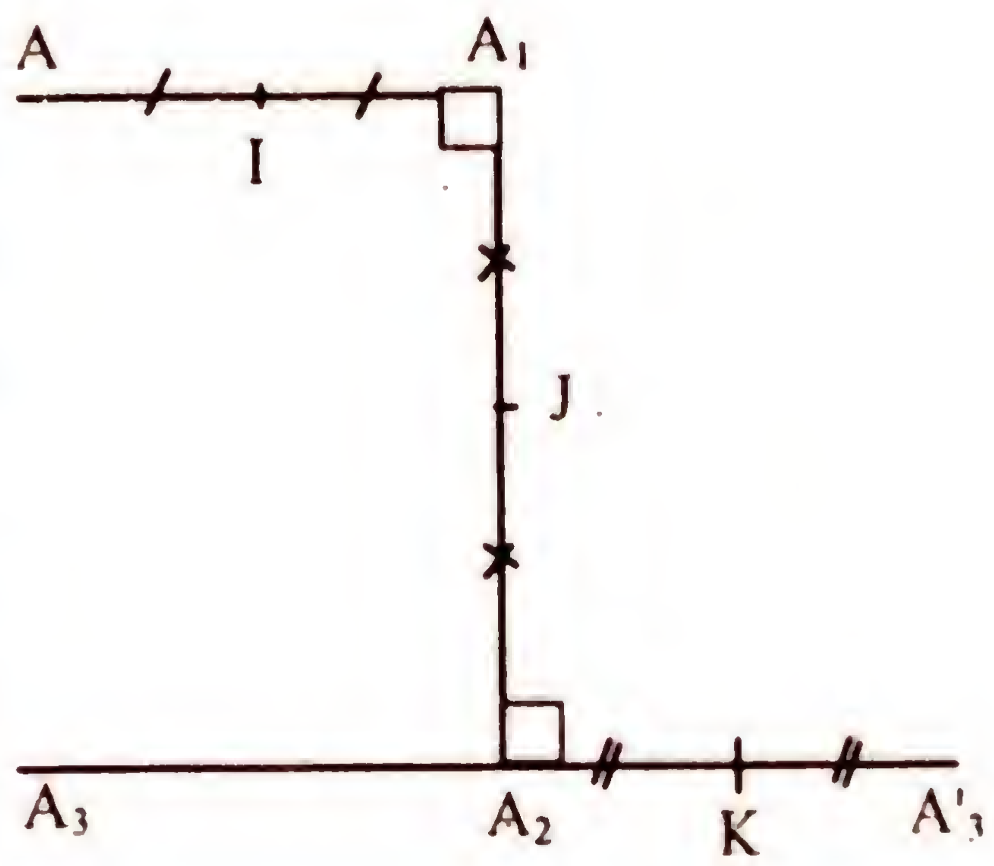
**Giải**

Gọi F là phép dời hình có hai điểm bất động A, B: F(A) = A, F(B) = B.
Lấy một điểm C không thẳng hàng với A, B và gọi C' = F(C).
Nếu C' $\equiv$ C thì F có ba điểm bất động không thẳng hàng. Giả sử F không phải là phép đồng nhất thì có một điểm M mà ảnh M' khác M ta có: AM = AM', BM = BM', CM = CM' nên A, B, C cách đều M và M' nên nằm trên trung trực của MM' do đó chúng thẳng hàng: vô lí. Vậy F là phép đồng nhất.
Nếu C' không trùng C thì AC = AC' và BC = BC' nên AB là trung trực của CC'. Khi đó F chính là phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng AB.
Kết quả: Nếu phép dời hình có ba điểm bất động không thẳng hàng thì phép dời hình đó là một phép đồng nhất.

**Ví dụ 7**: Chứng minh rằng nếu phép dời hình F biến mỗi đường thẳng a thành đường thẳng a' vuông góc với a thì F có một điểm duy nhất biến thành chính nó.

**Giải**

Trước hết, F không thể có hai điểm phân biệt biến thành chính nó vì khi đó đường thẳng đi qua hai điểm đó phải biến thành chính nó, trái với giả thiết là F biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc.
Để chứng minh sự tồn tại của điểm biến thành chính nó, lấy một điểm A nào đó và gọi $A_1$ = F(A), $A_2$ = F($A_1$).



Nếu A trùng $A_1$ thì A là điểm biến thành chính nó, bởi vậy ta giả sử rằng A khác $A_1$. Khi đó ta có đoạn thẳng $AA_1$ biến thành đoạn thẳng $A_1A_2$ nên $AA_1 = A_1A_2$, ngoài ra có $AA_1 \perp A_1A_2$ nên tam giác $AA_1A_2$ vuông cân tại $A_1$.

Lấy điểm $A_3$ sao cho $AA_1A_2A_3$ là hình vuông và điểm $A'_3$ là điểm đối xứng với $A_3$ qua điểm $A_2$. Khi đó, F biến điểm $A_2$ thành điểm $A_3$ hoặc điểm $A'_3$. Ta chứng minh rằng nếu F biến $A_2$ thành $A'_3$ thì vô lí. Thật vậy, nếu ta gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AA_1$, $A_1A_2$, $A_2A'_3$ thì F biến I thành J và biến J thành K mà IJ không vuông góc với JK, vô lí. Vậy F biến $A_2$ thành $A_3$ và cũng tương tự F biến $A_3$ thành A. Như vậy F biến đoạn thẳng $AA_2$ thành đoạn thẳng $A_1A_3$, suy ra F biến trung điểm của $AA_2$ thành trung điểm của $A_1A_3$, tức là biến tâm O của hình vuông $AA_1A_2A_3$ thành chính nó. Vậy F có duy nhất điểm O biến thành chính nó.

**Ví dụ 8:** Giả sử phép dời hình F biến điểm I đã cho thành chính nó và biến một điểm M khác I thành điểm M' không trùng với M.

a) Tìm những đường tròn biến thành chính nó qua phép dời hình F.

b) Chứng tỏ rằng nếu đường thẳng a không đi qua I thì F biến a thành đường thẳng a' không trùng với a.

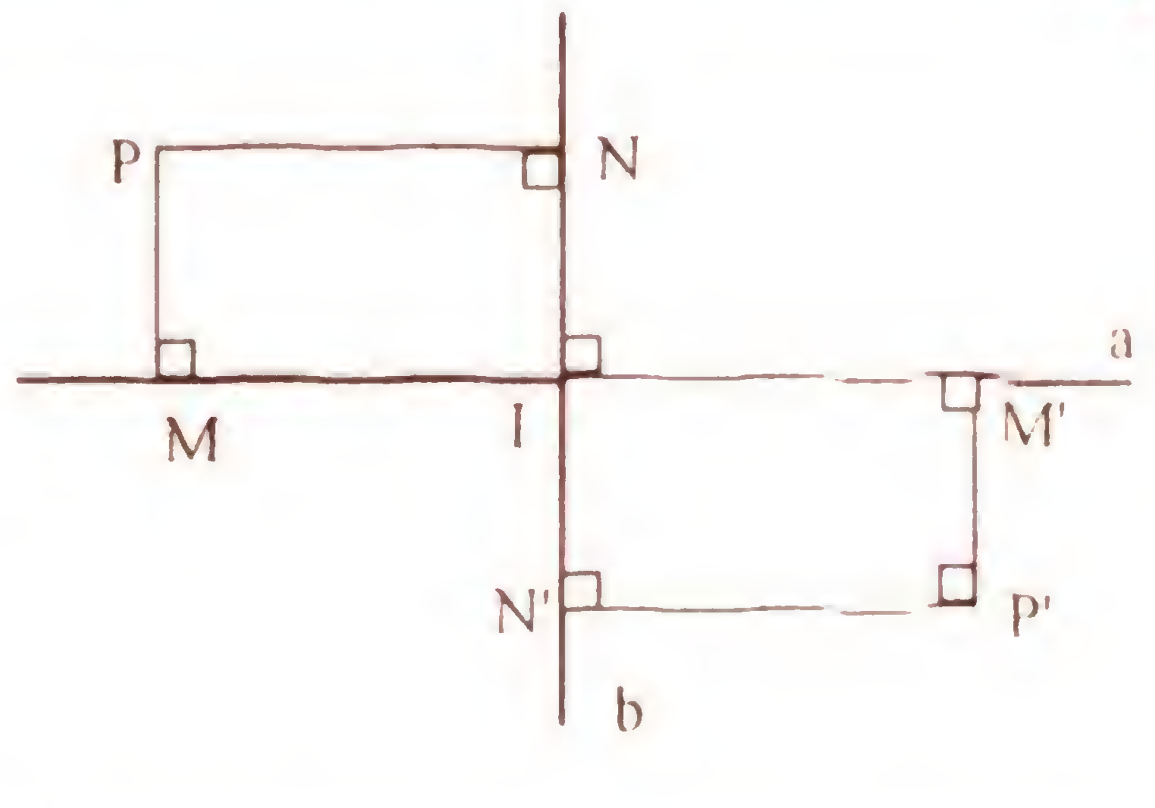
**Giải**

a) Phép dời hình F biến mỗi đường tròn (O, R) thành đường tròn (O', R), trong đó điểm O' là ảnh của điểm O. Nếu hai đường tròn đó trùng nhau thì O phải trùng với O' và do đó trùng với I. Vậy các đường tròn được biến thành chính nó khi và chỉ khi chúng có tâm là I.

b) Giả sử a là đường thẳng không đi qua I. Hạ $IH \perp a$, $H \in a$. Khi đó F biến H thành H', biến đường thẳng IH thành đường thẳng IH' và biến đường thẳng a thành đường thẳng a' đi qua H' và vuông góc với IH' tại H'. Chú ý rằng vì a không đi qua I nên H không trùng với H'. Từ đó, suy ra a' không trùng với a.

**Ví dụ 9**: Cho đường thẳng a và một điểm I nằm trên nó. Gọi F là phép dời hình biến a thành a và I là điểm duy nhất biến thành chính nó. Chứng minh rằng F biến điểm M bất kì thành điểm M' sao cho I là trung điểm MM'.

**Giải**




Lấy điểm M bất kì nằm trên a và khác I, phép dời hình F biến a thành a nên biến điểm M thành điểm M' trên a, IM = IM'. Ngoài ra vì M khác M' nên I là trung điểm của MM'.

Gọi b là đường thẳng đi qua I vuông góc với a thì F biến b thành đường thẳng đi qua I và vuông góc với a. Do đó b

biến thành b. Cũng lập luận như trên, nếu N nằm trên b thì F biến N thành N' sao cho I là trung điểm của NN'. Giả sử điểm P không nằm trên a và b. Hạ PM ⊥ a và PN ⊥ b (M ∈ a, N ∈ b). Theo trên M biến thành M', N biến thành N'' sao cho I là trung điểm của MM' và NN'. Suy ra P biến thành điểm P' sao cho M'IN'P' là hình chữ nhật và do đó I là trung điểm của PP'.

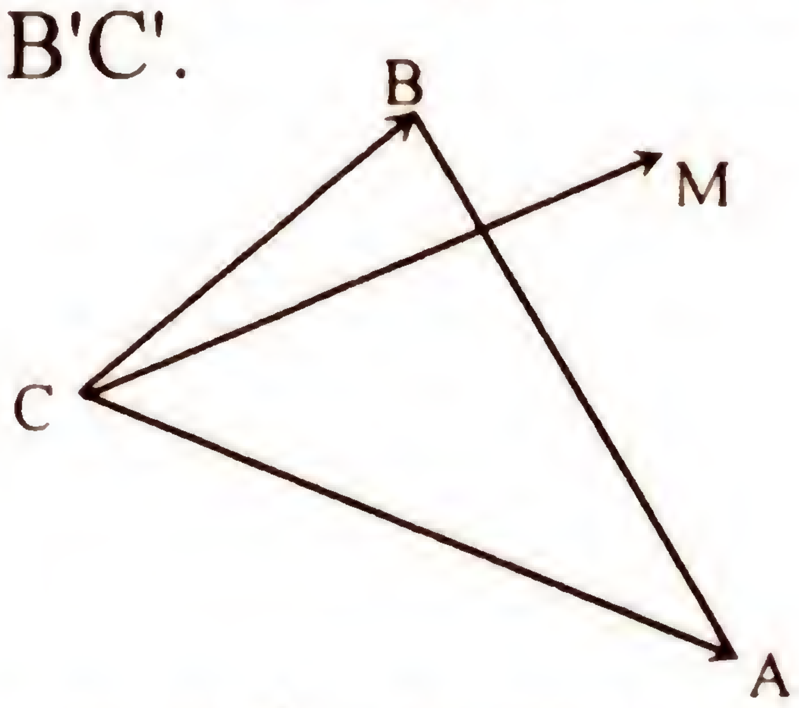
**Ví dụ 10**: Có hay không một phép dời hình F sao cho mọi đường thẳng đều biến thành đường thẳng song song với nó?

**Giải**

Nếu F là phép dời hình có tính chất đã cho thì F không có điểm biến thành chính nó, vì nếu I là điểm như thế thì đường thẳng a đi qua I biến thành đường thẳng a' cũng đi qua I nên đường thẳng a' không song song với a.

Ta lấy một điểm A bất kì, gọi A' = F(A) và A" = F(A') thì đường thẳng a đi qua A và A' biến thành đường thẳng a' đi qua A' và A", do đó a và a' cắt nhau tại A', vô lí. Vậy không có phép dời hình F có tính chất đã cho.

**Ví dụ 11**: Cho 2 tam giác bằng nhau ABC và A'B'C'. Chứng minh có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.




**Giải**

Xét phép biến hình, F biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho nếu

$\overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$

thì $\overrightarrow{C'M'} = p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'}$.

Ta chứng minh F là phép dời hình. Giả sử F biến N thành N', nếu $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ thì $\overrightarrow{C'N'} = k\overrightarrow{C'A'} + t\overrightarrow{C'B'}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = (k-p)\overrightarrow{CA} + (t-q)\overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (k-p)^2CA^2 + (t-q)^2CB^2 + 2(k-p)(t-q)\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Tương tự: $M'N'^2 = \overrightarrow{M'N'}^2$

$$= (k-p)^2C'A'^2 + (t-q)^2C'B'^2 + 2(k-p)(t-q)\overrightarrow{C'A'}.\overrightarrow{C'B'}$$

Vì hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau nên CA = C'A', CB = C'B' và $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'}.\overrightarrow{C'B'}$. Do đó MN = M'N' hay F là phép dời hình, biến A, B, C lần lượt thành A', B', C' ⇒ đpcm.

**Ví dụ 12**: Cho hai tam giác bằng nhau ABC và A'B'C' (AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'). Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

**Giải**

Giả sử có hai phép dời hình khác nhau $F_1$ và $F_2$ cùng biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Khi đó, có ít nhất một điểm M sao cho $F_1$ biến M thành $M'_1$ và $F_2$ biến M thành $M'_2$ khác $M'_1$. Khi đó ta có:

AM = A'M'$_1$ và AM = A'M'$_2$ nên A'M'$_1$ = A'M'$_2$ hay A' nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng M'$_1$M'$_2$. Tương tự B', C' cũng nằm trên trung trực đó. Suy ra ba điểm A', B', C' thẳng hàng, vô lí.

**Ví dụ 13**: Chứng minh rằng hợp thành của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.

**Giải**

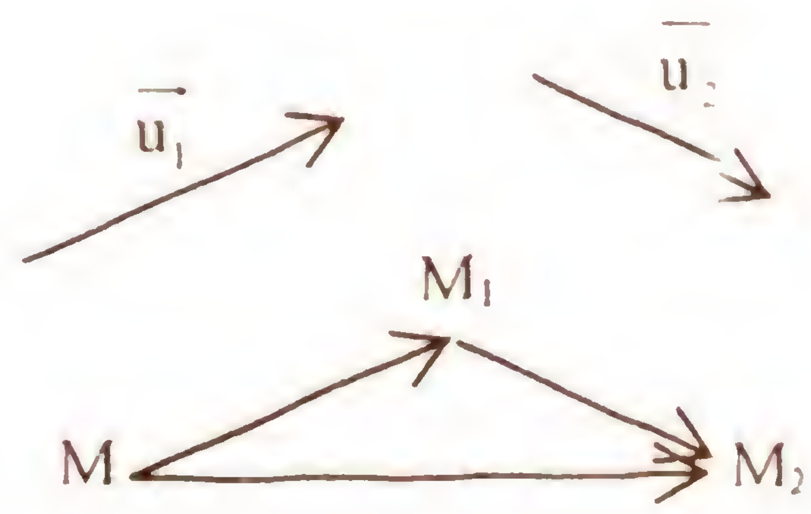
Vì mỗi phép dời hình đều không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, nên hợp thành của chúng cũng có tính chất đó, bởi vậy hợp thành của 2 hay nhiều phép dời hình cũng là phép dời hình.

**Ví dụ 14**: Chứng minh rằng hợp thành của một số hữu hạn các phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

**Giải**

Cho phép tịnh tiến $T_1$ theo vectơ $\overrightarrow{u_1}$ và phép tịnh tiến $T_2$ theo vectơ $\overrightarrow{u_2}$. Gọi F là phép hợp thành của $T_1$ và $T_2$. Giả sử $T_1$ biến điểm M thành điểm $M_1$ và $T_2$ biến điểm $M_1$ thành $M_2$, tức là:

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u_1}\ ;\ \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{u_2}$$




Suy ra: $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ : xác định

Vì phép hợp thành F biến M thành $M_2$ nên F là phép tịnh tiến theo vectơ : $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$.

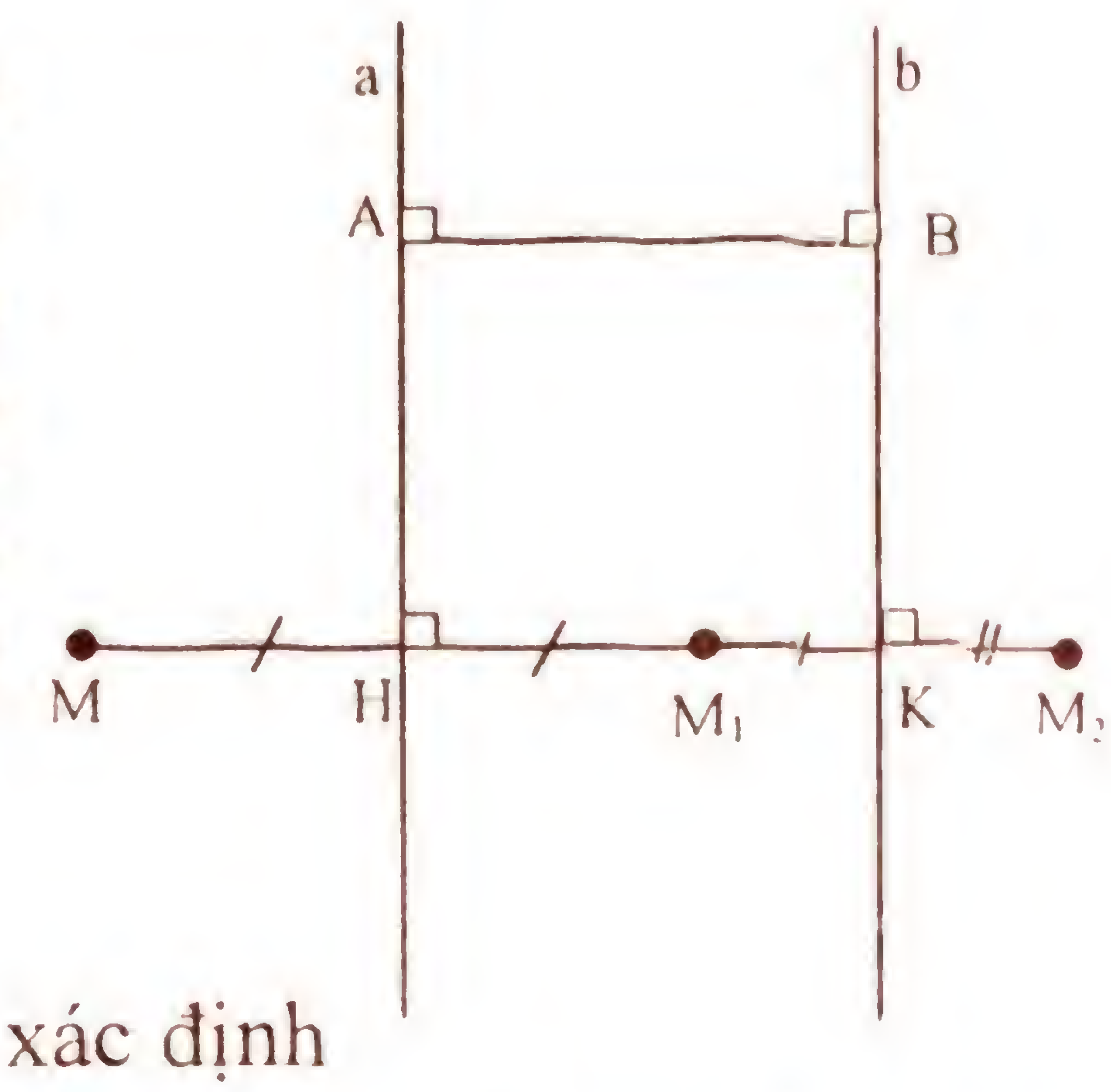
Một cách tổng quát: Hợp thành của một số hữu hạn phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến theo vectơ tổng của các vectơ tịnh tiến của các phép tịnh tiến đó.

**Ví dụ 15:** Chứng minh:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.

b) Mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song bằng nhiều cách.

**Giải**




a) Giả sử $Đ_a$ và $Đ_b$ là các phép đối xứng trục có trục là a và b mà a // b và F là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên a, b sao cho AB ⊥ a. Với điểm M bất kì, $Đ_a$ biến M thành $M_1$ và $Đ_b$ biến $M_1$ thành $M_2$. Nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của $MM_1$ và $M_1M_2$ thì :

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$= 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB} : \text{xác định}$$

Vì phép hợp thành F biến M thành $M_2$ mà $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$ nên F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$

b) Giả sử T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Lấy một đường thẳng a nào đó vuông góc với $\vec{u}$ và đường thẳng b là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{u}$ thì phép tịnh tiến T là hợp thành của phép đối xứng trục $Đ_a$ và phép đối xứng trục $Đ_b$. Vì có nhiều cách chọn đường thẳng a, nên có nhiều phép đối xứng $Đ_a$ và $Đ_b$ có hợp thành là T.

**Ví dụ 16:** Chứng minh:

a) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép đối xứng trục.

**Giải**

a) Hợp thành của hai phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến. Vì vậy, hợp thành của 2n phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là hợp thành của n phép tịnh tiến, do đó cũng là phép tịnh tiến.

b) Giả sử F là hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng. Gọi phép đối xứng thứ nhất là $Đ_a$ có trục là đường thẳng a, 2n phép đối xứng còn lại có hợp thành là phép tịnh tiến T. Ta có thể xem T là hợp thành của hai phép đối xứng mà phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng: $Đ_a$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Nhưng vì hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_a$ là phép đồng nhất e nên F chính là phép đối xứng $Đ_b$.

**Ví dụ 17**: Cho phép đối xứng trục $Đ_a$ qua đường thẳng a và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với a. Chứng minh rằng hợp thành của $Đ_a$ và T là phép đối xứng trục, hợp thành của T và $Đ_a$ cũng là phép đối xứng trục.

**Giải**

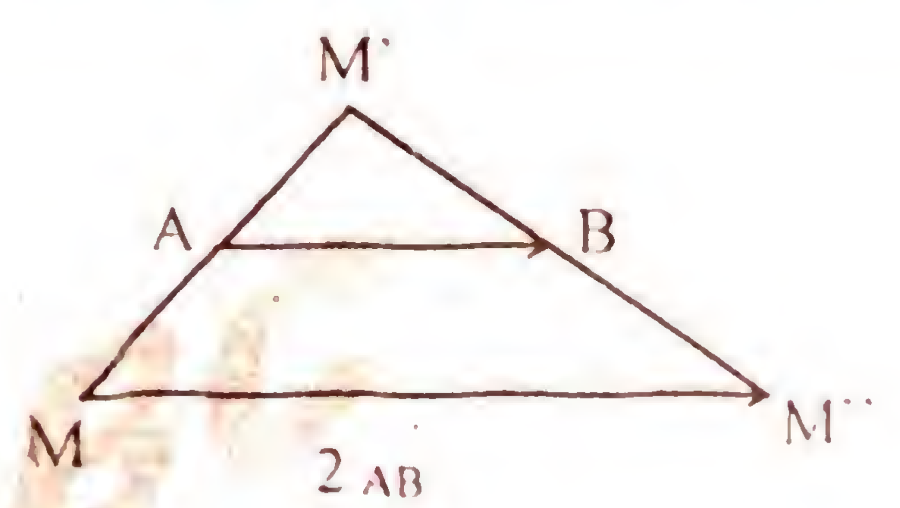
Có thể xem phép tịnh tiến T là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_b$ và $Đ_c$. Vì vectơ tịnh tiến vuông góc với a nên a // b // c. Do đó, ta được hợp thành của ba phép đối xứng có trục song song. Vậy ta được một phép đối xứng trục.

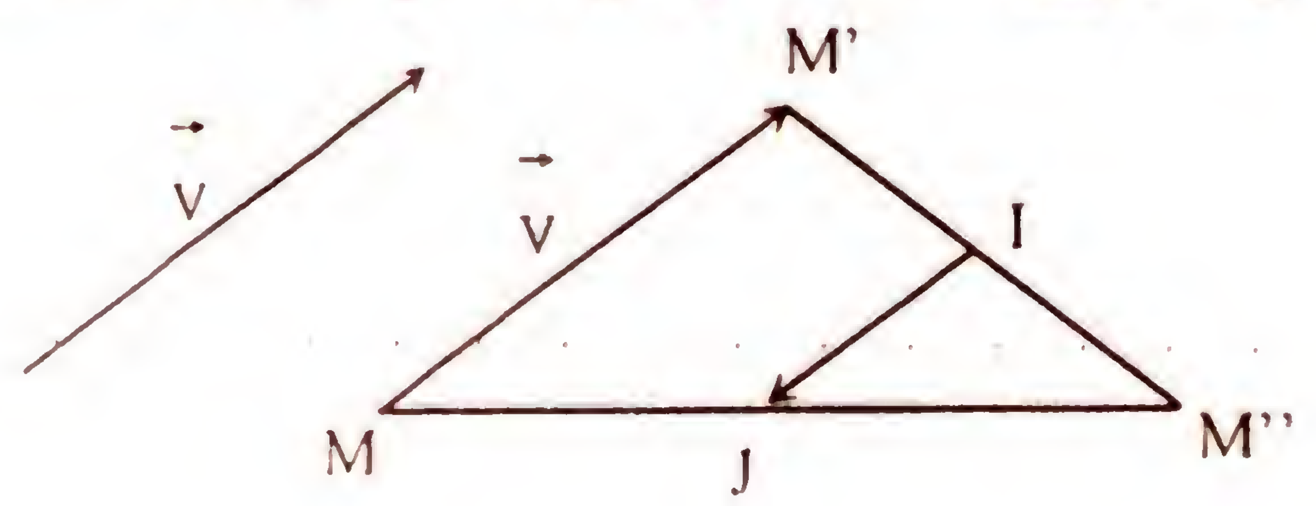
Cách khác: Sử dụng định nghĩa để tìm quan hệ giữa M và ảnh M".

**Ví dụ 18**: Chứng minh hợp thành của k phép đối xứng tâm là phép tịnh tiến hoặc đối xứng tâm.

**Giải**

Ta có hợp thành của 2 phép đối xứng tâm A và B là phép tịnh tiến theo vec tơ $2\overrightarrow{AB}$. Do đó, hợp thành của k = 2n phép đối xứng tâm $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2n}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + ... + \overrightarrow{A_{2n-1}A_n})$



Ta có hợp thành của phép tịnh tiến $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm I là phép đối xứng tâm J sao cho $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{v}$.

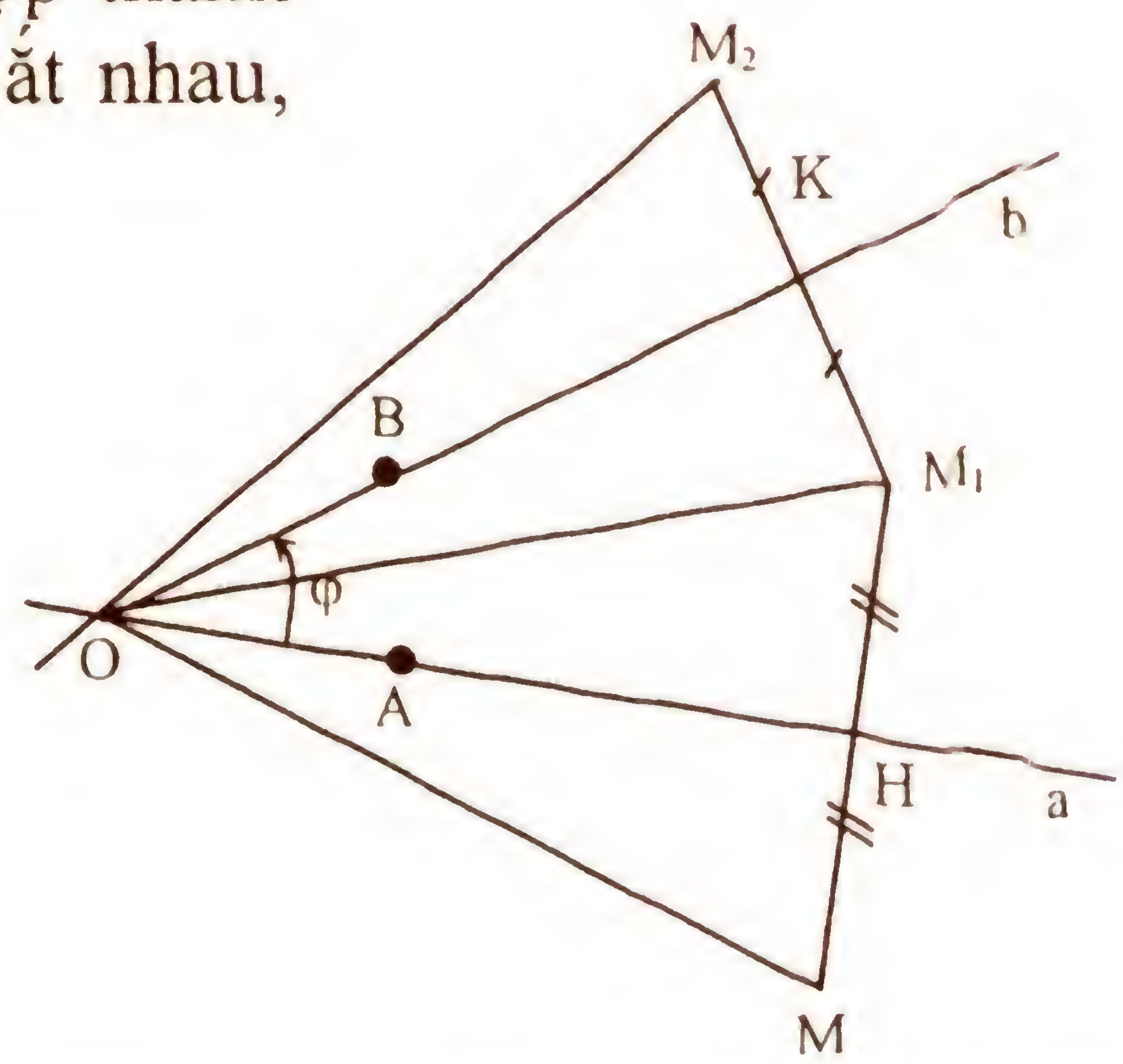
Do đó hợp thành của $k = 2n + 1$ phép đối xứng tâm $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ là phép đối xứng tâm O sao cho:

$$\overrightarrow{A_{2n+1}O} = -(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + ... + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}})$$

**Ví dụ 19:** Chứng minh:

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay.

b) Mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau, bằng nhiều cách. K




**Giải**

Giả sử cho hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ có trục a và b cắt nhau tại O, còn F là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$. Lấy hai điểm A, B khác O lần lượt nằm trên a, b sao cho góc AOB không tù và đặt $\varphi = (OA, OB)$. Với mọi điểm M khác O, giả sử $Đ_a$ biến M thành $M_1$ và $Đ_b$ biến $M_1$ thành $M_2$.

Khi đó, nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của $MM_1$ và $M_1M_2$ thì ta có: $OM = OM_1 = OM_2$

và $(OM, OM_2) = (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2)$

$= 2(OH, OM_1) + 2(OM_1, OK)$

$= 2(OH, OK) = 2\varphi$.

Vậy phép hợp thành F là phép quay tâm O góc quay $2\varphi$.

b) Giả sử Q là phép quay tâm O góc quay $\varphi$. Ta lấy đường thẳng a nào đó đi qua O và b là ảnh của a qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\varphi}{2}$ thì hợp thành hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ chính là phép quay Q.

**Ví dụ 20:** Chứng minh:

a) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy là một phép quay.

b) Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng trục có trục đối xứng đồng quy là một phép đối xứng trục.

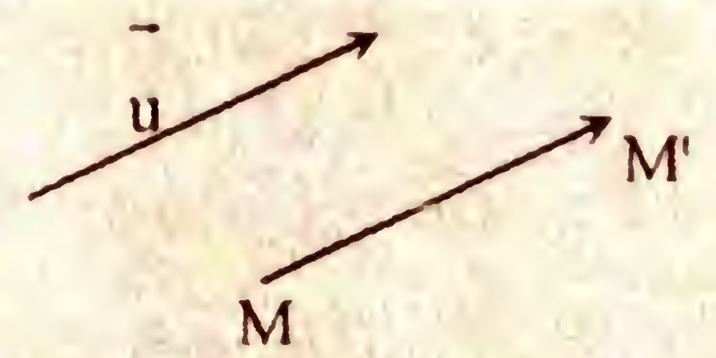
**Giải**

a) Nếu F là hợp thành của 2n phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy tại O thì F là hợp thành của n phép quay có tâm O và do đó F là một phép quay.

b) Giả sử F là hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng trục có các trục đều đi qua O. Gọi $Đ_a$ là phép đối xứng đầu tiên, thì 2n phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép quay Q tâm O. Ta xem Q là hợp thành của hai phép đối xứng trục, trong đó phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Như vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng trục: $Đ_a$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Vậy F chính là phép đối xứng trục $Đ_b$.

## DẠNG 2: PHÉP TỊNH TIẾN

– Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là một phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



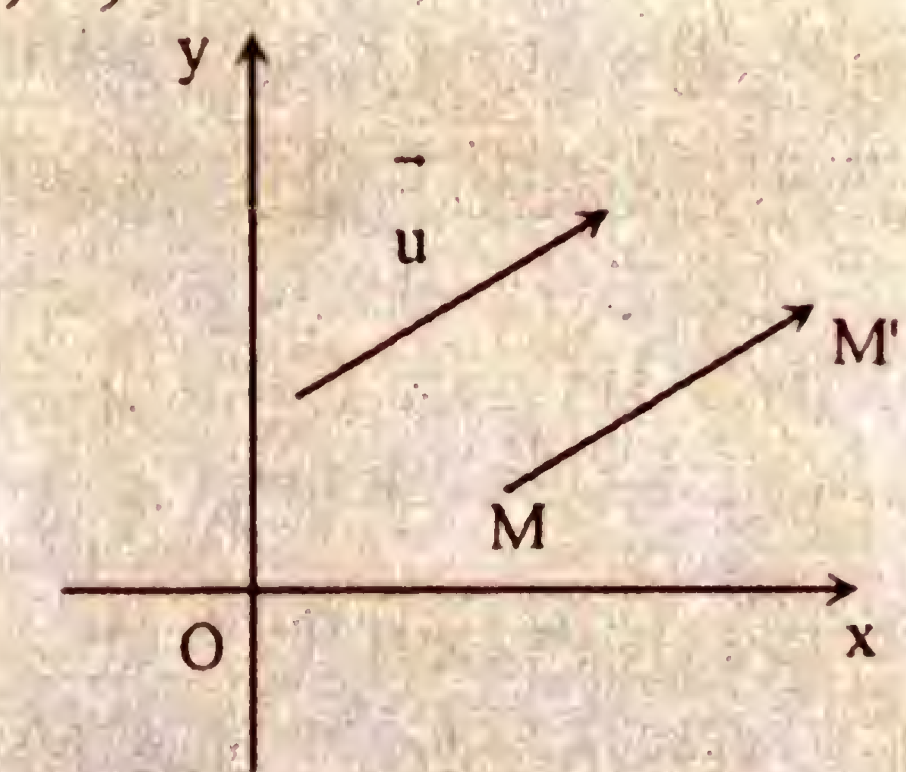

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ thường được kí hiệu là T hoặc $T_{\vec{u}}$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.

Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

– Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(x; y), $\vec{v}(a; b)$.
Gọi điểm $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$.

Khi đó $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$




Chú ý: – Để xác định ảnh ta có thể dùng định nghĩa hay công thức toạ độ kết hợp các tính chất chung của phép dời hình.

– Để xác định điểm ta thường tìm tương giao. Thông thường điểm cần tìm thuộc một đường đã biết và một đường là ảnh qua phép tịnh tiến, do đó điểm cần tìm là điểm chung. Bài toán dựng hình đầy đủ có 4 bước: phân tích, dựng hình, chứng minh và biện luận, tuy nhiên có thể lược giản đi.

– Để tìm quỹ tích (tập hợp điểm), nếu có phép tịnh tiến biến điểm M thành M' và (C) là tập hợp điểm của M thì ảnh (C') là tập hợp điểm của M'.

<u>**Ví dụ 1**</u>: Cho phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}$ biến M thành M', biến N thành N'. Chứng minh $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

**Giải**

Theo định nghĩa ta có: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} = \overrightarrow{NN'}$

Do đó $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{MN'}$ nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

**Ví dụ 2**: Chứng tỏ rằng qua phép tịnh tiến, một đường thẳng a biến thành đường thẳng a' song song hoặc trùng với a.

**Giải**

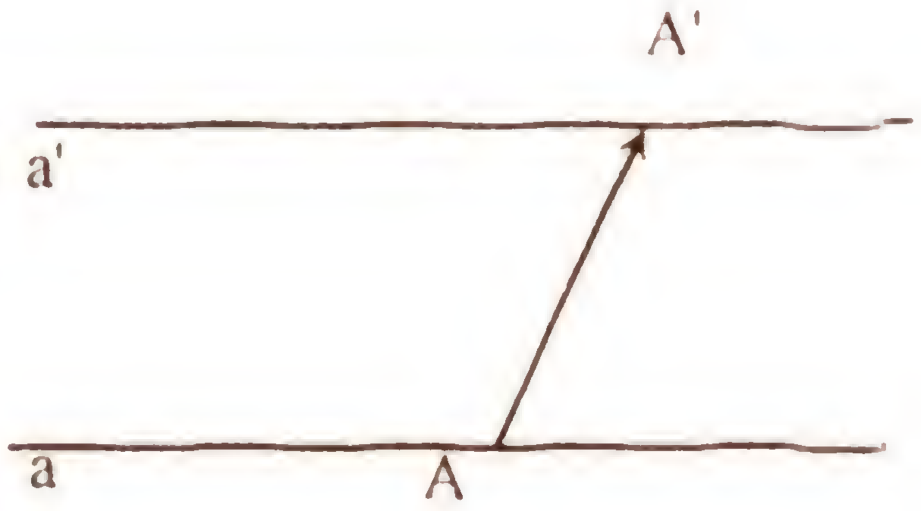
Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Nếu đường thẳng a song song với vectơ $\vec{v}$ thì mỗi điểm thuộc a lại biến thành một điểm thuộc a, vậy a biến thành chính nó hay là a' trùng với a.

Nếu đường thẳng a không song song với $\vec{v}$ thì ta lấy hai điểm A, B nào đó nằm trên a và gọi A', B' là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, tức là $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v}$. Khi đó ảnh của đường thẳng a là đường thẳng a' đi qua A' và B'. Vì AA'B'B là hình bình hành nên a' // a.

Kết quả: Đường thẳng và ảnh của nó không cắt nhau.

**Ví dụ 3**: Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.

**Giải**



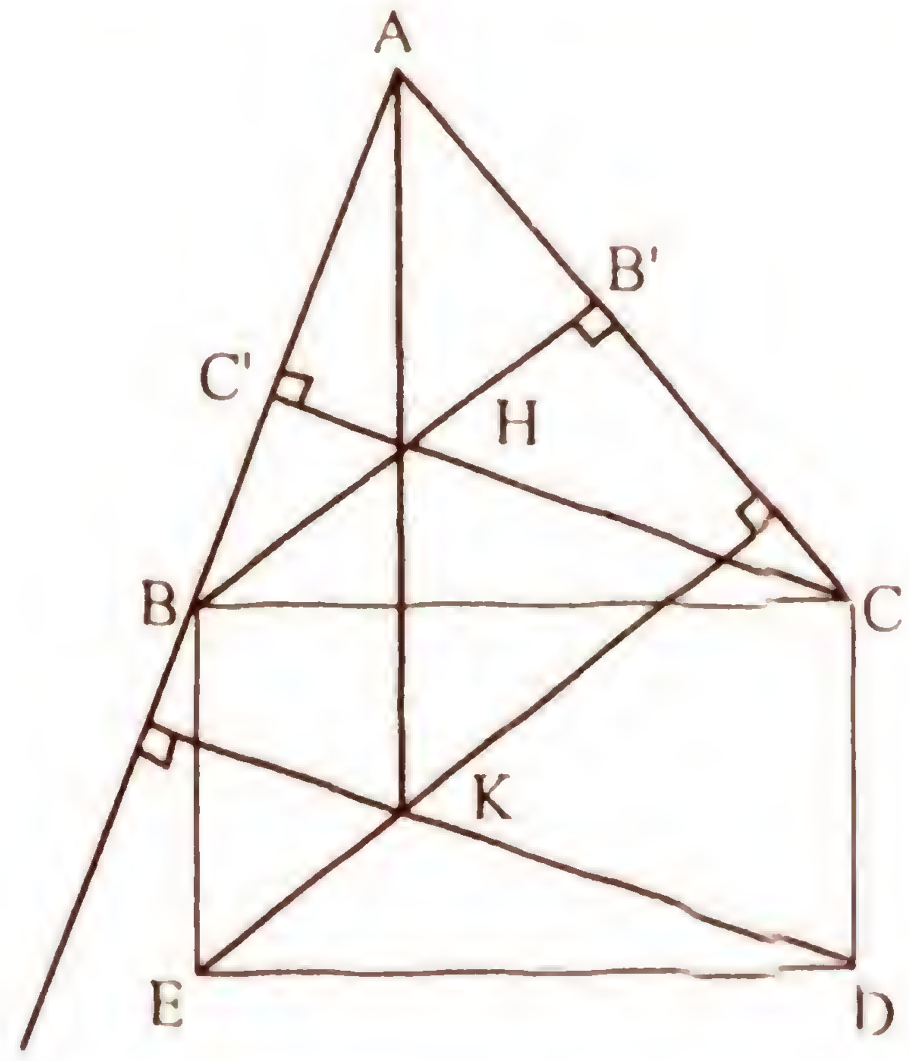

Lấy điểm A bất kì trên a thì với mỗi điểm A' trên a', phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến a thành a'.

Đó là tất cả những phép tịnh tiến cần tìm.

Vậy có vô số phép tịnh tiến.

**Ví dụ 4**: Cho tam giác ABC, vẽ ra ngoài hình chữ nhật BCDE. Các đường thẳng qua D và E lần lượt vuông góc với AB và AC cắt nhau tại K. Chứng minh AK vuông góc với BC.

**Giải**




Gọi BB' và CC' là hai đường cao của tam giác ABC và H là trực tâm của tam giác này.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ biến:

– BB' thành EK (vì EK // BB')

– CC' thành DK (vì DK // CC')

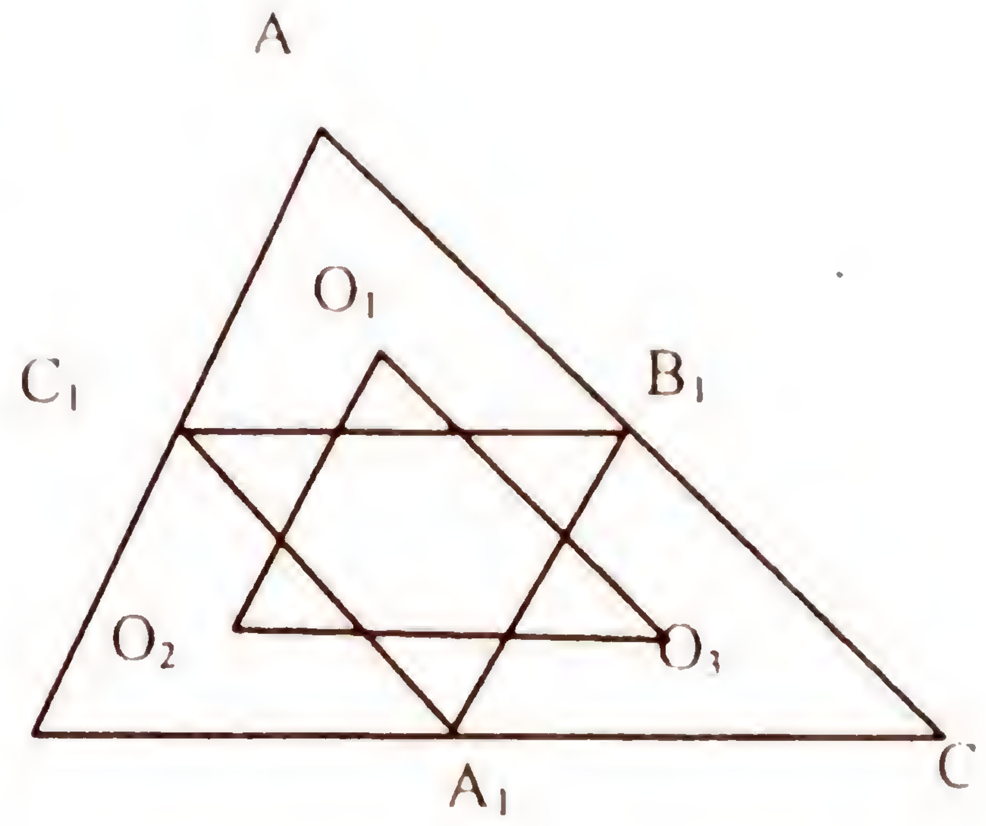
Mà BB' và CC' giao nhau tại H nên H và K là hai điểm tương ứng trong phép tịnh tiến này.

Do đó HK // BE nên HK $\perp$ BC.

Mà AH $\perp$ BC, vậy A, H, K thẳng hàng, nghĩa là AK vuông góc với đường thẳng BC.

**Ví dụ 5:** Cho tam giác ABC. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$ là các trung điểm của ba cạnh BC, CA, AB. Gọi $O_1$, $O_2$, $O_3$ và $I_1$, $I_2$, $I_3$ tương ứng là các tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ba tam giác $AB_1C_1$, $BC_1A_1$ và $CA_1B$. Chứng minh $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$.

**Giải**




Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ biến A thành $C_1$, $C_1$ thành B, $B_1$ thành $A_1$ nên tam giác $AC_1B_1$ thành tam giác $C_1BA_1$, do đó $O_1$ thành $O_2$ và $I_1$ thành $I_2$ nên $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{I_1I_2}$

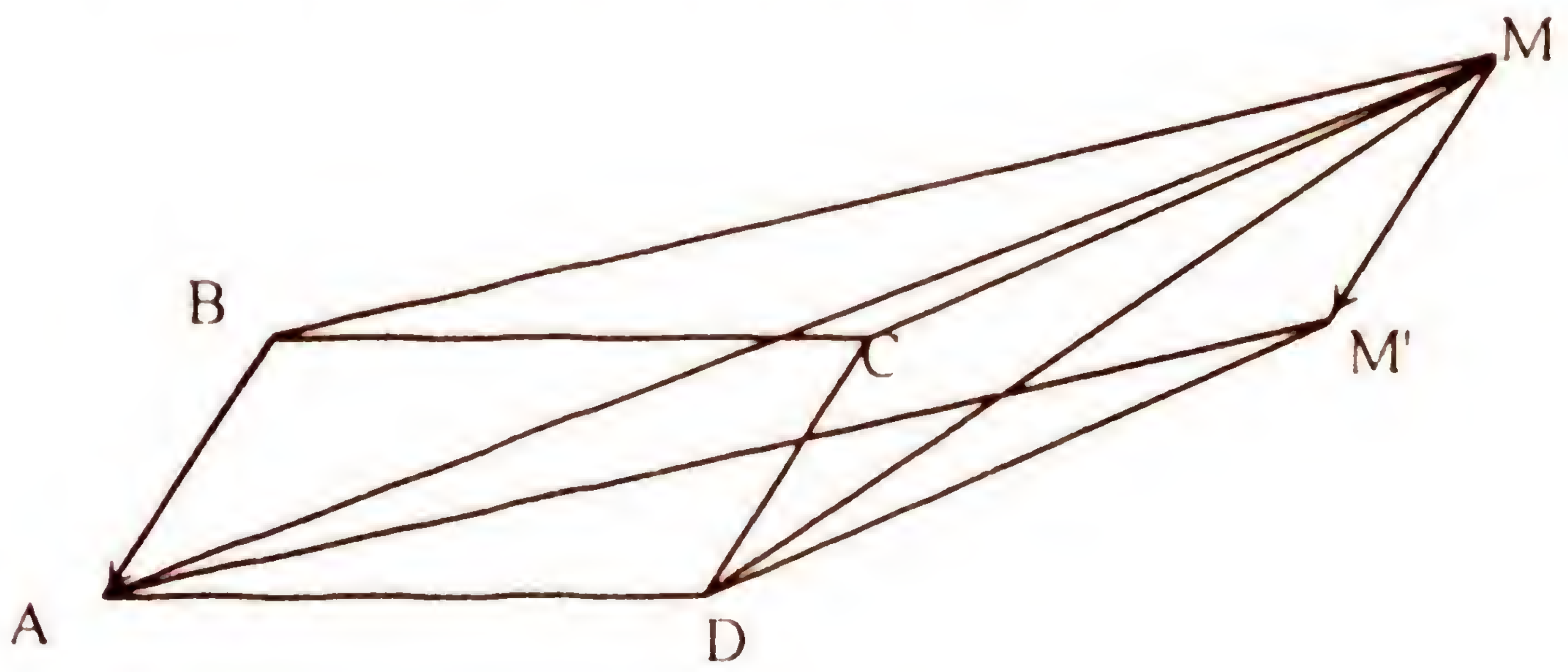
Tương tự $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{I_2I_3}$ và $\overrightarrow{O_3O_1} = \overrightarrow{I_3I_1}$

$\Rightarrow \Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ (c.c.c).

**Ví dụ 6:** Cho hình bình hành ABCD và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD. Giả sử $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$. Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$

**Giải**

Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ biến B thành A, C thành D, MC thành M'D nên DCMM' là hình bình hành, do đó $\widehat{MDC} = \widehat{DMM'}$ và $\widehat{MBC} = \widehat{M'AD}$



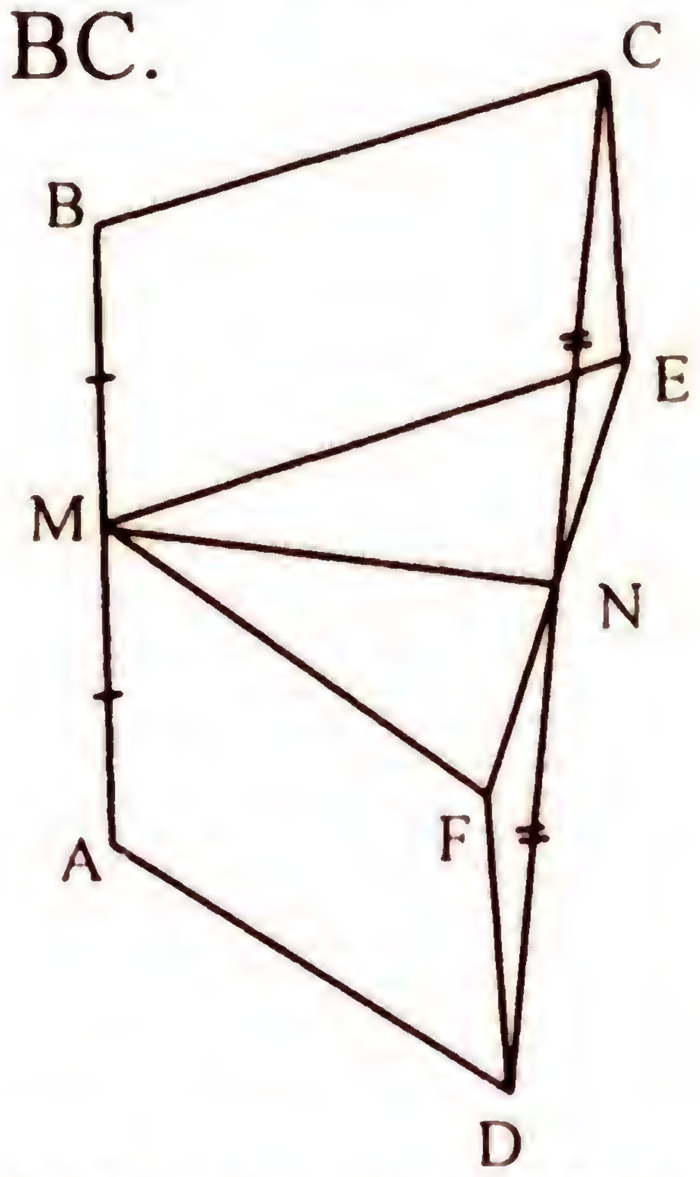

Mà $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$ nên $\widehat{DMM'} = \widehat{M'AD}$ .

Do đó AMM'D là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMD} = \widehat{AM'D}$

Hơn nữa, ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{A'MD}$ nên $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$.

**Ví dụ 7**: Cho tứ giác lồi ABCD không phải là hình thang. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng nếu MN tạo với các cạnh AD và BC những góc bằng nhau thì AD = BC.

**Giải**




Dựng $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AD}$

Các tứ giác MBCE và MADF là hình bình hành nên ta có:

CE = BM, DF = AM nên

CE = DF, CE // DF.

Do đó tứ giác CEDF là hình bình hành nên hai đường chéo EF và CD giao nhau tại trung điểm N.

Theo giả thiết thì $\widehat{EMN} = \widehat{NMF}$ nên tam giác EMF cân vì có đường phân giác vừa là trung tuyến.

Vậy ME = MF $\Rightarrow$ BC = AD.

**Ví dụ 8**: Cho phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}(-2; 3)$. Tìm ảnh của:

a) Điểm A(4; 1)

b) Đường thẳng d: $3x - 5y + 3 = 0$

c) Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

**Giải**

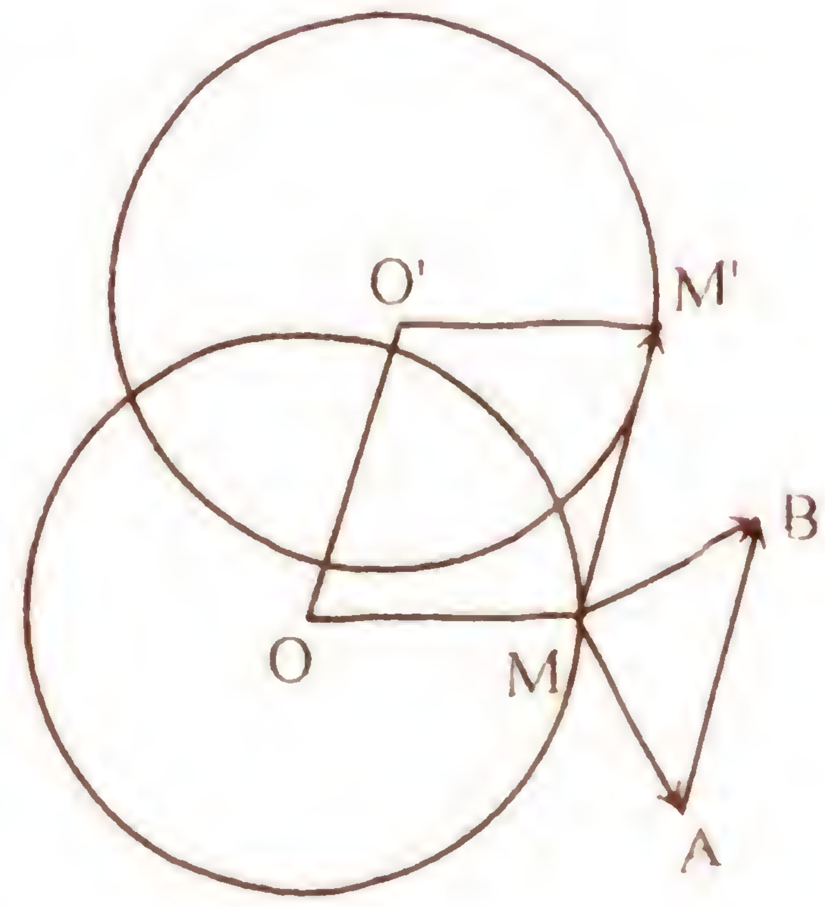
Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(-2; 3)$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') thì ta có: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

a) Biến A(4; 1) thành A'(2; 4)

b) Ta có $x = x' + 2$, $y = y' - 3$. Thay vào phương trình của d ta được $3(x' + 2) - 5(y' - 3) + 3 = 0$ hay $3x' - 5y' + 24 = 0$.
Vậy phương trình của d' là: $3x - 5y + 24 = 0$.

c) Thay vào phương trình (C) ta được:
$$(x' + 2)^2 + (y' - 3)^2 - 2(x' + 2) + 4(y' - 3) - 1 = 0$$
hay $x'^2 + y'^2 + 2x' - 2y' - 4 = 0$.
Vậy phương trình (C'): $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$.

**Ví dụ 9:** Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.



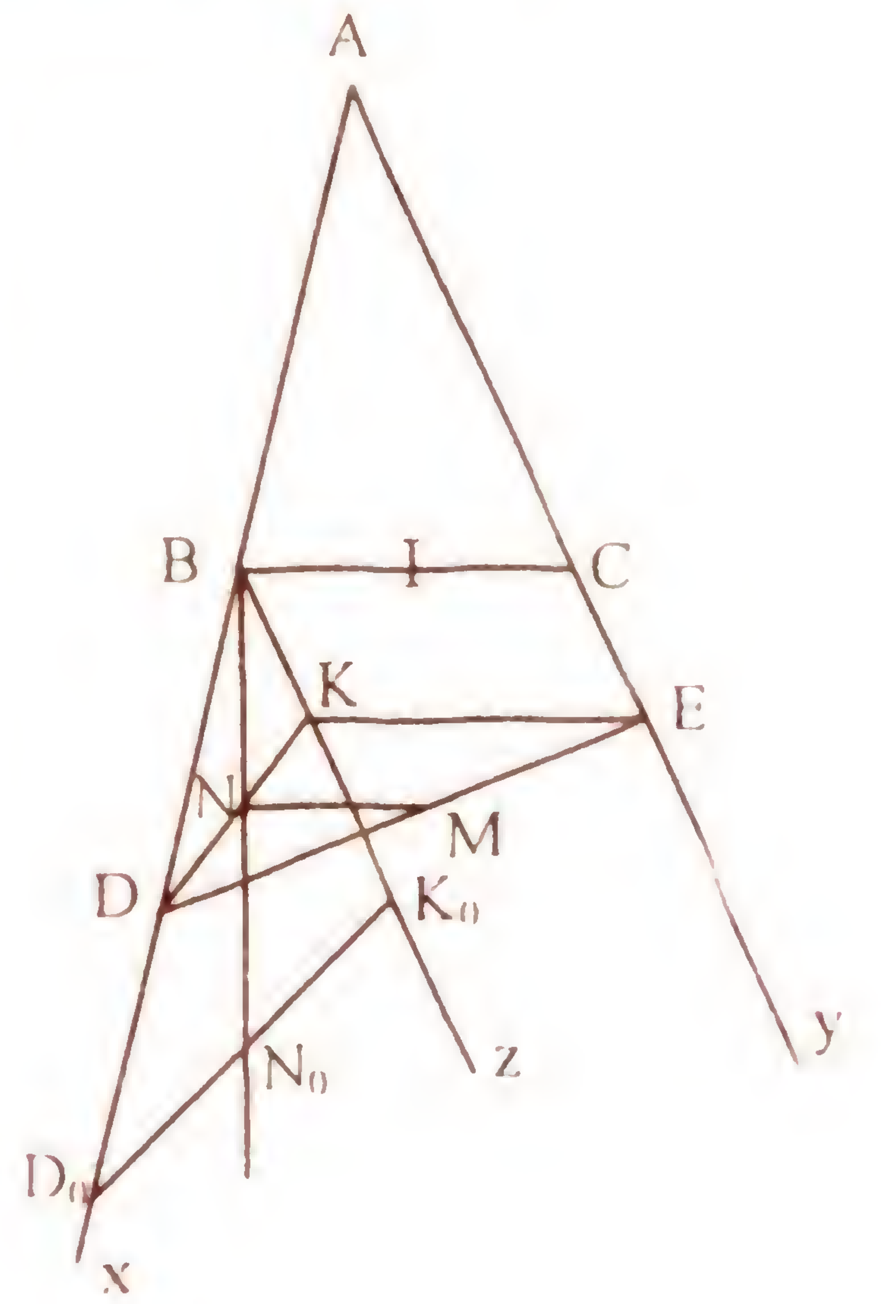

**Giải**

Ta có $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$: xác định nên phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ biến M thành M'. Nếu gọi O' là ảnh của O qua phép tịnh tiến T, tức là $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$ thì quỹ tích M' là đường tròn tâm O' có bán kính bằng bán kính đường tròn (O).

**Ví dụ 10**: Cho tam giác ABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là các tia đối của các tia BA, CA. Các điểm D, E thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy. Tìm quỹ tích các trung điểm M của DE biết BD = 2CE.

**Giải**

Vẽ hình bình hành BCEK, ta có K ở trên tia Bz cố định song song cùng chiều với tia Cy. Trên hai tia Bx, Bz lần lượt lấy hai điểm cố định $D_0$, $K_0$ saocho $BD_0 = 2BK_0$.
Vì BD = 2CE = 2BK nên DK // $D_0K_0$.
Gọi N và $N_0$ tương ứng là trung điểm của DK và $D_0K_0$. Ta có $N_0$ cố định và quỹ tích của N là tia $BN_0$.



Gọi I là trung điểm của BC: $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$ nên $T_{\overrightarrow{BI}}$ biến N thành M.

Vậy quỹ tích của M là tia Im là ảnh của tia $BN_0$ qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BI}}$ theo vectơ $\overrightarrow{BI}$

**Ví dụ 11**: Trên đường tròn (O; R) cho hai điểm A, B cố định và điểm M lưu động. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB. Tìm tập hợp:

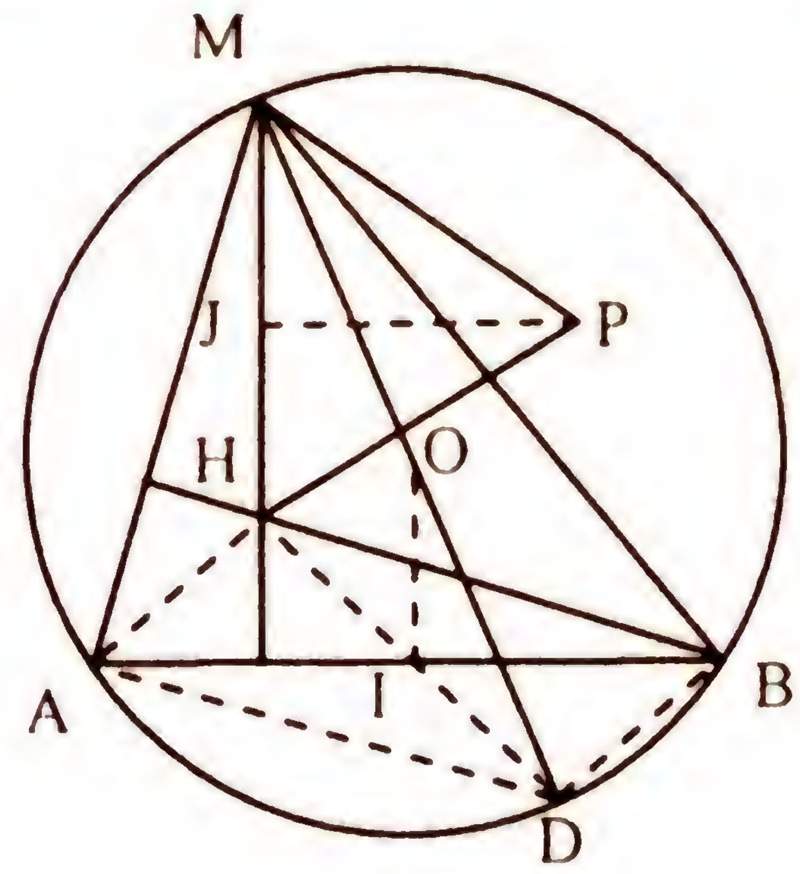
a) Điểm H

b) Điểm P sao cho tam giác MHP đều.

**Giải**

a) Gọi I là trung điểm của AB và D là điểm đối xứng của M qua O.

Tứ giác AHBD là hình bình hành nên hai đường chéo AB và HD giao nhau tại trung điểm I.




Do đó: $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OI}$: xác định.

Vậy tập hợp điểm H là đường tròn (O'), bán kính R với $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OI}$

Cách khác: Vẽ đường kính AE thì $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{EB}$.

b) Gọi J là trung điểm của MH ta có: $\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{OI}$.

Do đó J chạy trên đường tròn (C) tâm I bán kính R là hình tịnh tiến của đường tròn (O) bởi phép tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$.

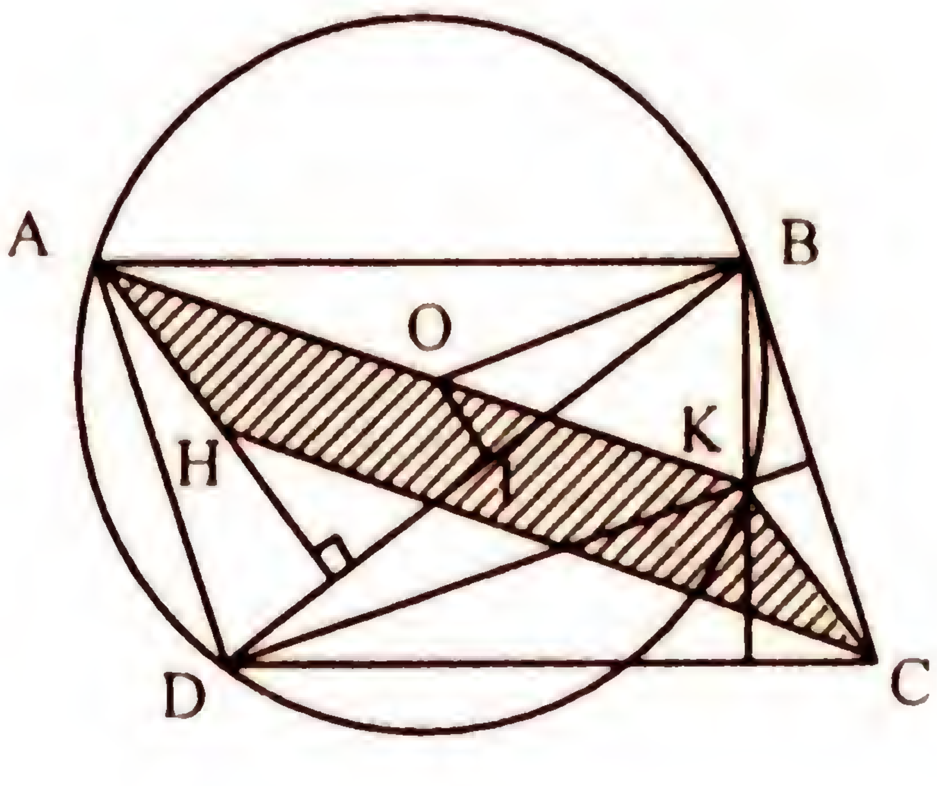
Vì $JP = \frac{MH\sqrt{3}}{2} = OI\sqrt{3}$ không đổi và $JP \perp MH$ nên JP // AB.

Do đó $\overrightarrow{JP} = \vec{v}$ xác định. Vậy tập hợp điểm P là đường tròn tịnh tiến của đường tròn (C) bởi phép tịnh tiến $\vec{v}$.

**Ví dụ 12**: Cho hình bình hành ABCD có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng 2a, còn A, B, D nằm trên một đường tròn cố định tâm O, bán kính R. Tìm quỹ tích đỉnh C.

**Giải**

AO kéo dài cắt đường tròn ở K, nên K cố định. Gọi H là trực tâm tam giác ABD, I là trung điểm của BD. Từ đó suy ra:




$AH = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$ : không đổi nên suy ra H nằm trên đường tròn tâm A, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Do $\widehat{ABK} = \widehat{ADK} = 90^\circ$, mà AB // DC, AD // BC

$\Rightarrow BK \perp DC$ và $DK \perp BC$ nên K là trực tâm tam giác BDC

$\Rightarrow CK \perp DB \Rightarrow CK // AH$.

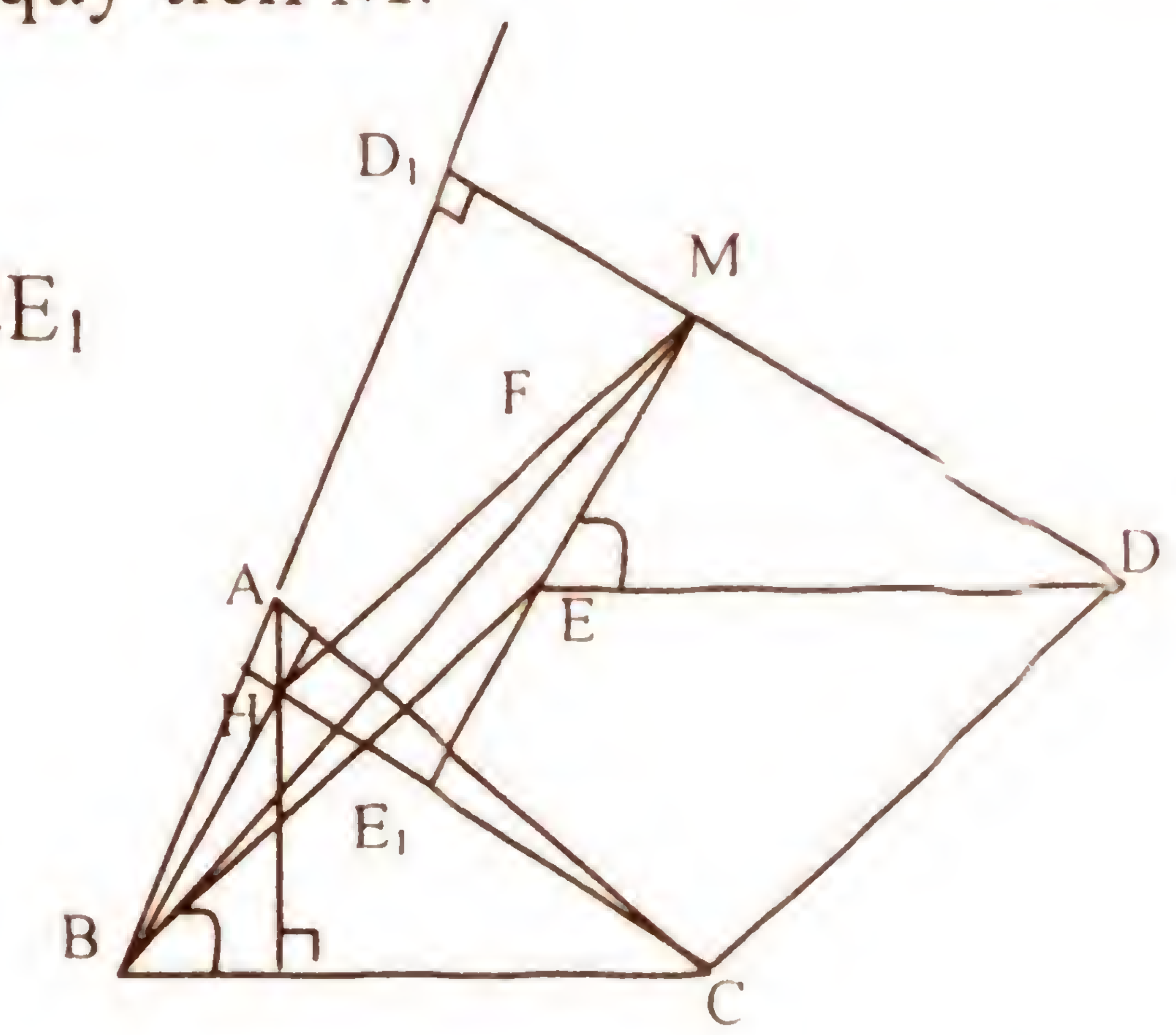
Trong tam giác ACK, do OI là đường trung bình, nên KC = 2OI ⇒ KC = AH ⇒ AHCK là hình bình hành

⇒ $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AK}$ : xác định. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AK}$ biến H thành C, biến A thành K.

Vậy quỹ tích của C là đường tròn tâm K, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$ .

**Ví dụ 13**: Cho tam giác ABC cố định. Vẽ hình thoi BCDE mà E, D, A cùng phía đối với đường thẳng BC. Hạ $DD_1 \perp AB$, và $EE_1 \perp AC$. Các đường thẳng $DD_1$ và $EE_1$ cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích M.

**Giải**




Gọi H là trực tâm tam giác ABC

⇒ H cố định.Ta có: HC // $DD_1$; HB// $EE_1$ (vì cũng vuông góc AC).

⇒ $\widehat{MED} = \widehat{HBC}$ và $\widehat{MDE} = \widehat{HCB}$

(góc có cạnh tương ứng song song)

⇒ ΔMDE = ΔHCB (g.c.g)

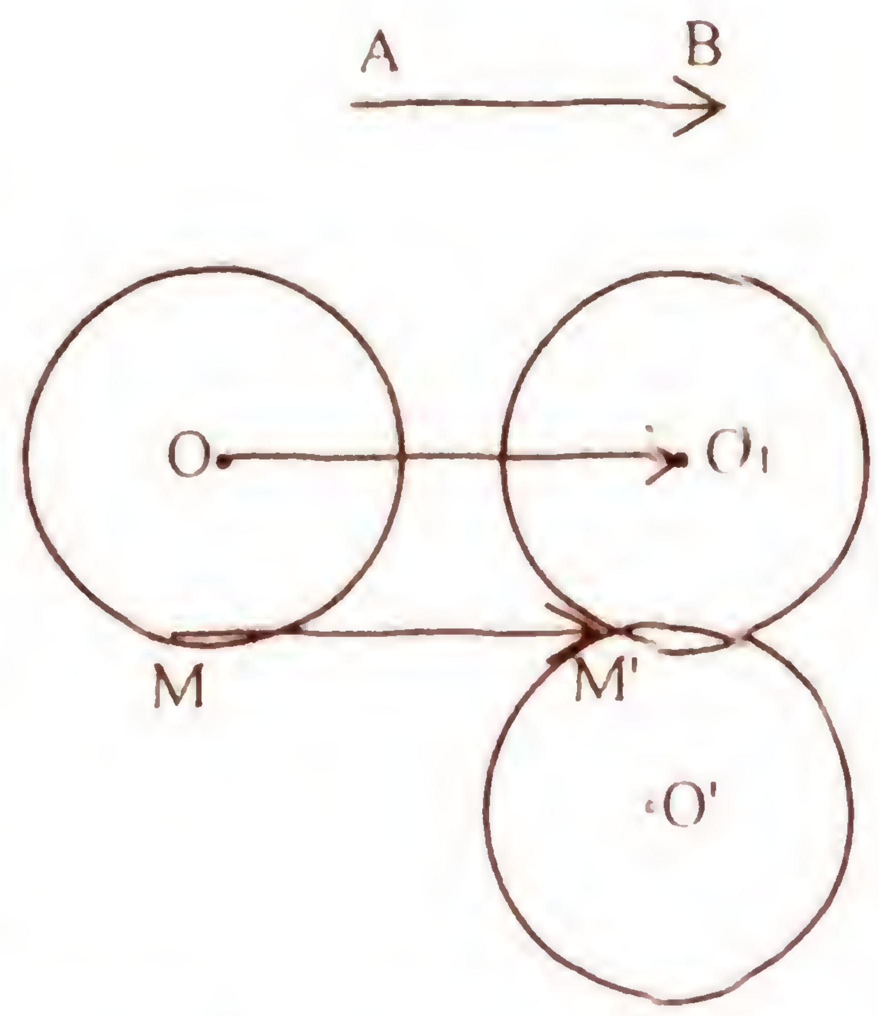
⇒ CH = MD. Mà CH // MD nên

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CH}$ : xác định.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CH}$ biến D thành M và biến C thành H. Mà CD = BC không đổi nên D thuộc đường tròn (C; BC) nên quỹ tích các điểm M là đường tròn ảnh qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{CH}$, chính là đường tròn (H; BC).

**Ví dụ 14**: Cho hai đường tròn (O) và (O') và hai điểm A, B. Tìm điểm M trên (O) và điểm M' trên (O') sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ .

**Giải**



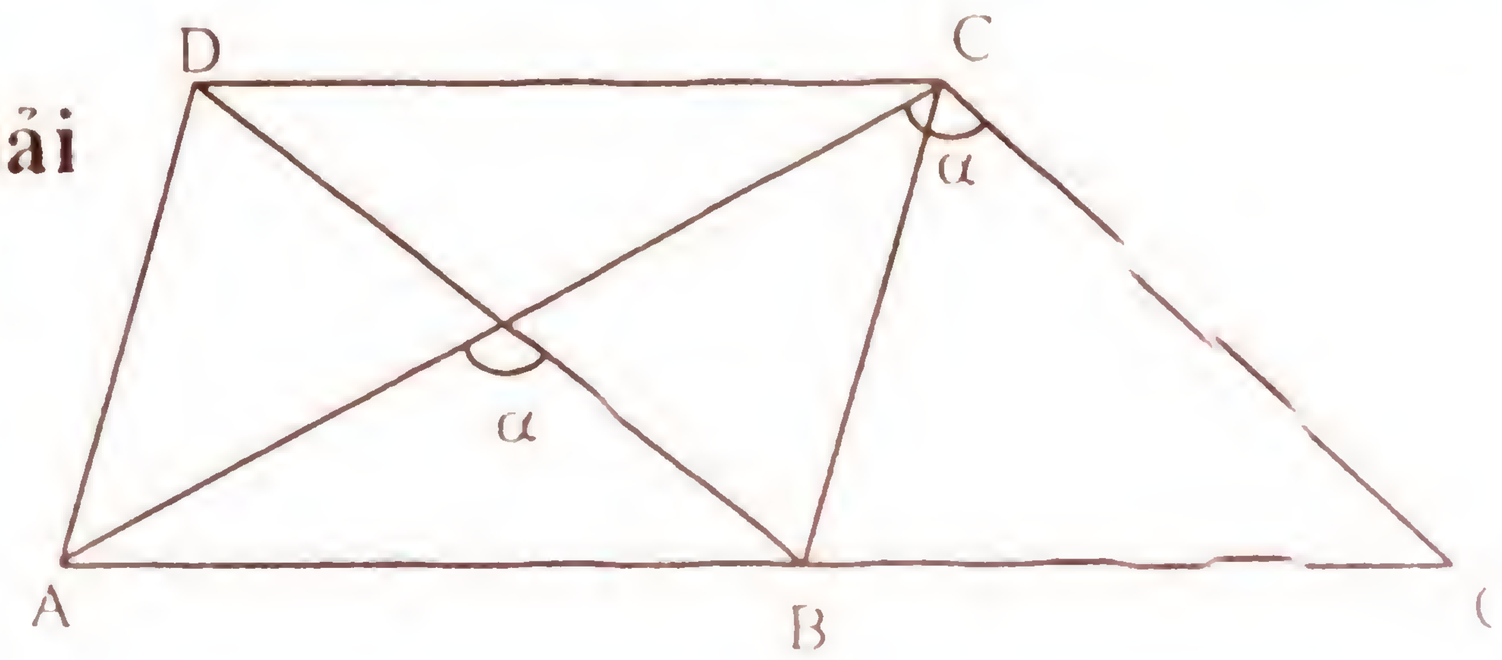

Ta có $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ : xác định nên phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$ biến M thành M'.

Gọi $(O_1)$ là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$, thì M' là giao điểm của $(O_1)$ và (O'), còn M là điểm có ảnh là M' thì cặp điểm M, M' là cần tìm.

Bài toán có số nghiệm hình bằng số giao điểm của hai đường tròn $(O_1)$ và (O').

**Ví dụ 15**: Dựng hình bình hành cho biết hai cạnh liên tiếp và góc tạo bởi hai đường chéo.

**Giải**




– Phân tích: Giả sử ABCD là hình bình hành đã dựng được có AB = a, BC = b và (AC, BD) = α.

Gọi C' là ảnh của B qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Trong tam giác ACC' ta biết $AC' = 2a$, $BC = b$ là trung tuyến kẻ từ C và $\widehat{ACC'} = \alpha$.

– Dựng hình: Dựng $AC' = 2a$, trung điểm B của AC', cung chứa góc α trên dây AC', cung tròn tâm B, bán kính b. Gọi C là điểm chung của hai cung tròn đã dựng. Dựng D là ảnh của C qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.

– Chứng minh: Theo cách dựng thì ABCD là hình bình hành thoả mãn đề bài.

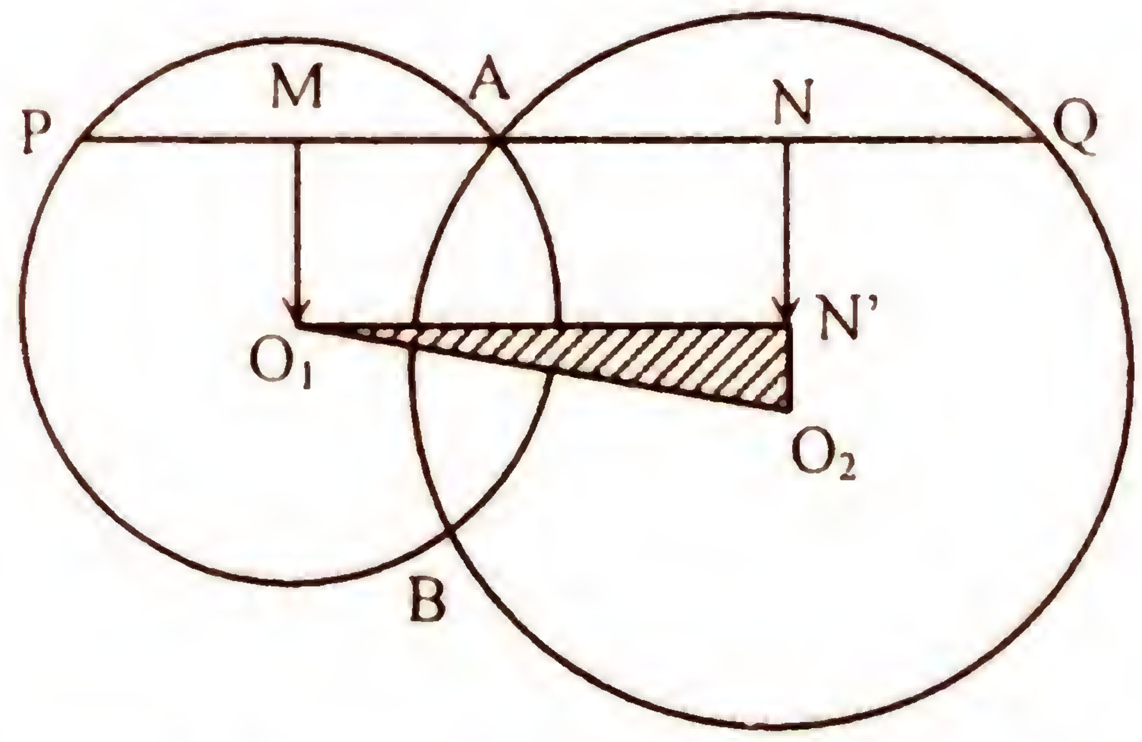
– Biện luận: Bài toán có số nghiệm là số điểm chung của hai cung tròn.

**Ví dụ 16**: Cho hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ cắt nhau tại A và B. Dựng qua A đường thẳng Δ sao cho đoạn thẳng của đường thẳng đó nằm trong hai đường tròn có độ dài 2m cho trước.

**Giải**

Giả sử đã dựng được dây cung PQ qua A, sao cho $P \in (C_1)$, $Q \in (C_2)$ và $PQ = 2m$. Hạ $O_1M$ và $O_2N \perp PQ$, phép tịnh tiến $\overrightarrow{MO_1}$ biến N thành N'.

Do có $O_1N' = MN = \frac{1}{2}PQ = m$

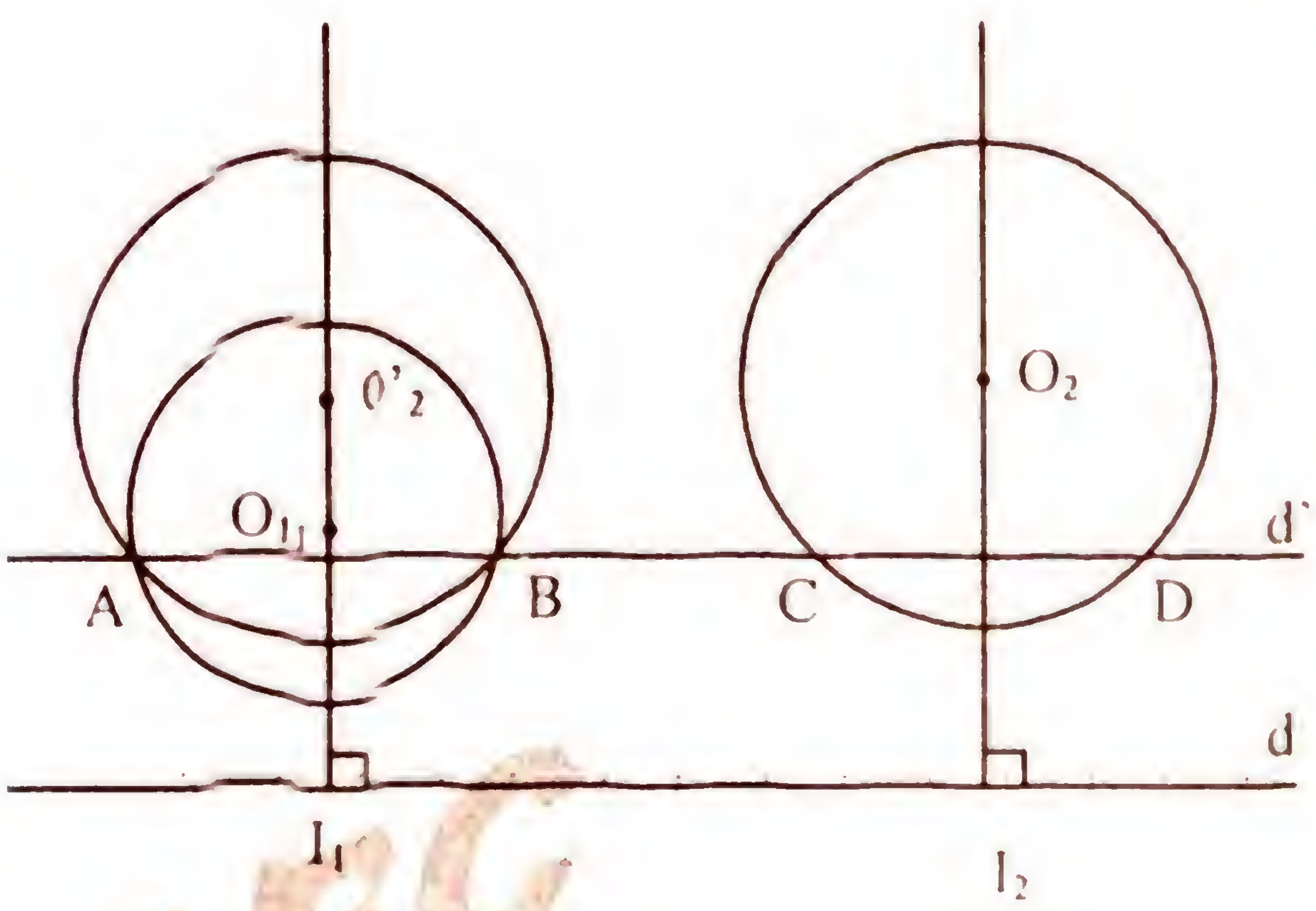



Điểm N' là đỉnh thứ ba của tam giác vuông $O_1O_2N'$ có cạnh huyền $O_1O_2$ và cạnh góc vuông $O_2N = \sqrt{O_1O_2^2 - m^2}$. Từ đó suy ra cách dựng như sau:

– Dựng tam giác vuông $N'O_1O_2$, biết cạnh huyền $O_1O_2$ và cạnh góc vuông bằng $\sqrt{O_1O_2^2 - m^2}$.

– Qua A kẻ dây cung vuông góc với $O_2N'$, đó chính là dây cung PQ cần dựng. Bài toán dựng được nếu như: $O_1O_2 \geq m$.

**Ví dụ 17**: Cho hai đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$ và một đường thẳng d. Dựng một đường thẳng d' // d sao cho d' cắt $(O_1)$ và $(O_2)$ theo hai dây cung bằng nhau.




**Giải**

Giả sử đã dựng được đường thẳng d' song song với d, cắt $(O_1)$ tại A, B và cắt $(O_2)$ tại C, D thoả mãn: AB = CD.

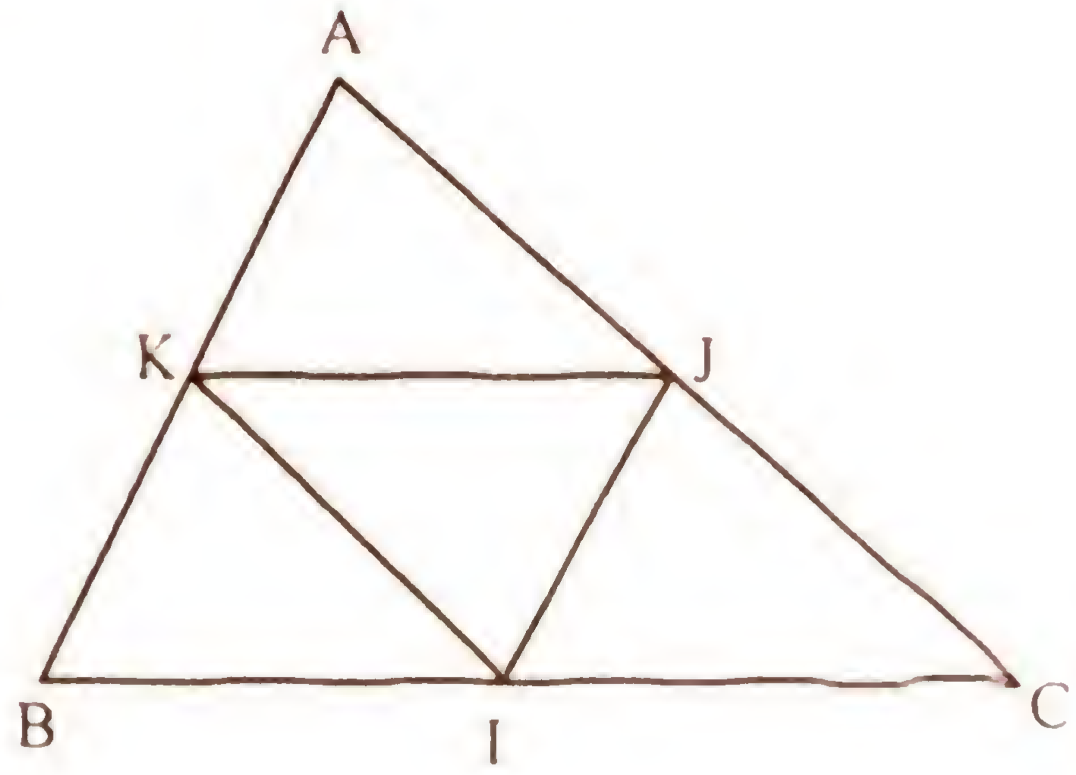
Gọi $I_1$ và $I_2$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $O_1O_2$ trên d. Gọi $(O'_2)$ là ảnh của $(O_2)$ qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{I_2I_1}}$.

Do $AB = CD \Rightarrow AC = BD = I_1I_2$ nên phép tịnh tiến đó biến C thành A, D thành B, do đó $(O'_2)$ cắt $(O_1)$ tại A và B. Từ đó suy ra cách dựng.

Dựng $(O'_2)$ là ảnh của $(O_2)$ qua $T_{\overrightarrow{I_2I_1}}$. Gọi A, B là các giao điểm của $(O'_2)$ và $(O_1)$ thì đường thẳng d' đi qua A, B sẽ là đường thẳng cần dựng.

**Ví dụ 18:** Cho ba điểm không thẳng hàng I, J, K. Hãy dựng tam giác ABC nhận I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

**Giải**

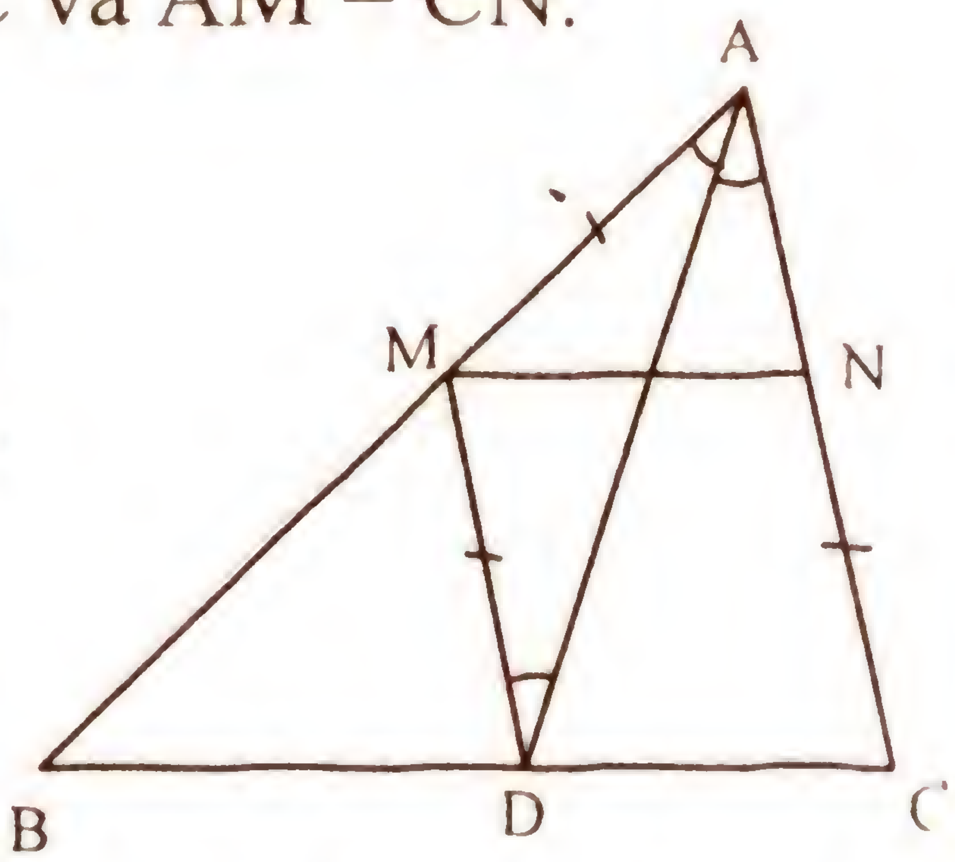



Giả sử tam giác ABC dựng được nhận I, J, K là trung điểm của BC, CA, AB thì KIJA là hình bình hành nên $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{IJ}$. Suy ra cách dựng: Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{IJ}$ biến K thành A, lấy đối xứng A qua K thì được điểm B, lấy đối xứng B qua I thì được điểm C.

Tam giác ABC là tam giác cần dựng. Bài toán có một nghiệm duy nhất.

**Ví dụ 19**: Cho tam giác ABC. Tìm một điểm M trên cạnh AB và một điểm N trên cạnh AC sao cho MN song song với BC và AM = CN.

**Giải**




Giả sử đã dựng được hai điểm M, N thoả mãn điều kiện đầu bài. Đường thẳng qua M và song song với AC cắt BC tại D thì tứ giác MNCD là hình bình hành.

Do đó CN = DM nên tam giác AMD cân tại M.

Ta có $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = \widehat{DAC}$ nên AD là phân giác trong của góc A và $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD}$ nên M là ảnh của N qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CD}$.

Từ đó suy ra cách dựng:

– Dựng đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D.

– Dựng đường thẳng d là ảnh của đường thẳng AC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CD}$, d cắt AB tại M.

– Dựng N sao cho $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD}$, thì M, N là hai điểm cần dựng.

**Ví dụ 20:** Cho AB và CD là hai dây không cắt nhau của đường tròn (O). Với một điểm M nằm trên đường tròn, gọi E và F theo thứ tự là giao điểm của MA và MB với CD. Xác định điểm M để $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$, $\vec{a}$ cho trước.

**Giải**

Ta có $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$ xác định.

Giả sử đã dựng được điểm M. Gọi $A' = T_{\vec{a}}(A)$ thì MA // FA'

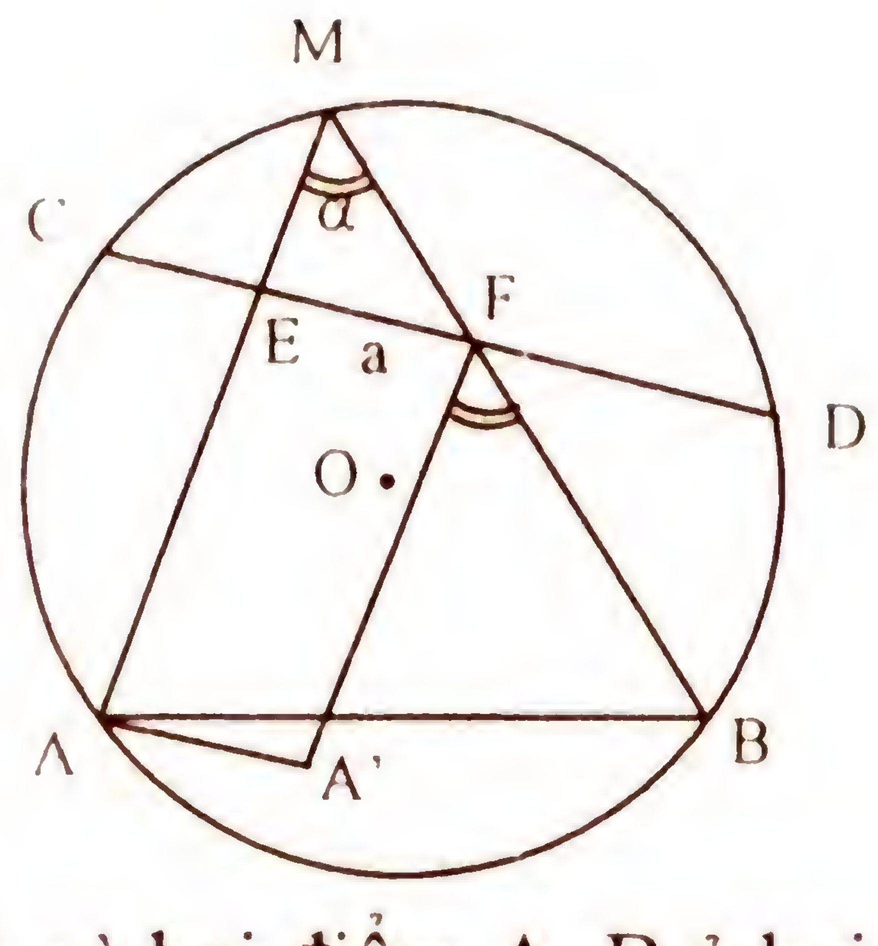
nên $\widehat{A'FB} = \widehat{AMB} = \alpha$: không đổi.

Do đó, F là giao điểm của CD với cung chứa góc α nhìn bởi đoạn A'B. Từ đó suy ra cách dựng.

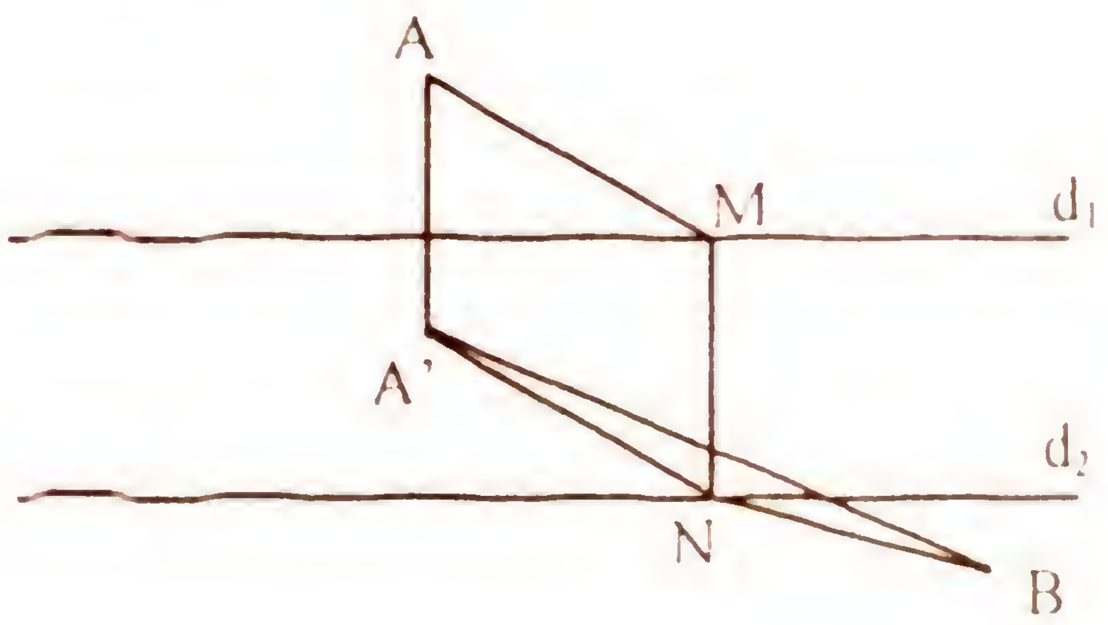
– Dựng ảnh của A qua $T_{\vec{a}}$ là A'.

– Dựng cung chứa góc α trên dây A'B.

– Dựng giao điểm F của CD với cung đó, thì M là giao điểm của BF với (O).




**Ví dụ 21**: Cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$ và hai điểm A, B ở hai phía của dải ($d_1$, $d_2$). Tìm M ∈ $d_1$, N ∈ $d_2$ sao cho MN ⊥ $d_1$ và AM + MN + NB là ngắn nhất.




**Giải**

Giả sử M ∈ $d_1$, N ∈ $d_2$ sao cho MN ⊥ $d_1$ ta có $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$ : xác định, phép tịnh tiến vectơ $\vec{a}$ biến M thành N, biến A thành A' do đó AM = A'N nên :

$$AM + MN + NB = |\vec{a}| + A'N + NB \geq |\vec{a}| + A'B.$$

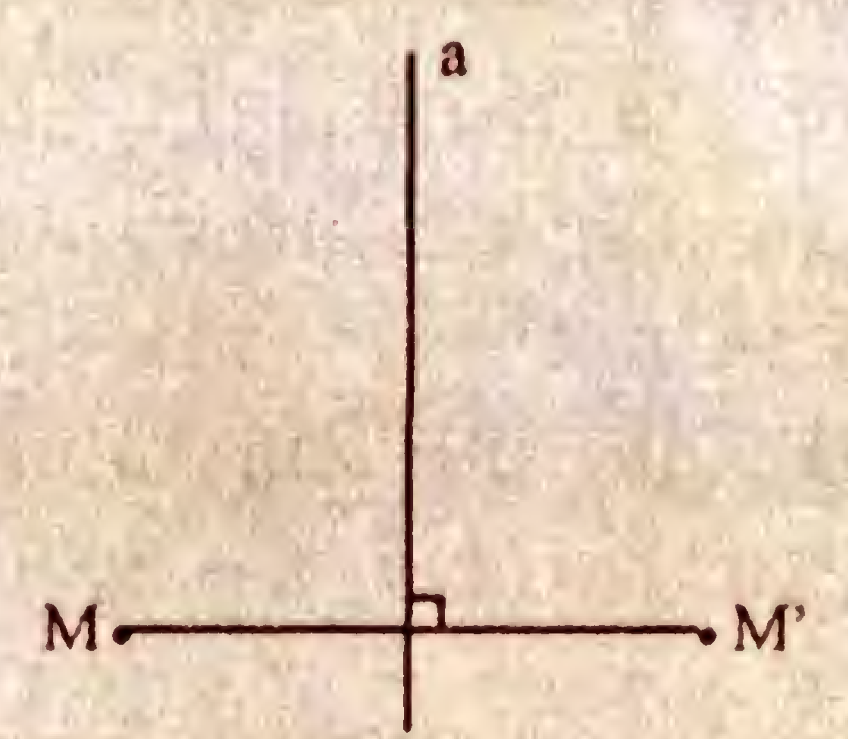
Dấu = xảy ra khi N là giao điểm của A'B với $d_2$, hạ NM ⊥ $d_1$ thì M, N là 2 điểm cần dựng.

## DẠNG 3: PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

– Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua a.

Phép đối xứng qua đường đường thẳng a thường được kí hiệu là $Đ_a$. Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi là phép đối xứng trục.

Đường thẳng a gọi là trục của phép đối xứng, hay là trục đối xứng.




– Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến (H) thành chính nó, tức là $Đ_d$((H)) = (H).

Chú ý:

– Phép đối xứng qua trục hoành biến M(x; y) thành M'(x; –y)

– Phép đối xứng qua trục tung biến M(x; y) thành M'(–x; y)

– Ứng dụng phép đối xứng trục để chứng minh hình học, giải bài toán dựng hình, xác định điểm, tìm tập hợp điểm (quỹ tích), ... khi có yếu tố liên quan đến trung trực là đường thẳng xác định, cố định.

**Ví dụ 1**: Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a) Khi nào thì d song song với d'?

b) Khi nào thì d trùng với d'?

c) Khi nào thì d cắt d'? Giao điểm của d và d' có tính chất gì?

d) Khi nào d vuông góc với d'?

**Giải**

Dựa vào định nghĩa và cách xác định ảnh ta có kết quả:

a) Khi đường thẳng d // đường thẳng a.

b) Khi d vuông góc với a hoặc d trùng với a.

c) Khi d cắt a nhưng không vuông góc với a. Khi đó giao điểm của d và d' nằm trên đường thẳng a.

d) Khi góc giữa d và a bằng $45^o$.

**Ví dụ 2**: Trong mặt phẳng Oxy, qua phép đối xứng trục Oy, tìm ảnh của điểm, đường thẳng, đường tròn sau:

a) Điểm $A(2; -3)$

b) Đường thẳng d: $3x - 2y + 1 = 0$

c) Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$.

**Giải**

Ảnh của điểm $M(x; y)$ qua phép đối xứng có trục Oy là điểm M' có tọa độ $(-x; y)$.

a) $A(2; -3)$ thành $A'(-2; -3)$.

b) Ta có $x' = -x$, $y' = y$ nên $x = -x'$, $y = y'$.

Thế vào d thành: $-3x' - 2y' + 1 = 0$ hay $3x' + 2y' - 1 = 0$

Vậy d': $3x + 2y - 1 = 0$.

c) Tương tự, thế vào (C) thành:

$$(-x')^2 + y'^2 - 4(-x') + 5y' + 1 = 0 \text{ hay } x'^2 + y'^2 + 4x' + 5y' + 1 = 0$$

Vậy (C'): $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$.

**Ví dụ 3**: Tìm ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$ qua phép đối xứng trục d: $x - 2y + 4 = 0$.

**Giải**

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 5)$ và bán kính $R = \sqrt{1 + 25 - 1} = 5$

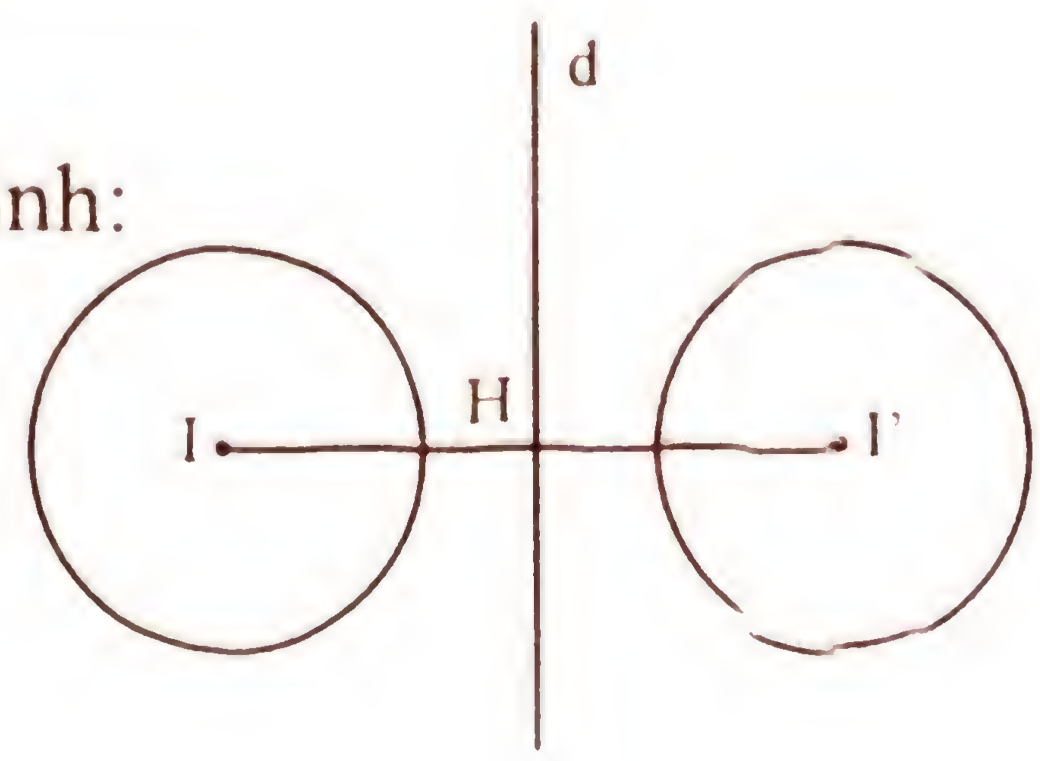
Ta tìm hình chiếu H của I lên d và tìm điểm I' đối xứng của I qua d.

Đường thẳng qua I vuông góc với d có phương trình:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Hình chiếu H có toạ độ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$




Điểm $H(2; 3) \Rightarrow I'(3; 1)$

Vì R' = R nên (C'): $(x-3)^2+(y-1)^2=25$.

**Ví dụ 4**: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình: $x-5y+7=0$ và đường thẳng d' có phương trình $5x-y-13=0$. Tìm phép đối xứng qua trục biến d thành d'.

**Giải**

Ta có d và d' cắt nhau. Do đó trục đối xứng Δ của phép đối xứng biến d thành d' chính là các đường phân giác của góc tạo bởi d và d'.

$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow d(M; d) = d(M, d')$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x-5y+7|}{\sqrt{1+25}} = \dfrac{|5x-y-13|}{\sqrt{25+1}}$

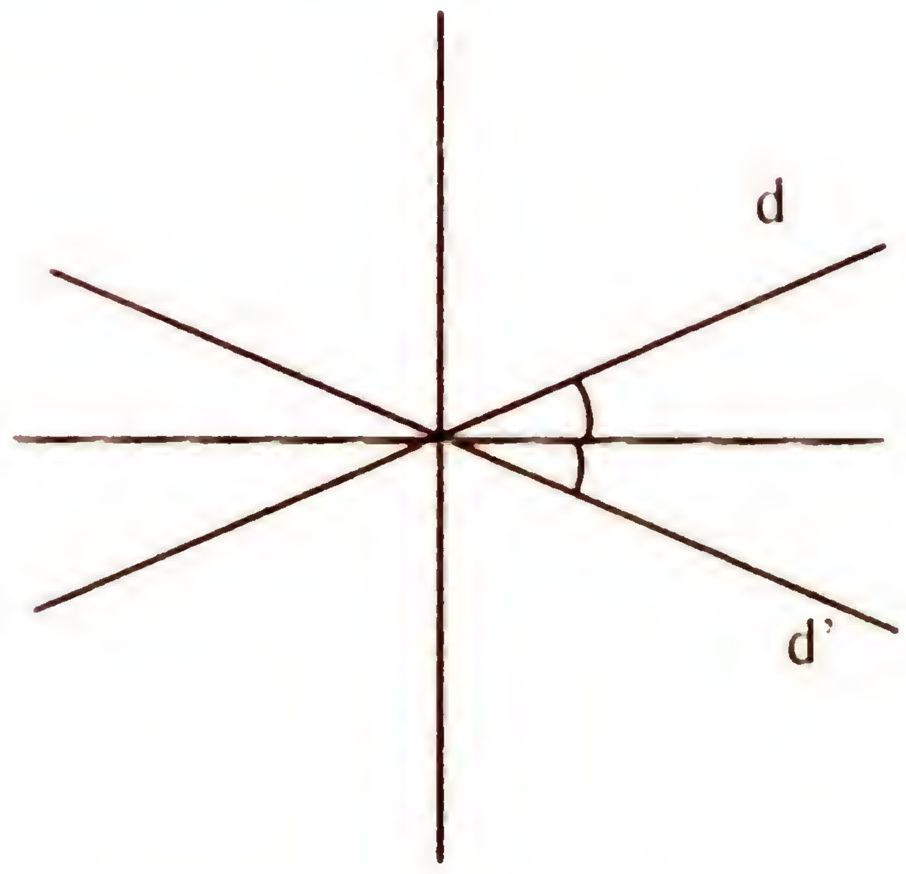
$\Leftrightarrow x-5y+7 = \pm(5x-y-13)$

$\Leftrightarrow x+y-5=0$ hay $x-y-1=0$

Vậy có hai phép đối xứng qua các trục:

$\Delta_1$ có phương trình $x+y-5=0$,

$\Delta_2$ có phương trình $x-y-1=0$.




**Ví dụ 5:** Qua phép đối xứng trục $Đ_d$ những điểm nào biến thành chính nó? Những đường thẳng nào biến thành chính nó? Những đường tròn nào biến thành chính nó?

**Giải**

Qua phép đối xứng trục $Đ_d$, những điểm nằm trên d biến thành chính nó. Các đường thẳng vuông góc với d, và đường thẳng d đều biến thành chính nó. Các đường tròn có tâm nằm trên d đều biến thành chính nó.

**Ví dụ 6**: Tìm trục đối xứng của các hình sau đây: Tam giác cân, tam giác đều, hình thang cân, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông đường tròn, hình gồm hai đường tròn.

**Giải**

– Tam giác cân tại đỉnh A có một trục đối xứng là đường thẳng chứa đường cao AH.

– Tam giác đều có 3 trục đối xứng là ba đường thẳng chứa ba đường cao.

– Hình thang cân có một trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đáy.

– Hình chữ nhật có hai trục đối xứng là hai đường thẳng đi qua trung điểm hai cặp cạnh đối;

– Hình thoi có hai trục đối xứng chứa các đường chéo;

– Hình vuông có bốn trục đối xứng (vừa như hình chữ nhật vừa như hình thoi).

– Đường tròn có vô số trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm;

– Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau và không đồng tâm có một trục đối xứng là đường nối tâm. Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau và đồng tâm có vô số trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm chung.

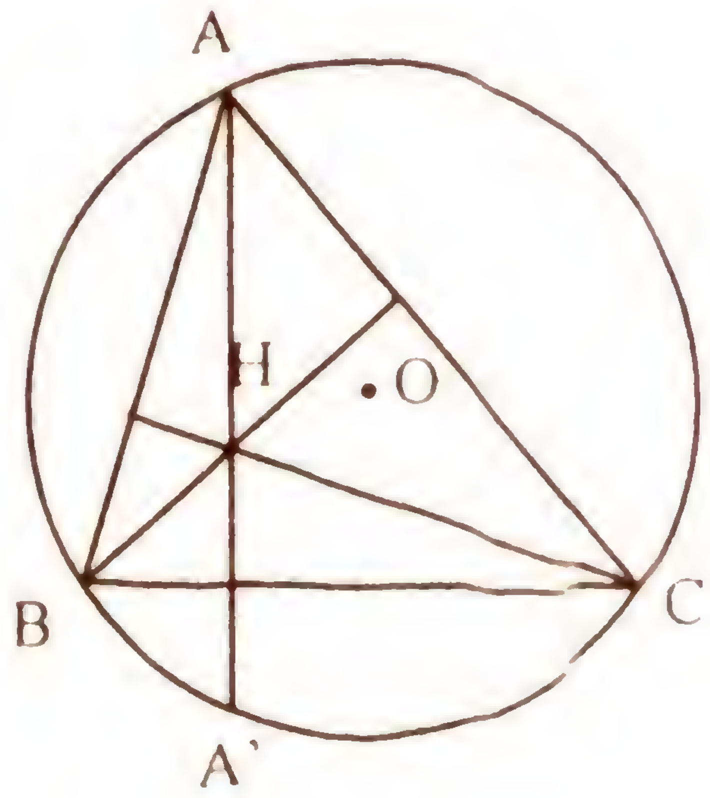
Hình gồm hai đường tròn bằng nhau không đồng tâm có hai trục đối xứng là đường nối tâm và đường trung trực của đoạn thẳng nối hai tâm.

**Ví dụ 7:** Cho tam giác ABC với trực tâm H

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB, HBC, HCA có bán kính bằng nhau.

b) Gọi $O_1$, $O_2$, $O_3$ là tâm các đường tròn nói trên. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm $O_1$, $O_2$, $O_3$ bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Giải**




a) Gọi A' là giao điểm của AH và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì A' và H đối xứng với nhau qua đường thẳng BC.

Vì vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là ảnh của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'BC cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, qua phép đối xứng $Đ_{BC}$.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có bán kính bằng bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh tương tự, đường tròn ngoại tiếp tam giác HAC và HAB cũng có bán kính bằng R.

b) Nếu gọi O là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $O_1$, $O_2$, $O_3$ lần lượt là các điểm đối xứng với O qua các đường thẳng AB, BC và CA. Và hai tam giác ABC và $O_1O_2O_3$ bằng nhau. Từ đó suy ra đường tròn đi qua ba điểm $O_1$, $O_2$, $O_3$ bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

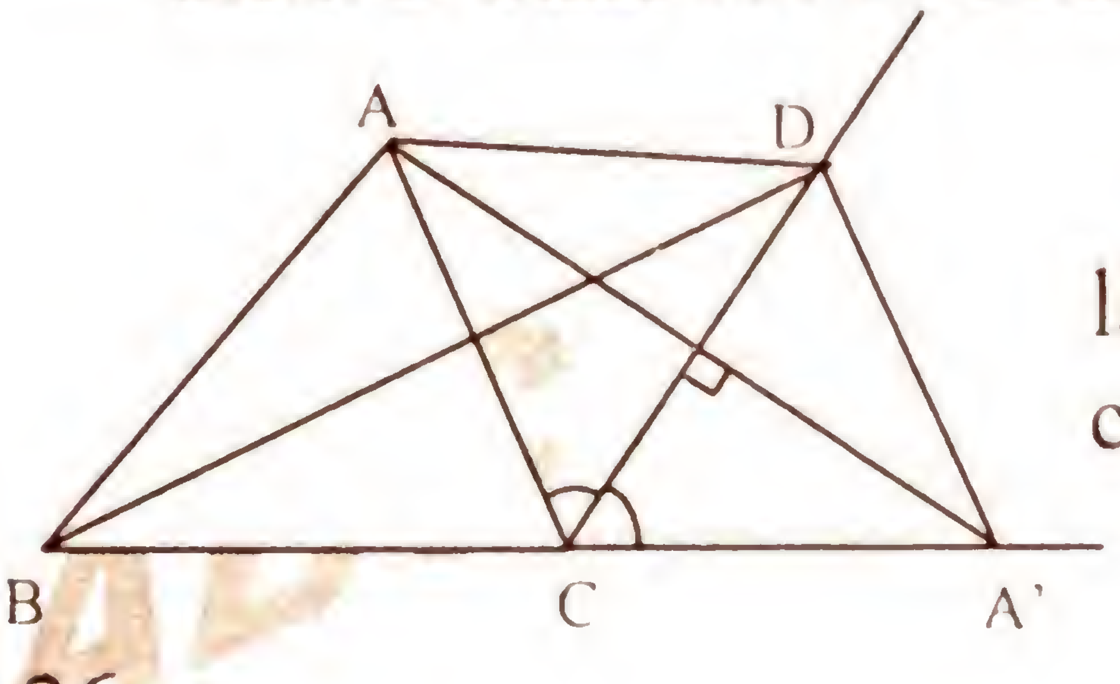
**Ví dụ 8**: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi $d_1$, $d_2$, $d_3$ lần lượt là các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, BC và CA. Với một điểm M bất kì, lấy $M_1$ đối xứng với M qua $d_1$, $M_2$ đối xứng với $M_1$ qua $d_2$ và $M_3$ đối xứng với $M_2$ qua $d_2$. Chứng minh rằng trung trực của đoạn thẳng $MM_3$ là một đường thẳng cố định.

**Giải**

Vì phép đối xứng qua đường thẳng không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên ta có $AM = BM_1 = CM_2 = AM_3$ và $OM = OM_1 = OM_2 = OM_3$. Do đó hai điểm A và O cách đều hai điểm M và $M_3$. Vậy trung trực của đoạn thẳng $MM_3$ chính là đường thẳng cố định OA.

**Ví dụ 9**: Cho tam giác ABC. Trên đường phân giác ngoài của góc C lấy một điểm D khác với C. Chứng minh rằng: DA + DB > CA + CB.

**Giải**




Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CD. Do CD là phân giác ngoài của góc C, nên A' thuộc tia đối của tia CB và A'C = AC

Ta có: DA + DB = DA' + DB > BA' (do $D \notin BA'$)

Mặt khác: BA' = CB + CA' = CB + CA

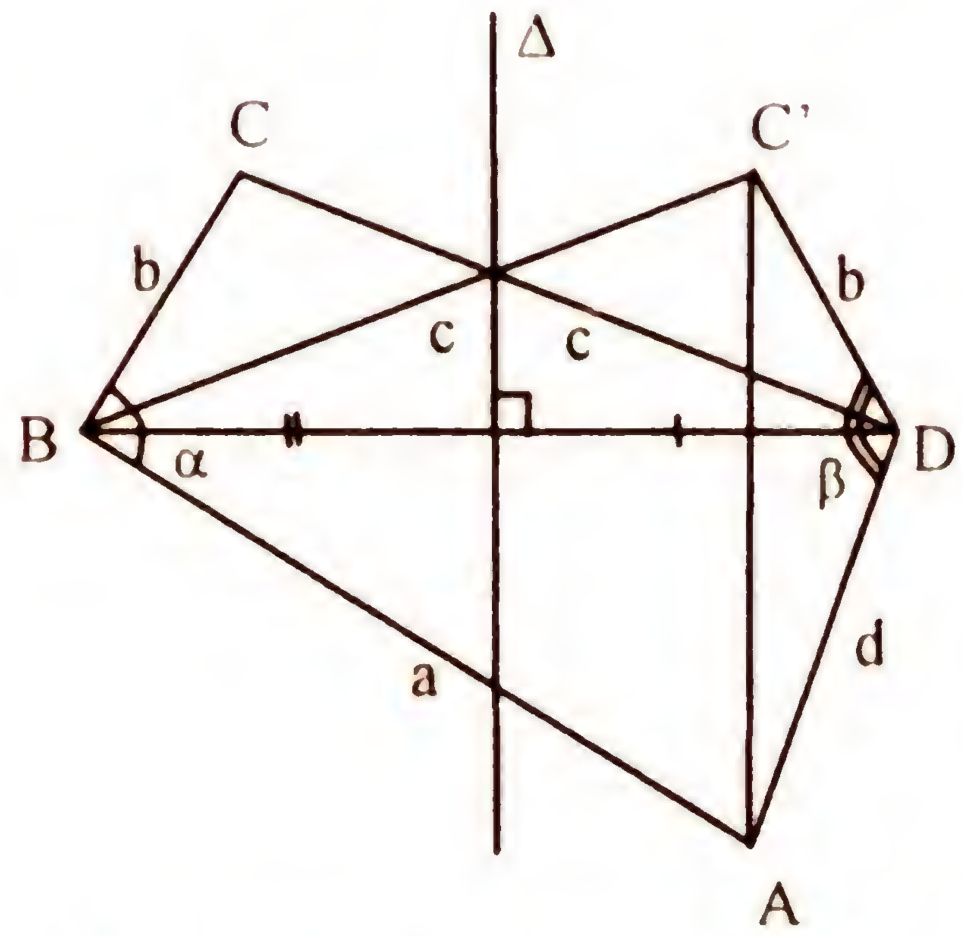
Do đó DA + DB > CA + CB.

**Ví dụ 10**: Cho tứ giác lồi ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh tứ giác có diện tích $S \le \dfrac{ac+bd}{2}$.

**Giải**

Ta dựng đường trung trực Δ của đường chéo BD và gọi C' là ảnh của C trong phép đối xứng qua Δ, khi đó ΔBC'D = ΔBCD, DC' = BC = b, BC' = DC = c.

Tứ giác lồi ABC'D có diện tích bằng S và các cạnh liên tiếp AB = a, BC' = c, C'D = b, DA = d.

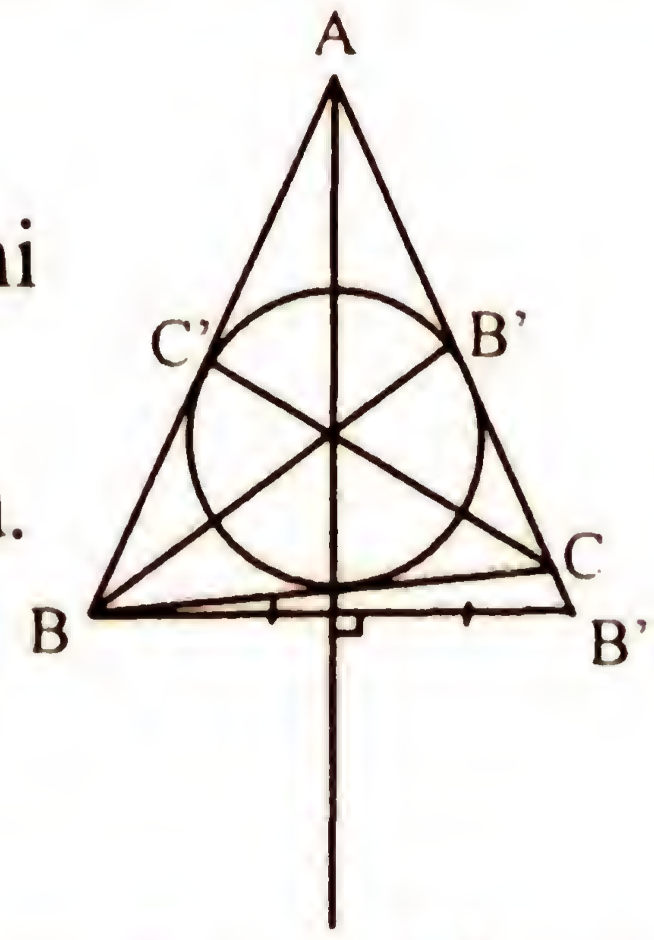



$$S = S_{ABC'D} = S_{ABC'} + S_{ADC'}$$

$$= \frac{1}{2}.ac.\sin\alpha + \frac{1}{2}.bd.\sin\beta$$

$$\le \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}bd = \frac{ac+bd}{2}$$

**Ví dụ 11**: Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC tương ứng tại các điểm C' và B'. Chứng minh rằng nếu AC > AB thì CC' > BB'.



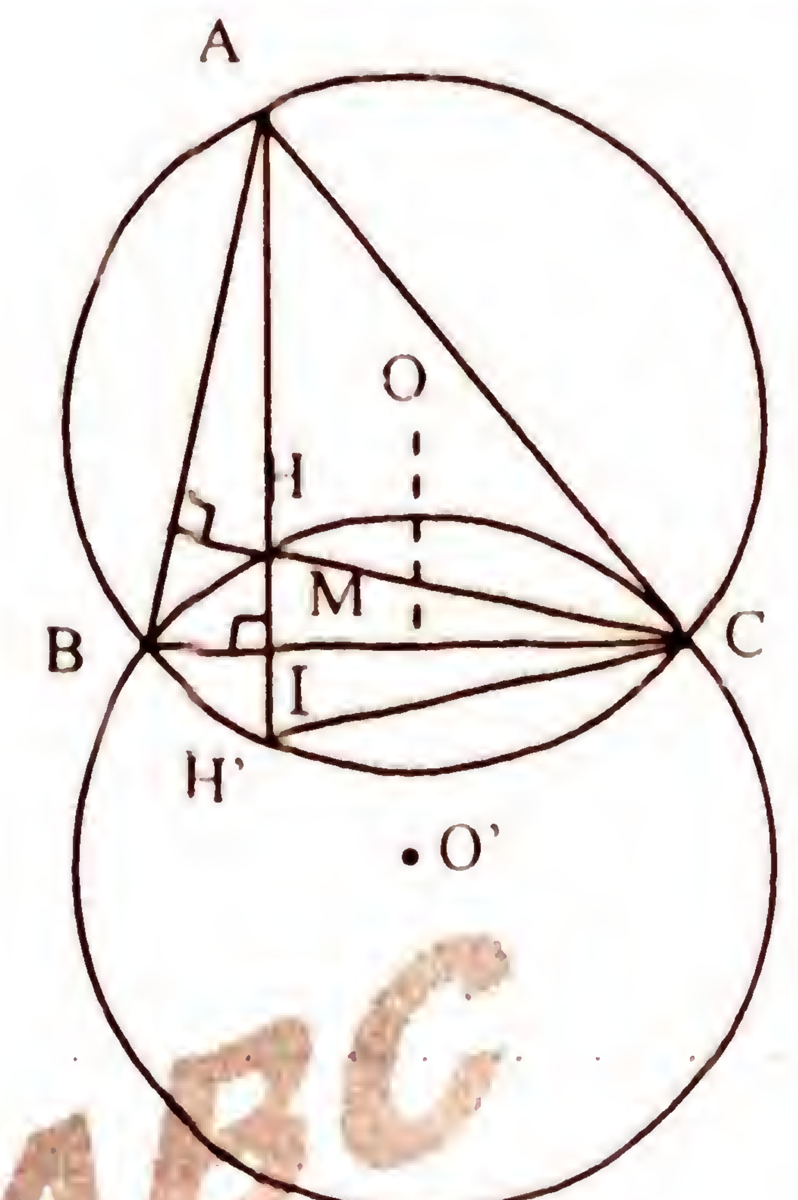

**Giải**

Gọi B" là điểm đối xứng của B qua phân giác góc A. Khi đó B" nằm trên cạnh AC và AB = AB".

Tam giác ABB" cân tại A, do đó $\widehat{AB''B}$ nhọn và $\widehat{BB''C}$ tù.

Mặt khác, tia B"C' nằm ngoài góc $\widehat{BB''C}$ nên $\widehat{C'B''C}$ là góc tù, đối diện với góc đó là cạnh CC'. Vì vậy CC' > B"C' hay CC' > BB'.

**Ví dụ 12**: Cho hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên đường tròn cố định.




**Giải**

Gọi I, H' theo thứ tự là giao điểm của tia AH với BC và đường tròn (O).

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$, $\widehat{BAH} = \widehat{BCH'}$ nên tam giác CHH' cân tại C, suy ra H và H' đối xứng với nhau qua đường thẳng BC. Khi A chạy trên đường tròn (O) thì H' cũng chạy trên đường tròn (O).

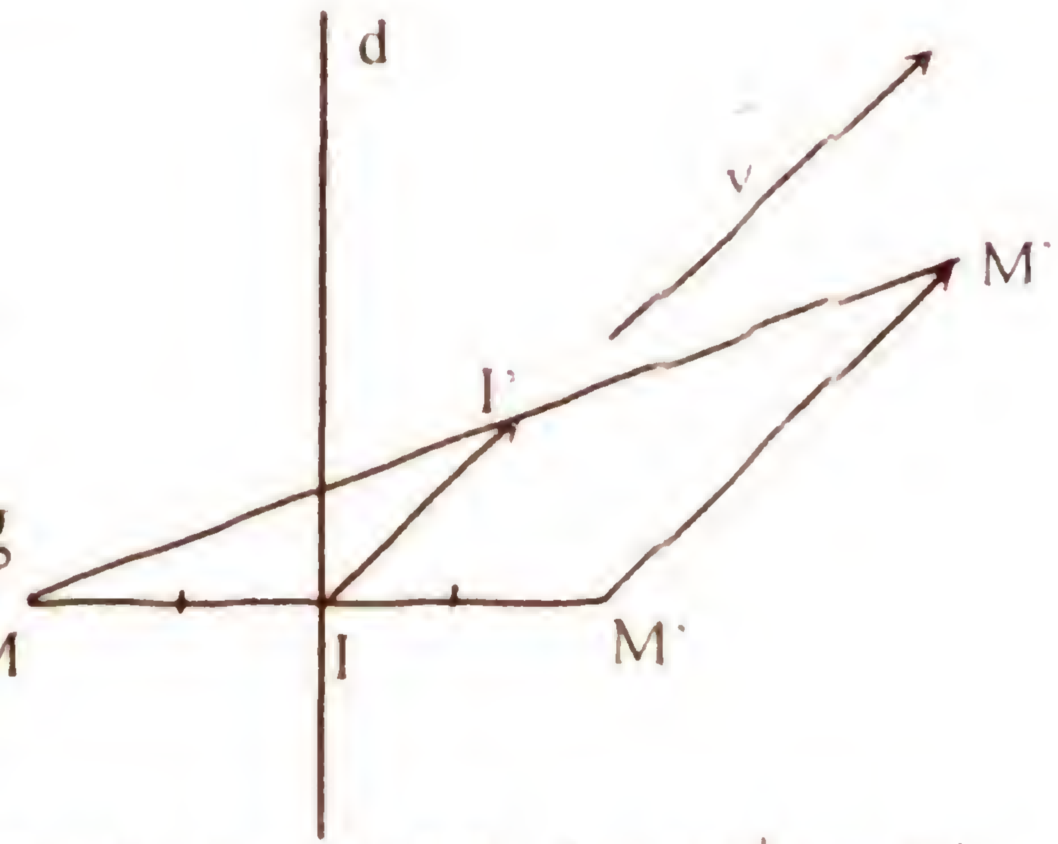
Vậy H chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng qua đường thẳng BC.

**Ví dụ 13**: Cho một đường thẳng d và một vectơ $\vec{v}$ cố định. Với mỗi điểm M bất kì, phép đối xứng trục $Đ_d$ biến M thành M', và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến M' thành M''. Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng MM''.

**Giải**

Gọi I là trung điểm MM', I' là trung điểm MM'' thì

$$\overrightarrow{II'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M''} = \frac{\vec{v}}{2}.$$

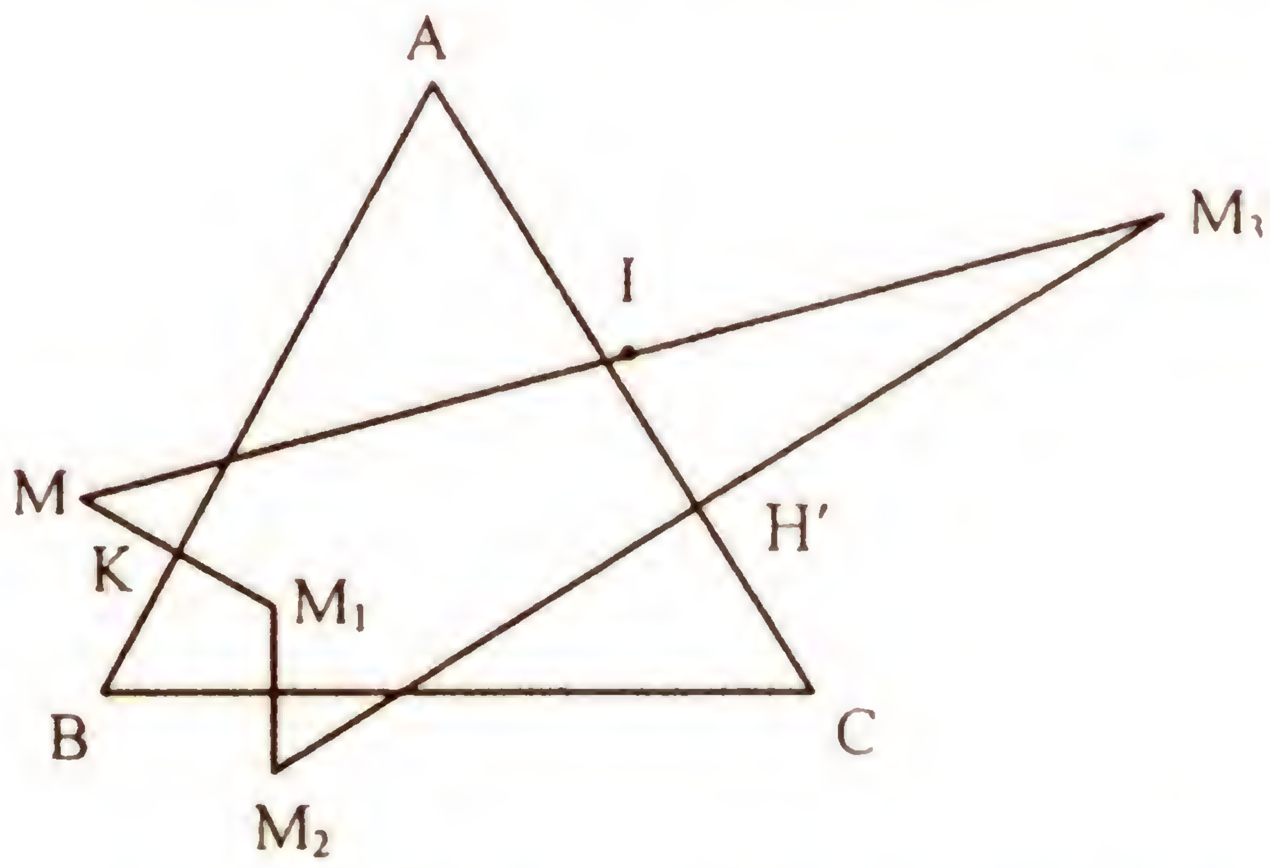



Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$ biến I thành I'.

Vì I nằm trên d nên quỹ tích I' là đường thẳng d', ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$.

**Ví dụ 14**: Cho tam giác đều ABC. Với một điểm M tuỳ ý gọi $M_1$ là điểm đối xứng với M qua đường thẳng AB, $M_2$ là điểm đối xứng với $M_1$ qua đường thẳng BC và $M_3$ là điểm đối xứng với $M_2$ qua đường thẳng CA. Tìm quỹ tích trung điểm I của $MM_3$.

**Giải**




Gọi M' là điểm đối xứng của M qua BC, K là trung điểm của $MM_1$ ($K \in AB$) và K' là trung điểm của $M'M_2$. Khi đó phép đối xứng qua đường thẳng BC sẽ biến M thành M', $M_1$ thành $M_2$ nên cũng biến K thành K' tức là biến BK thành BK'.

Suy ra góc hợp bởi BK' và BC cũng bằng $60^\circ$ hay BK' // AC. Vì $M'M_2 \perp BK'$, $M_2M_3 \perp AC$, suy ra ba điểm M', $M_2$, $M_3$ thẳng hàng. Nếu ta gọi H' là trung điểm $M_2M_3$ ($H' \in AC$) thì $\overrightarrow{M'M_3} = 2\overrightarrow{K'H'} = 2\overrightarrow{BH}$ với BH là đường cao của tam giác ABC.

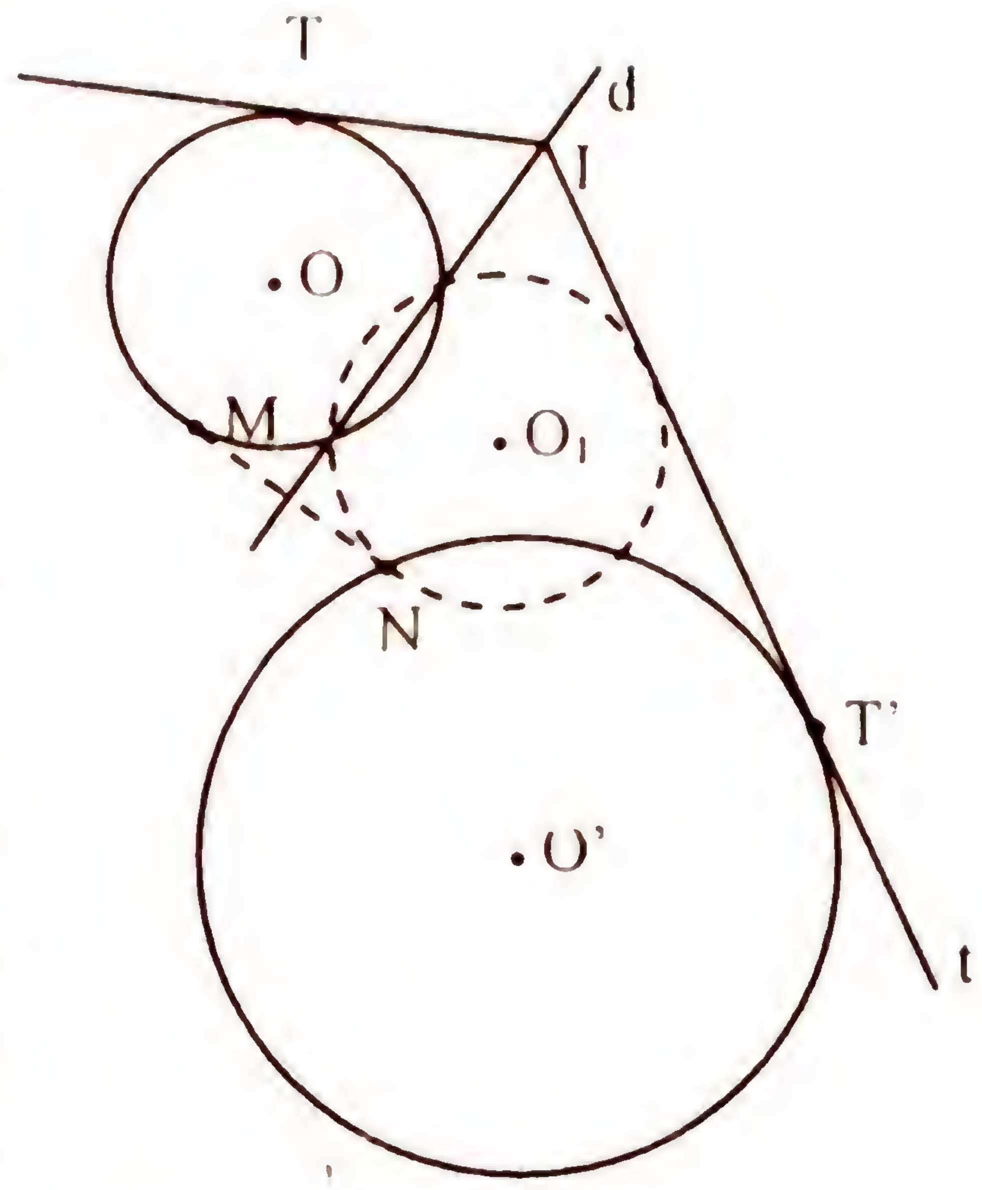
Nếu gọi P là trung điểm MM' ($P \in BC$) và I là trung điểm $MM_3$ thì $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M_3} = \overrightarrow{BH}$. Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BH}$ sẽ biến điểm P thành I, vì $P \in BC$ nên quỹ tích I chính là ảnh của đường thẳng BC qua phép tịnh tiến nói trên. Quỹ tích này là đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh AB và AC.

**Ví dụ 15:** Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R') và một đường thẳng d.

a) Tìm hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

b) Xác định điểm I trên d sao cho tiếp tuyến IT của (O; R) và tiếp tuyến IT' của (O'; R') hợp thành các góc mà d là một trong các đường phân giác của các góc đó.

**Giải**




a) Gọi $(O_1; R)$ là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$. Giao điểm (nếu có) của hai đường tròn $(O_1; R)$ và $(O'; R)$ chính là điểm N cần tìm, điểm M là điểm đối xứng với N qua d.

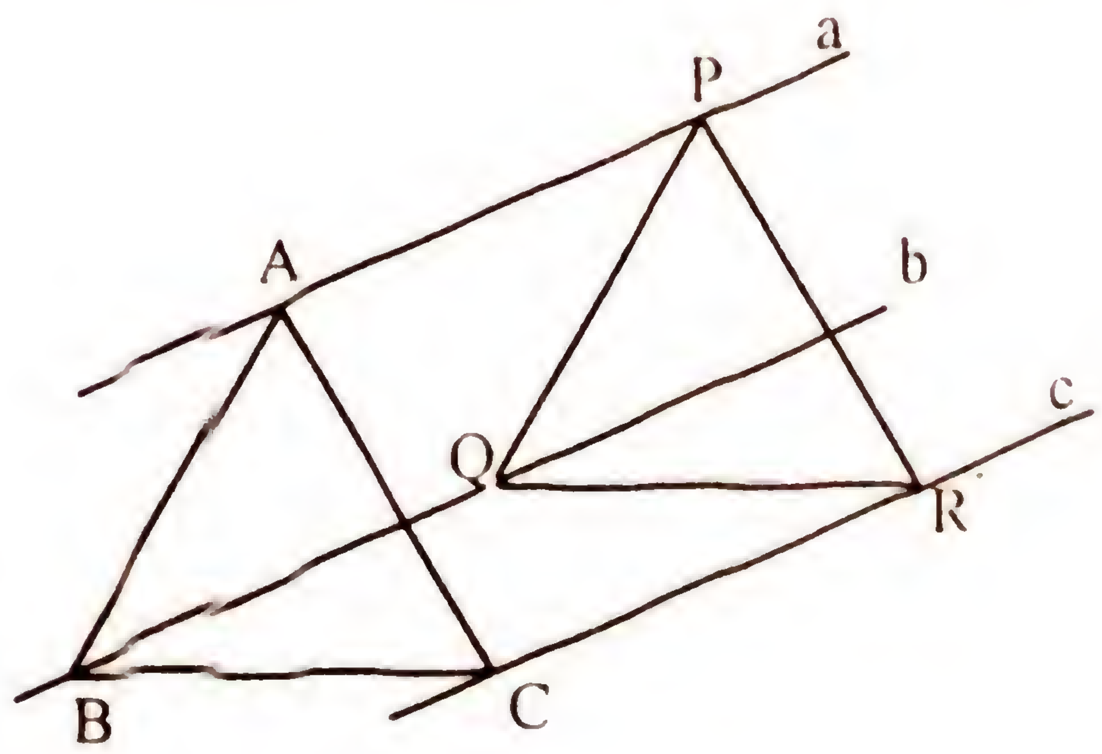
b) Gọi I là điểm cần tìm thì IT' là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(O_1; R)$ và $(O'; R')$.

Suy ra cách dựng: Vẽ tiếp tuyến chung t của hai đường tròn $(O_1; R)$ và $(O'; R')$. Giao điểm của t và d chính là điểm I cần tìm. Khi đó tiếp tuyến IT' chính là t còn đường thẳng đối xứng với IT' qua d là tiếp tuyến IT của $(O; R)$.

Số nghiệm phụ thuộc vào số tiếp tuyến chung và số điểm chung của t và d.

**Ví dụ 16**: Cho một tam giác đều ABC và ba đường thẳng song song a, b, c lần lượt đi qua ba đỉnh A, B, C. Cho một điểm P nằm trên a. Hãy dựng tam giác đều có một đỉnh là P và hai đỉnh còn lại lần lượt nằm trên hai đường thẳng b và c. Bài toán có bao nhiêu nghiệm hình?

**Giải**



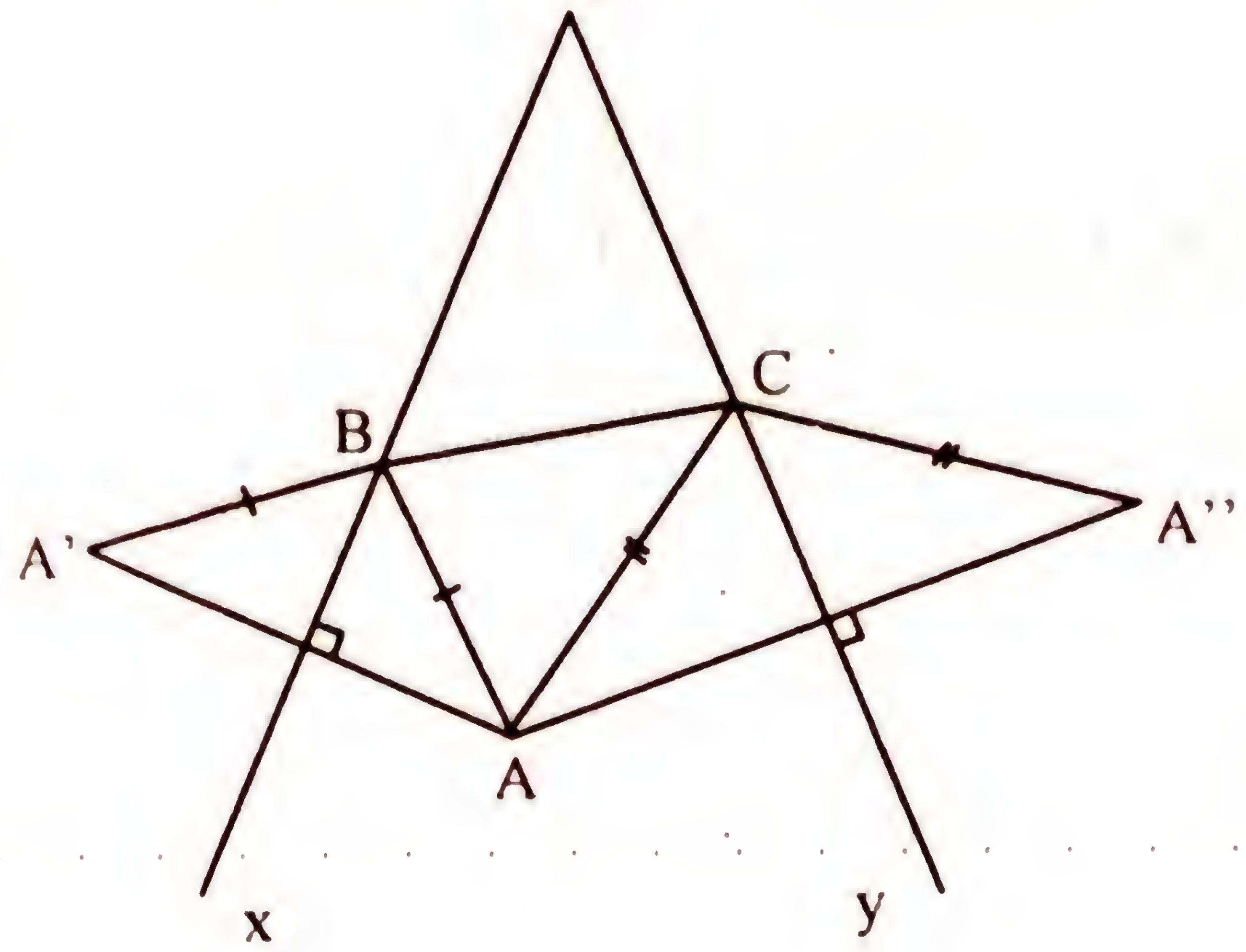

Dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AP}$, thì tam giác đều ABC biến thành tam giác đều PQR (A biến thành P, B biến thành Q, C biến thành R) và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên a, b, c.

Gọi p là đường thẳng đi qua P và vuông góc với a.

Phép đối xứng trục $Đ_p$ biến tam giác PQR thành tam giác PQ'R' có ba đỉnh lần lượt nằm trên a, b, c . Bài toán có hai nghiệm hình PQR và PQ'R'.

**Ví dụ 17**: Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

**Giải**



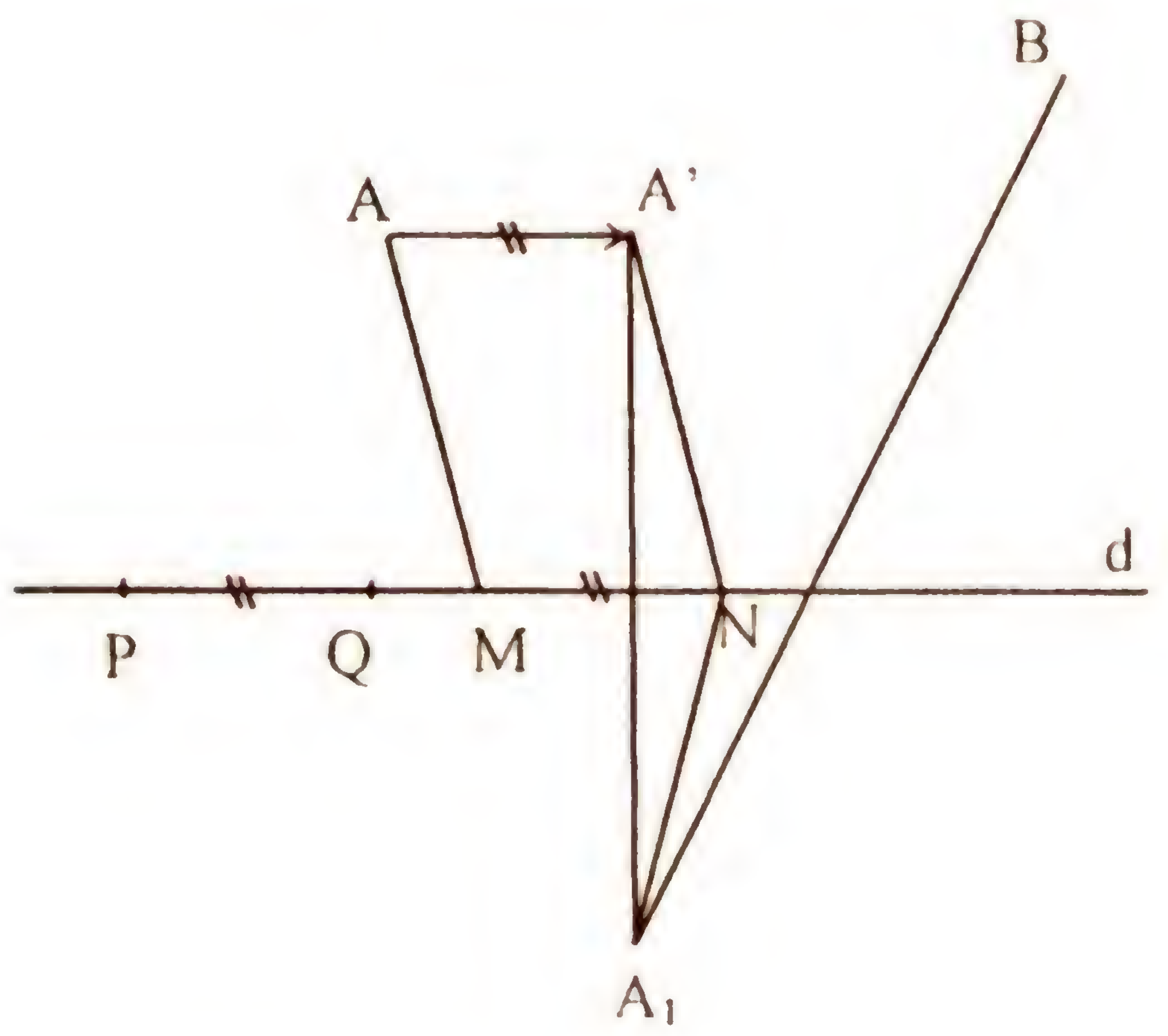

Xét tam giác ABC có B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy. Gọi A' và A'' là các điểm đối xứng với điểm A lần lượt qua các đường thẳng Ox và Oy. Chu vi của tam giác ABC là:

$$AB + BC + CA$$
$$= A'B + BC + CA'' \geq A'A''.$$

Dấu " = " xảy ra khi bốn điểm A', B, C, A" thẳng hàng. Vậy chu vi tam giác ABC bé nhất khi lấy B và C lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng A'A" với hai tia của góc nhọn xOy.

Vì góc xOy nhọn tồn tại các giao điểm B và C.

**Ví dụ 18**: Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P, Q và hai điểm A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.




**Giải**

Giả sử dựng được hai điểm M, N nằm trên d sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$. Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$ thì điểm A' hoàn toàn xác định và AMNA' là hình bình hành nên AM = A'N.

Do đó AM + BN = A'N + BN.

Lấy $A_1$ đối xứng A' qua d thì:

$A'N + BN = A_1N + BN \geq A_1B$: Không đổi

Vậy điểm N cần tìm là giao điểm của $A_1B$ và d, và điểm M xác định bởi $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{QP}$.

## DẠNG 4: PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

– Phép đối xứng qua điểm O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$$

Phép đối xứng qua điểm O thường được kí hiệu là $Đ_O$. Phép đối xứng qua một điểm còn gọi là phép đối xứng tâm.

Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng, hay là tâm đối xứng.

– Trong hệ toạ độ Oxy cho điểm I(a; b). Nếu phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') thì: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

– Điểm O gọi là tâm đối xứng của một hình (H) nếu phép đối xứng tâm $Đ_o$ biến hình (H) thành chính nó, tức là $Đ_o((H)) = (H)$.

Chú ý: – Phép đối xứng qua gốc O biến M(x; y) thành M'(–x; –y)

– Ứng dụng phép đối xứng tâm để giải bài toán dựng hình tương giao, tập hợp điểm, ... khi có yếu tố liên quan đến trung điểm là điểm xác định, cố định.

**Ví dụ 1**: Qua phép đối xứng tâm $Đ_O$, những điểm nào biến thành chính nó. Những đường thẳng nào biến thành chính nó? Những đường tròn nào biến thành chính nó?

**Giải**

Điểm O biến thành chính nó. Mọi đường thẳng đi qua O đều biến thành chính nó. Mọi đường tròn có tâm O đều biến thành chính nó.

**Ví dụ 2**: Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh:

a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d'.

b) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

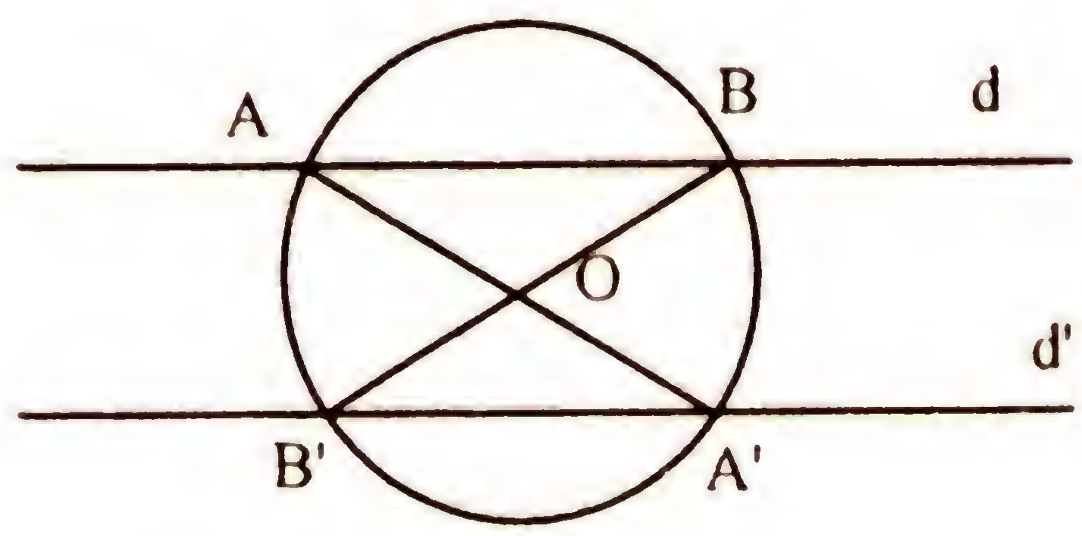
**Giải**

a) Hạ OH $\perp$ d, vì d không đi qua O nên H không trùng với O. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến H thành H' thì O là trung điểm của HH' và biến đường thẳng d thành đường thẳng d' vuông góc với OH' tại H'. Suy ra d và d' song song, cách đều điểm O.

b) Nếu d không đi qua O thì theo câu a), d' // d nên d' không trùng với d. Nếu d đi qua O thì mọi điểm M $\in$ d biến thành điểm M' $\in$ d. Vậy d' trùng với d.

**Ví dụ 3**: Cho phép đối xứng tâm $Đ_o$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_o$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

**Giải**




Dựng đường tròn (O; R) sao cho nó cắt d tại hai điểm phân biệt A, B. Dựng các đường thẳng AO và BO, chúng cắt đường tròn đó lần lượt tại A' và B'.

Dựng đường thẳng d' đi qua A' và B'. Phép dựng trên đây sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

**Ví dụ 4**: Tìm ảnh qua phép đối xứng tâm I(1; 2) của:

a) Điểm A(3; −4)

b) Đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

**Giải**

$Đ_I$: $M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ với $x' = 2 - x$, $y' = 4 - y$.

a) A(3; −4) biến thành A'(−1; 8)

b) Đường tròn (C) tâm J(−1; 3) biến thành J'(3; 1) và R' = R = 2 nên (C'): $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

**Ví dụ 5**: Cho đường thẳng $\Delta$: $ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_o; y_o)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng $\Delta$ thành đường thẳng $\Delta'$. Viết phương trình của $\Delta'$.

**Giải**

Cho M(x; y) và M'(x'; y') là ảnh của M qua phép đối xứng tâm với tâm $I(x_o ; y_o)$ thì $x + x' = 2x_o$; $y + y' = 2y_o$ nên $x = 2x_o - x'$; $y = 2y_o - y'$. Thế vào phương trình Δ thành:

$$a(2x_o - x') + b(2y_o - y') + c = 0$$

hay: $-(ax' + by' + c) + 2(ax_o + by_o + c) = 0$

Vậy (Δ'): $ax + by + c - 2(ax_o + by_o + c) = 0$.

**Ví dụ 6**: Cho đường thẳng d: $x - 2y + 2 = 0$ và d': $x - 2y - 8 = 0$. Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Oy thành chính nó.

**Giải**

Giao của d, d' với trục Oy là A(0; 1), A'(0; −4).

Theo giả thiết d thành d' và biến trục Oy thành chính nó thì A biến thành A' nên tâm đối xứng I là trung điểm của AA' là $I(0; -\frac{3}{2})$.

**Ví dụ 7**: Tìm tâm đối xứng của các hình sau đây: tam giác đều, hình bình hành, lục giác đều, đường tròn, hình gồm hai đường tròn bằng nhau.

**Giải**

– Tam giác đều không có tâm đối xứng

– Hình bình hành có một tâm đối xứng là giao điểm hai đường chéo.

– Lục giác đều có một tâm đối xứng là tâm của chúng.

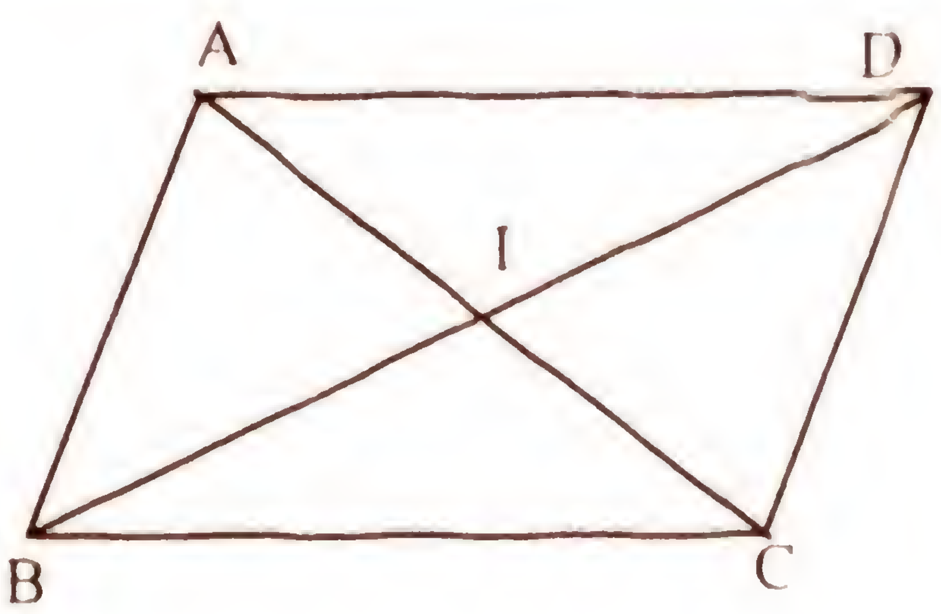
– Đường tròn có một tâm đối xứng là tâm của chúng.

– Hình gồm hai đường tròn bằng nhau có một tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm.

**Ví dụ 8**: Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì đó là hình bình hành.

**Giải**

Giả sử tứ giác ABCD có tâm đối xứng là I. Đỉnh A chỉ có thể biến thành A, B, C hay D.



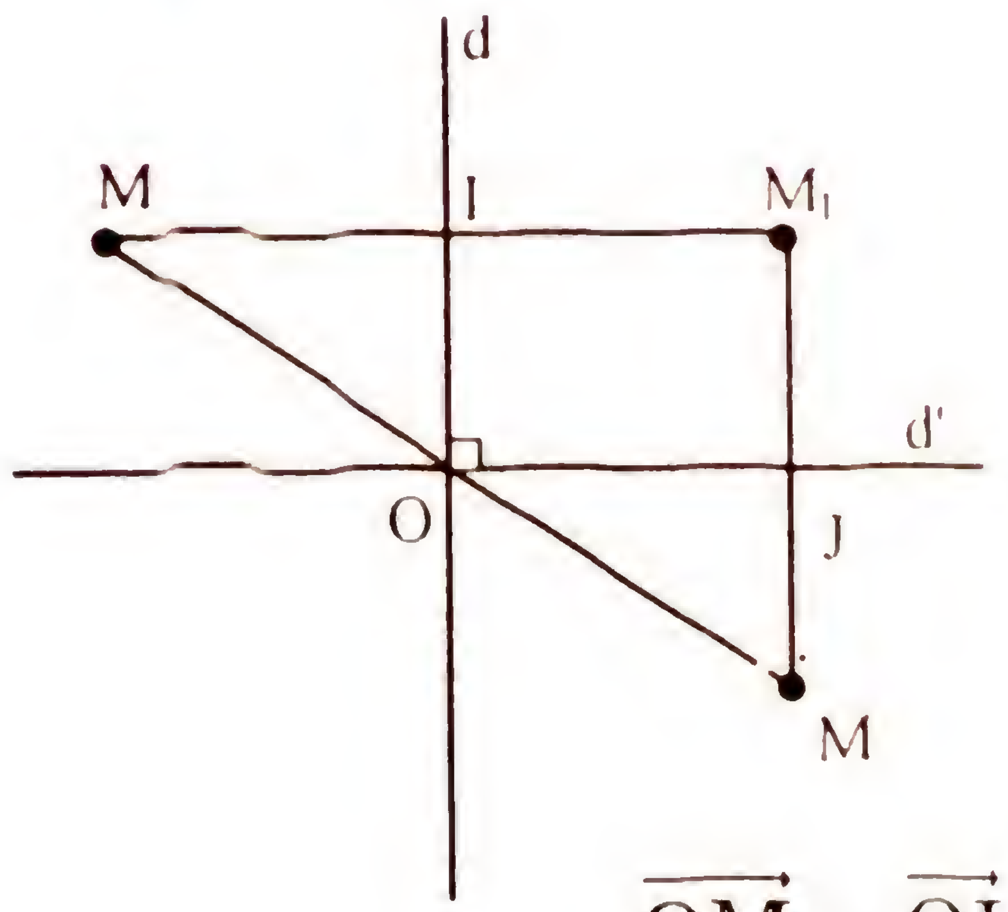

– Nếu đỉnh A biến thành chính nó thì A là tâm đối xứng của tứ giác: vô lí.

– Nếu A biến thành B hoặc D thì tâm đối xứng thuộc các cạnh AB hoặc AD của tứ giác: vô lí.

Vậy A chỉ có thể biến thành đỉnh C.

Lí luận tương tự đỉnh B chỉ có thể biến thành đỉnh D. Khi đó tâm đối xứng I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác ABCD phải là hình bình hành.

**Ví dụ 9** Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.




**Giải**

Giả sử hình (H) có hai trục đối xứng d và d' vuông góc với nhau tại O. Lấy M là điểm bất kì thuộc hình (H), $M_1$ là điểm đối xứng với M qua d, M' là điểm đối xứng với $M_1$ qua d'. Vì d và d' đều là trục đối xứng của hình (H) nên $M_1$ và M' đều thuộc (H).

Gọi I, J là trung điểm của $MM_1$, $M_1M'$ ta có:

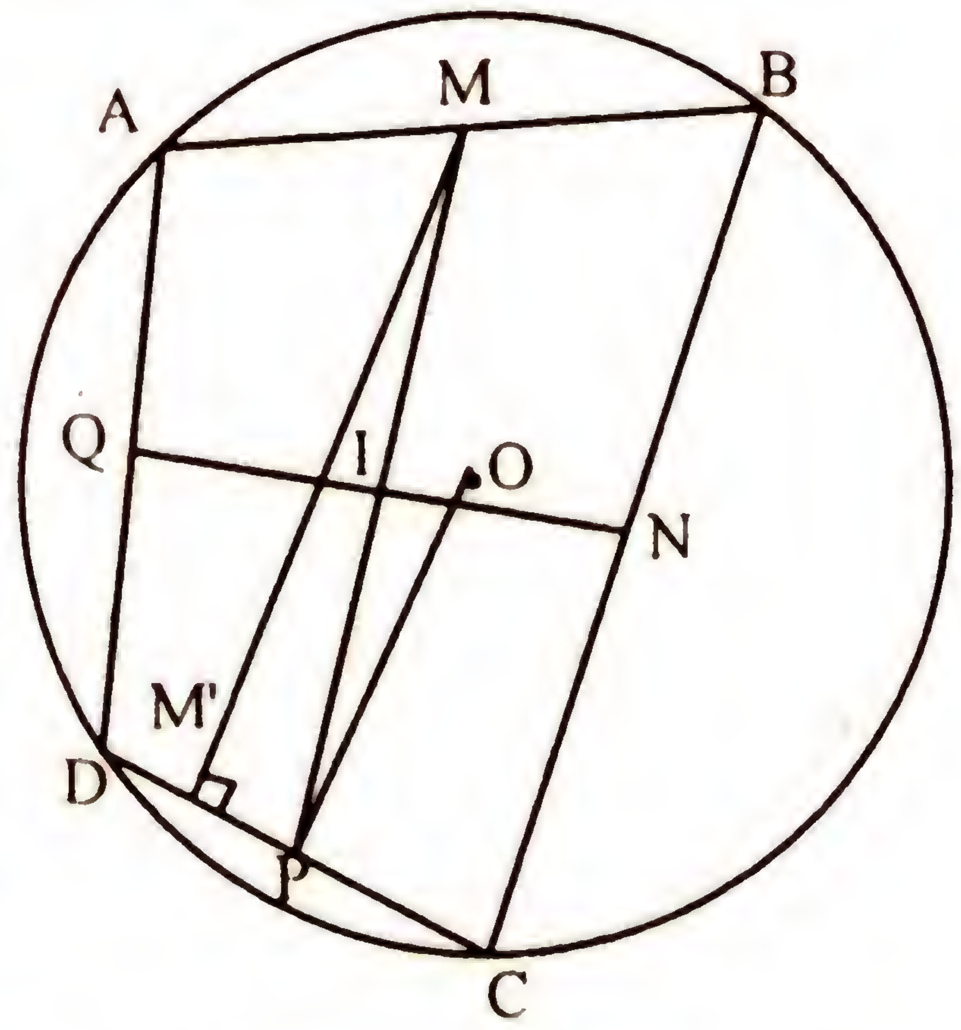
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{M'J} + \overrightarrow{JO} = \overrightarrow{M'O} \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0} \Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 10**: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Hạ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC.

a) Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến các đường thẳng MM', NN', PP', QQ' thành những đường thẳng nào?

b) Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm I, O?

**Giải**



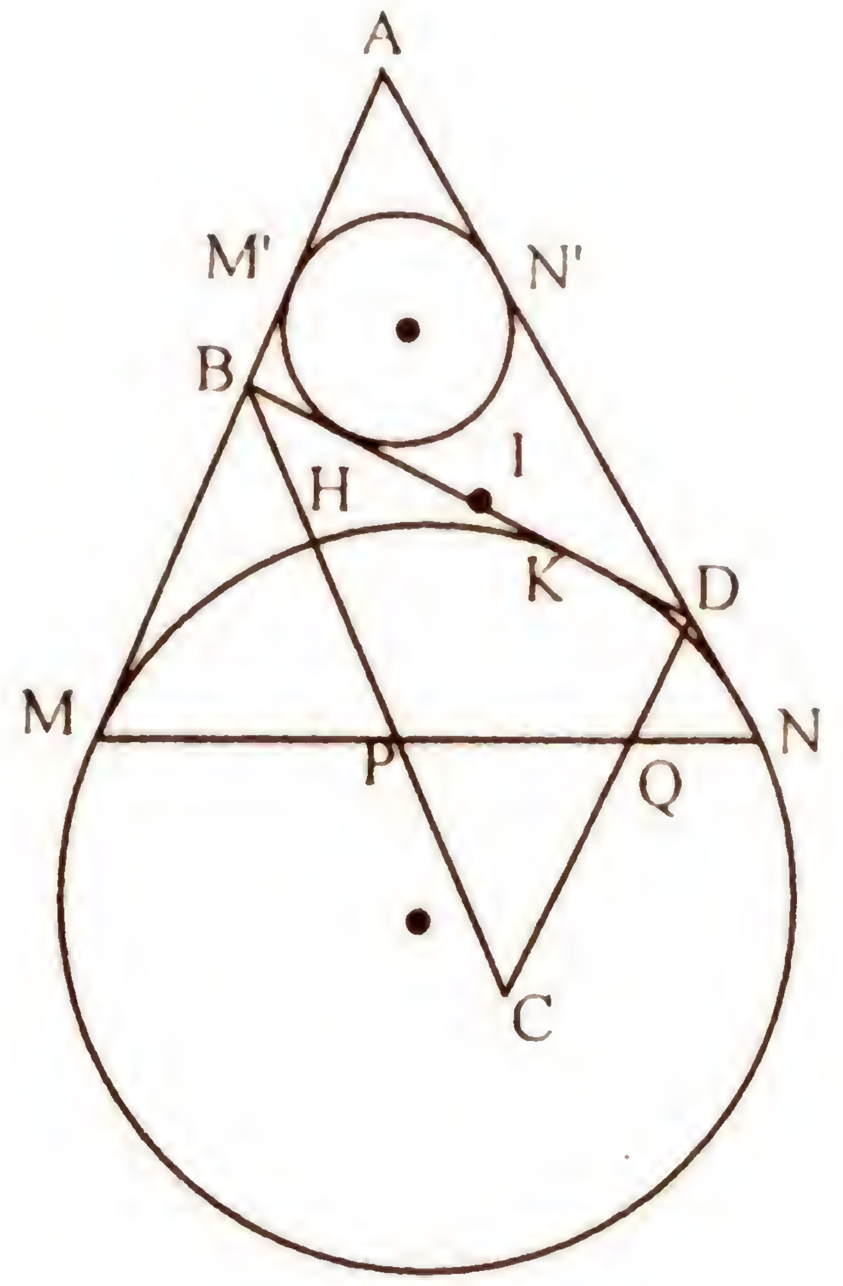

a) Vì MNPQ là hình bình hành nên I là trung điểm của MP và NQ.

Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm P, biến đường thẳng MM' thành đường thẳng đi qua P và song song với MM', tức là vuông góc với DC.

Do đó, đường thẳng MM' được biến thành đường thẳng PO. Hoàn toàn tương tự; đường thẳng NN' biến thành đường thẳng QO, đường thẳng PP' biến thành đường thẳng MO, đường thẳng QQ' biến thành đường thẳng NO.

b) Vì bốn đường thẳng MO, NO, PO, QO đồng quy tại O nên bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại điểm O' đối xứng với tâm O qua điểm I.

**Ví dụ 11**: Cho hình bình hành ABCD và đường tròn (C) bàng tiếp của tam giác ABD, tiếp xúc với phần kéo dài của AB và AD tương ứng tại các điểm M và N. Đoạn thẳng MN cắt BC và DC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với các cạnh BC và DC tại P và Q.




**Giải**

Gọi K là tiếp điểm của (C) với BD; (V) là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với AB tại M', với AD tại N' và BD tại H; gọi I là trung điểm của BD.

Từ MM' = NN'

và MM' = BH + BK,

NN' = DK + DH suy ra BH = DK.

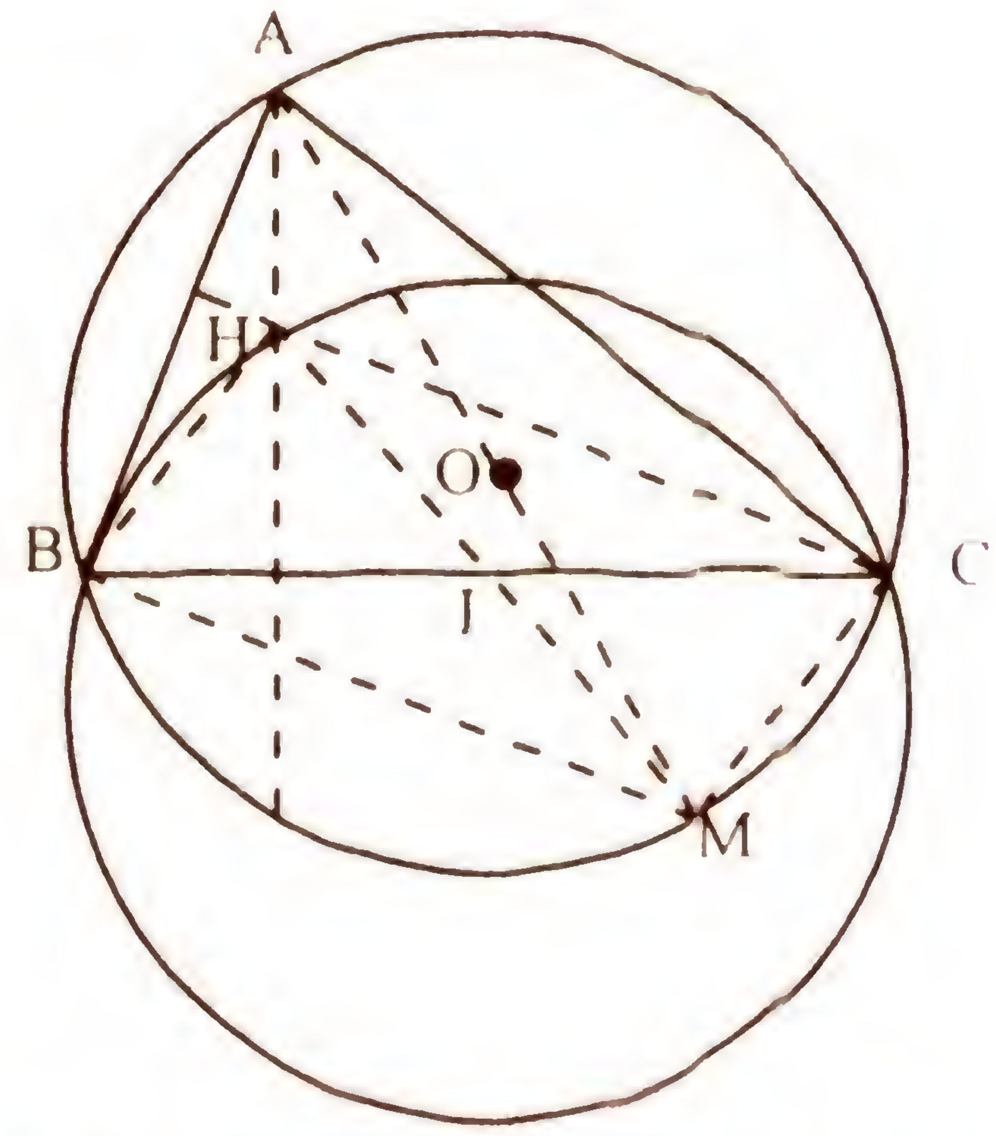
Ta có phép đối xứng $Đ_I$: B $\mapsto$ D,

H $\mapsto$ K.

Tam giác AMN cân tại A và vì DQ // AM nên tam giác DQN cân tại D suy ra DQ = DN = DK = BH = BM'. Do đó, Q là ảnh của M' trong phép $Đ_I$. Tương tự, P là ảnh của N' trong phép $Đ_I$, phép $Đ_I$: (V) $\mapsto$ (V') đi qua 3 điểm K, Q, P. Vì M', N', H là các điểm chung duy nhất của (V) với AB, AD và BC, do đó K, Q, P cũng là điểm chung duy nhất của (V') với BD, CD, CB suy ra đpcm.

**Ví dụ 12:** Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

**Giải**




Vẽ đường kính AM của đường tròn thì có BH // MC và CH // MB nên BHCM là hình bình hành. Nếu gọi I là trung điểm của BC thì I cố định và cũng là trung điểm của MH.

Vậy phép đối xứng qua điểm I biến M thành H.

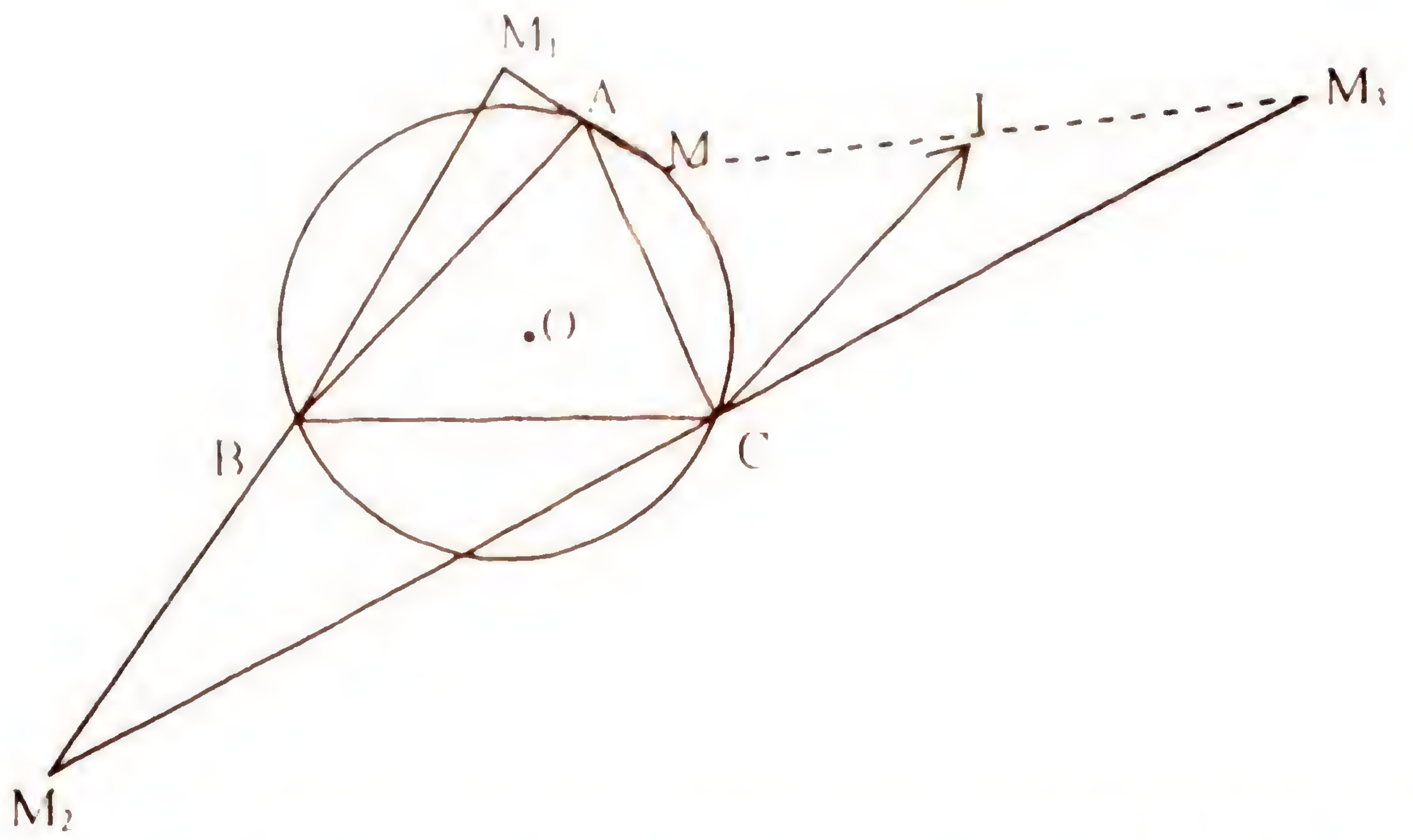
Khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì M chạy trên đường tròn (O; R). Do đó, H nằm trên đường tròn là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng tâm với tâm I.

**Ví dụ 13**: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi $M_1$ là điểm đối xứng với M qua A, $M_2$ là điểm đối xứng với $M_1$ qua B, $M_3$ là điểm đối xứng với $M_2$ qua C. Chứng minh phép biến hình F biến điểm M thành $M_3$ là một phép đối xứng tâm. Suy ra quỹ tích điểm $M_3$.

**Giải**

Gọi I là trung điểm của $MM_3$, ta có:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{M_2C}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{BA}$$

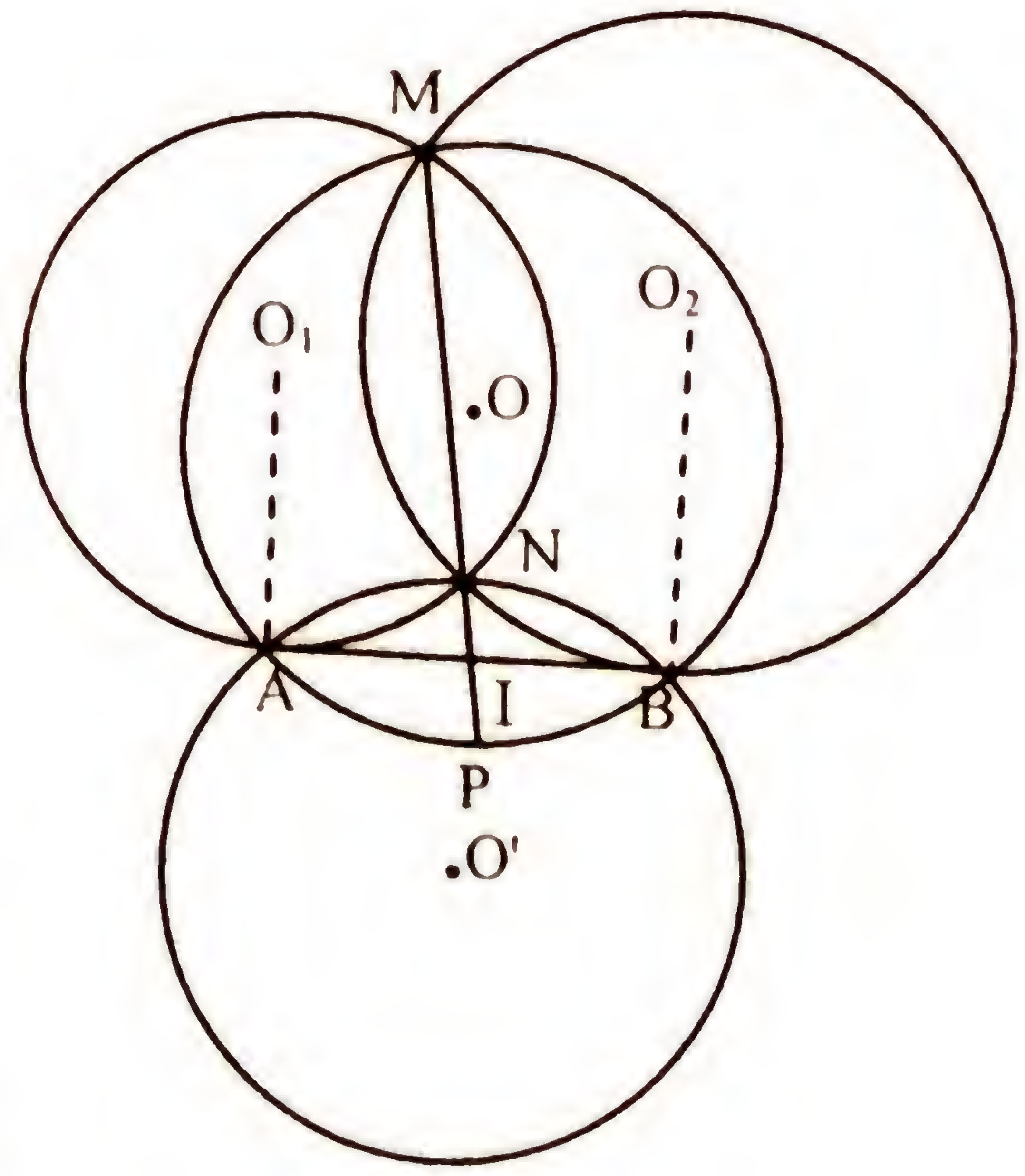



Như vậy điểm I cố định, do đó phép biến hình F biến điểm M thành $M_3$ là phép đối xứng qua điểm I.

Vì M thay đổi trên (O) nên quỹ tích điểm $M_3$ là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm với tâm I.

**Ví dụ 14**: Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$ qua M theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích các điểm N là giao điểm thứ hai của $(O_1)$ và $(O_2)$.

**Giải**




Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

$$IA^2 = IM\,.\,IN = IB^2 \Rightarrow IA = IB$$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của AB cố định.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với (O) ta có:

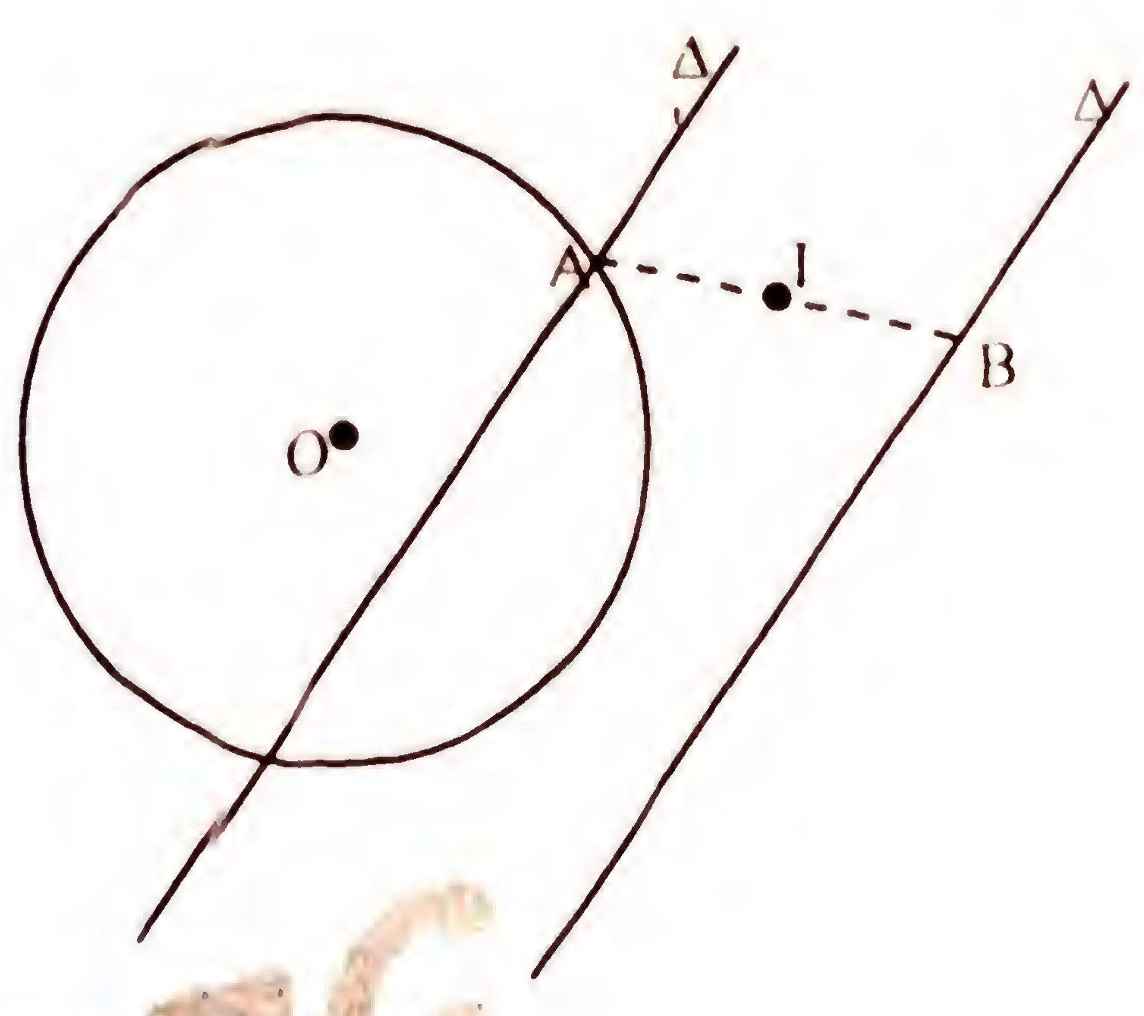
$$IA^2 = IA.IB = IM.IP$$

$\Rightarrow$ IN = IP nên I là trung điểm của PN, do đó phép đối xứng tâm I biến P thành N.

Vì quỹ tích điểm P là đường tròn (O) nên quỹ tích N là đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I, bỏ đi hai điểm A và B.

**Ví dụ 15**: Cho đường tròn (O; R), đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

**Giải**




Giả sử có điểm A trên đường tròn (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm AB.

Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến B thành A nên biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' đi qua A.

Mặt khác A lại nằm trên (O; R) nên A phải là giao điểm của Δ' và (O; R). Suy ra cách dựng:

Dựng đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$. Lấy A là giao điểm của Δ' và (O; R), còn B là giao điểm của đường thẳng AI và đường thẳng Δ.

Số nghiệm hình là số giao điểm của Δ' và (O; R).

**Ví dụ 16:** Cho 5 điểm $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$. Dựng một hình ngũ giác ABCDE sao cho trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE và EA lần lượt là $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

**Giải**

Giả sử đã dựng được ngũ giác ABCDE theo yêu cầu. Lấy một điểm A' tuỳ ý, và gọi B' là điểm đối xứng của A' qua $P_1$, C' là điểm đối xứng của B' qua $P_2$, D' là điểm đối xứng của C' qua $P_3$, E' là điểm đối xứng của D' qua $P_4$ và A" là điểm đối xứng của E' qua $P_5$.

Khi đó $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{P_1A'} - \overrightarrow{P_1A} = -\overrightarrow{P_1B'} + \overrightarrow{P_1B} = -\overrightarrow{BB'}$

Tương tự $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{DD'} = -\overrightarrow{EE'}, \overrightarrow{EE'} = -\overrightarrow{AA'}$

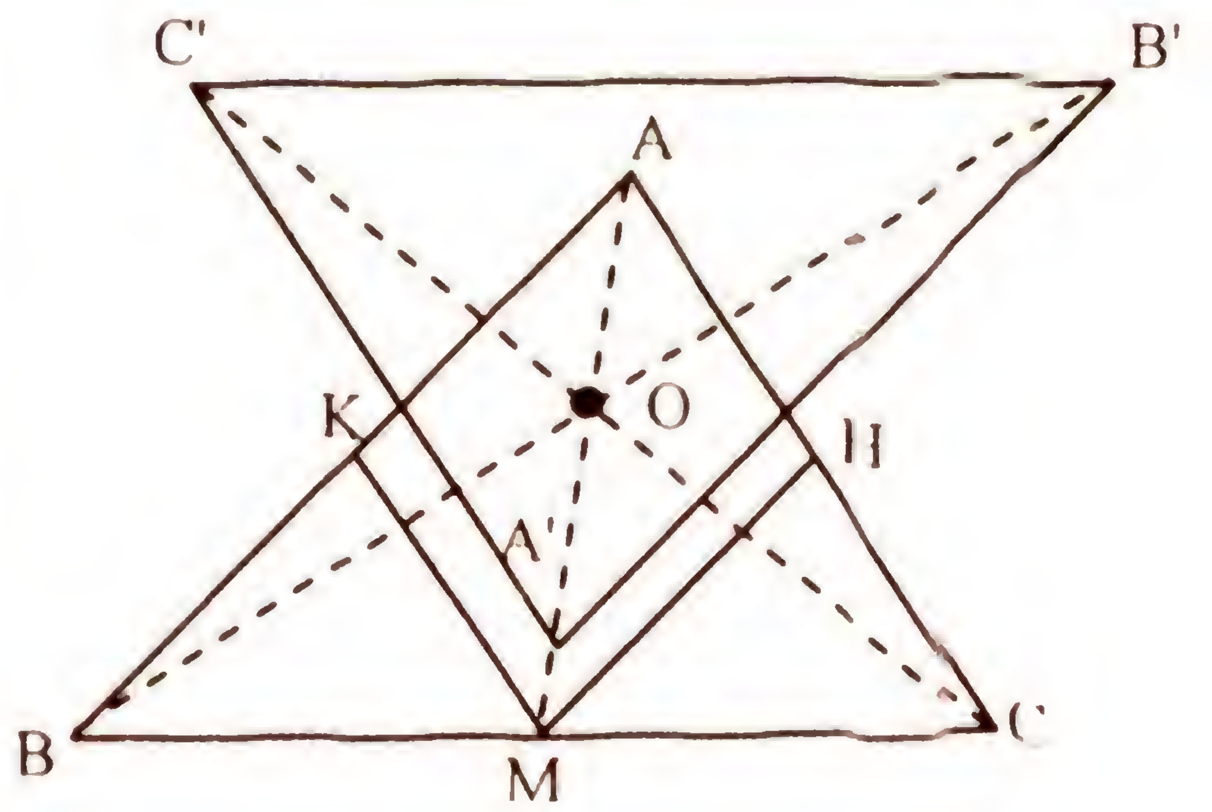
Do đó $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA''}$ nên A là trung điểm của A'A".

Từ đó suy ra cách dựng: Lấy một điểm A' bất kì, rồi dựng các điểm B', C', D', E', A" như trên. Cuối cùng dựng trung điểm A của đoạn thẳng A'A", thì A là một đỉnh của ngũ giác cần tìm. Các đỉnh còn lại dựng dễ dàng.

Bài toán có một nghiệm hình duy nhất. Thật vậy nếu có hai ngũ giác ABCDE và A'B'C'D'E' cùng thoả mãn điều kiện của bài toán thì lập luận như trên ta có $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA'}$ nên $\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$ tức là A trùng với A', và do đó B, C, D, E lần lượt trùng với B', C', D', E'.

**Ví dụ 17:** Cho đỉnh O nằm trong tam giác ABC. Gọi A', B', C' là ảnh của A, B, C qua phép đối xứng tâm O. Biết rằng A' ở trong tam giác ABC, tìm vị trí của O để phần chung T của 2 tam giác ABC, A'B'C' có diện tích lớn nhất?

**Giải**




T là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp nằm trên AB và AC và một đường chéo là AA'. Gọi M là giao điểm của AA' với cạnh BC và dựng hình bình hành AKMH, có MK // AC và MH // AB (K ∈ AB, H ∈ AC).

Ta có T ở trong hình bình hành AKMH, do đó: $S_T \le S_{AKMH}$

và $\dfrac{S_{AHK}}{S_{ABC}} = \dfrac{AK}{AB}.\dfrac{AH}{AC}$. Do MK // AC và MH // AB nên:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CM}{BC}, \frac{AH}{AC} = \frac{BM}{BC} \quad \text{và} \quad \frac{AK}{AB} + \frac{AH}{AC} = 1$$

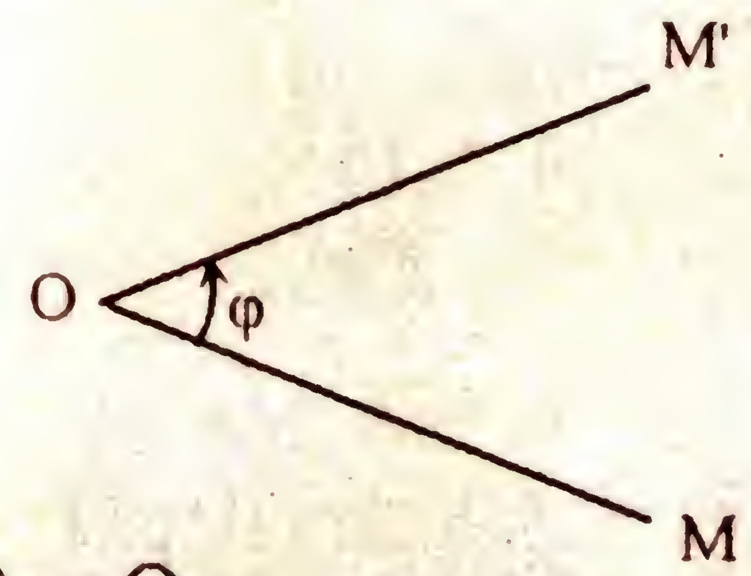
Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{AK}{AC}.\frac{AH}{AC} \le \frac{1}{4}\left(\frac{AK}{AB}+\frac{AH}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{AHK} \le \frac{1}{4}S_{ABC} \Rightarrow S_{AKMH} \le \frac{1}{2}S_{ABC}$.

Vậy $S_T$ lớn nhất khi O là trung điểm của trung tuyến AM.

## DẠNG 5: PHÉP QUAY

– Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM = OM' và (OM, OM') = φ được gọi là phép quay tâm O góc quay φ.




Phép quay thường được kí hiệu là Q, và nếu muốn chỉ rõ tâm quay O và góc quay φ thì ta kí hiệu phép quay đó là $Q_{(O;\,\varphi)}$.

– Đặc biệt khi $\varphi = 180^o + k360^o$ (hay $\pi + k2\pi$) thì phép quay là phép đối xứng tâm O.

Chú ý: – Góc quay của phép quay là một góc lượng giác.

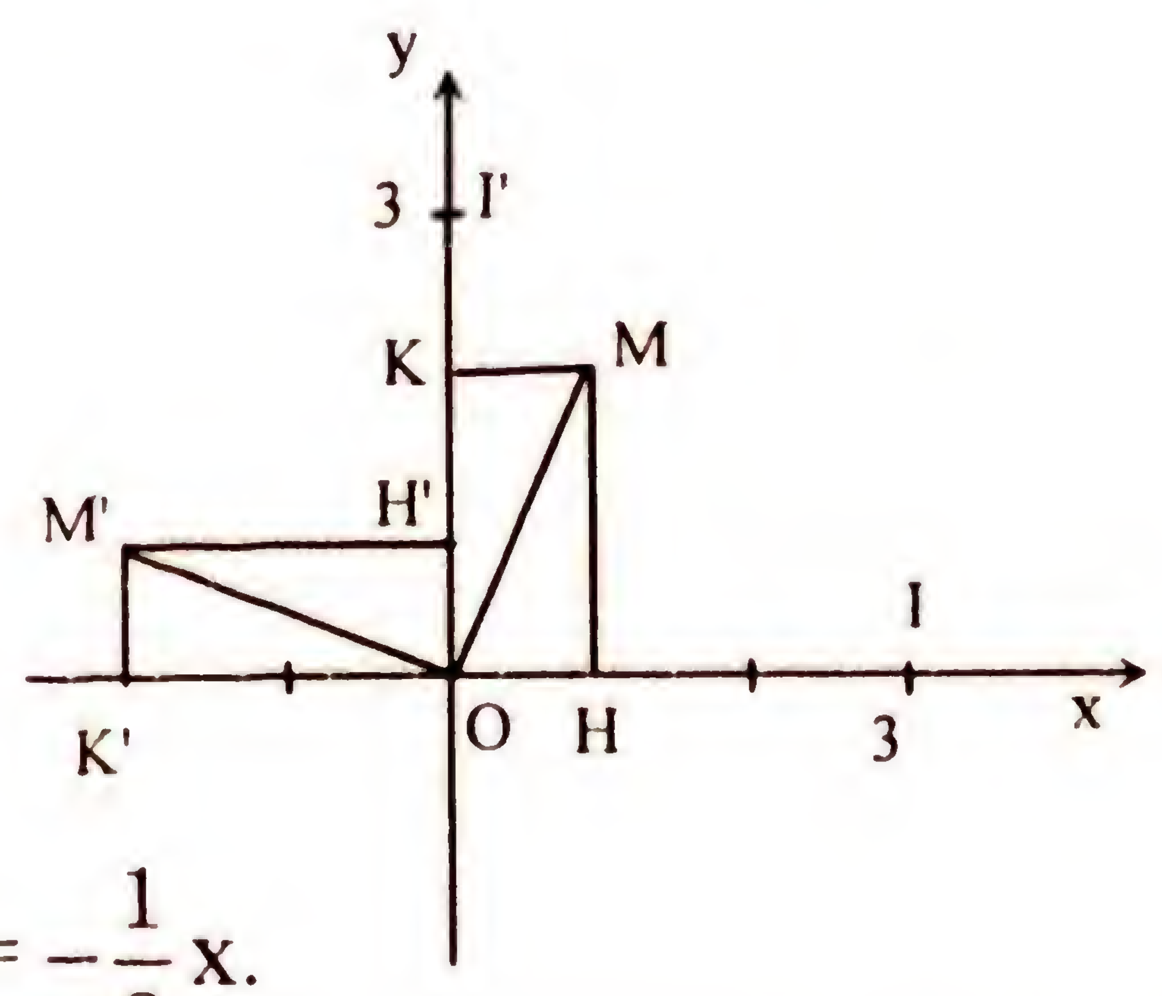
– Cho phép quay góc φ biến đường thẳng d thành đường thẳng d', nếu $0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$ thì góc (d, d') = φ, còn nếu $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ thì góc (d, d') = π – φ.

– Yếu tố liên quan đến phép quay là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, hình vuông, ... Từ đó vận dụng giải toán chứng minh, xác định điểm, tập hợp điểm, ...

**Ví dụ 1**: Trong mặt phẳng Oxy, qua phép quay tâm O, góc $90^o$ xác định ảnh của:

a) Điểm I(3; 0)

b) Đường thẳng d: y = 2x.




**Giải**

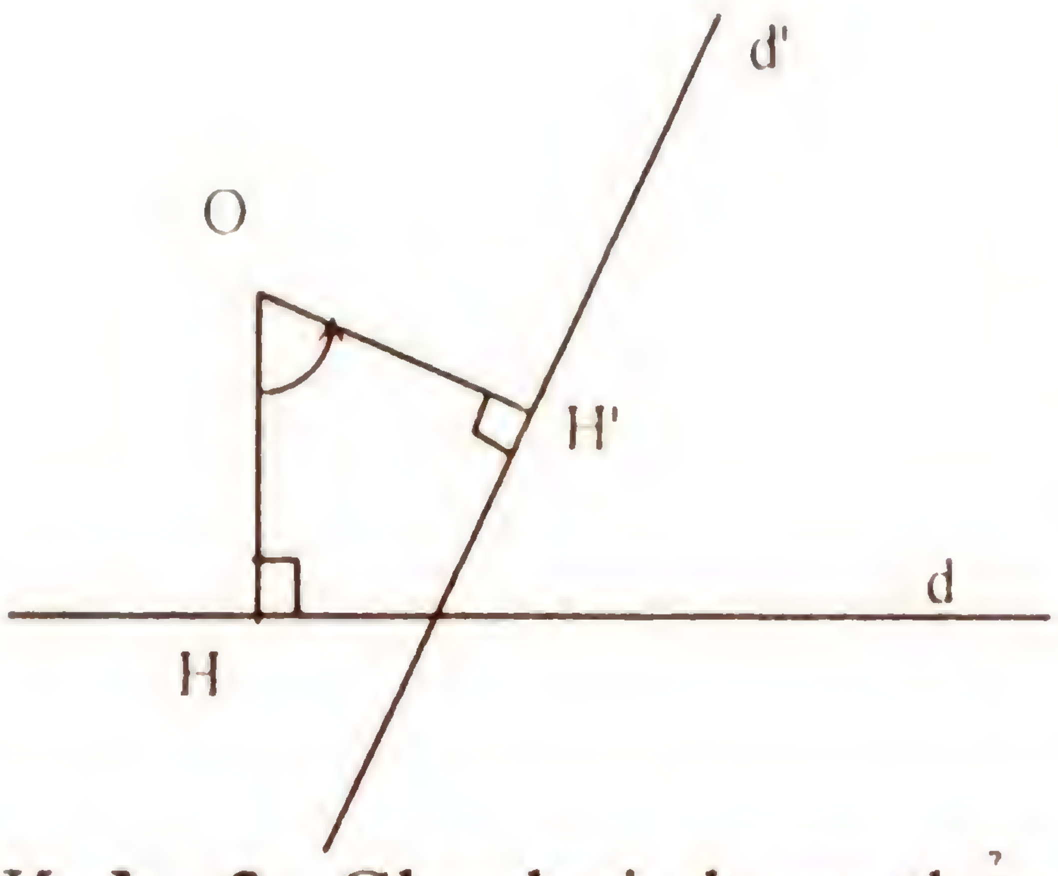
Phép quay tâm O, góc $90^o$:

a) Điểm I(3; 0) thành I'(0; 3)

b) Đường thẳng d: y = 2x qua gốc O và M(1; 2) thì điểm O không thay đổi còn M biến thành M'(–2; 1).

Do đó ảnh của d là đường thẳng OM': $y = -\frac{1}{2}x$.

**Ví dụ 2**: Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.




**Giải**

Lấy hai điểm A, B phân biệt trên d, rồi dựng ảnh A', B' của chúng. Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua A' và B'.

Cách khác: Nếu d không đi qua O, gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d, dựng H' là ảnh của H. Đường thẳng vuông góc với OH' tại H' chính là ảnh d' của d.

**Ví dụ 3**: Cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB, A'B'. Hãy xác định phép quay biến A thành A', B thành B'.

**Giải**

Phép quay tâm O góc φ biến A thành A', B thành B' thì O là điểm chung của 2 đường trung trực của AA' và BB'. Suy ra cách xác định phép quay như sau: Dựng các đường trung trực a và b của AA' và BB'

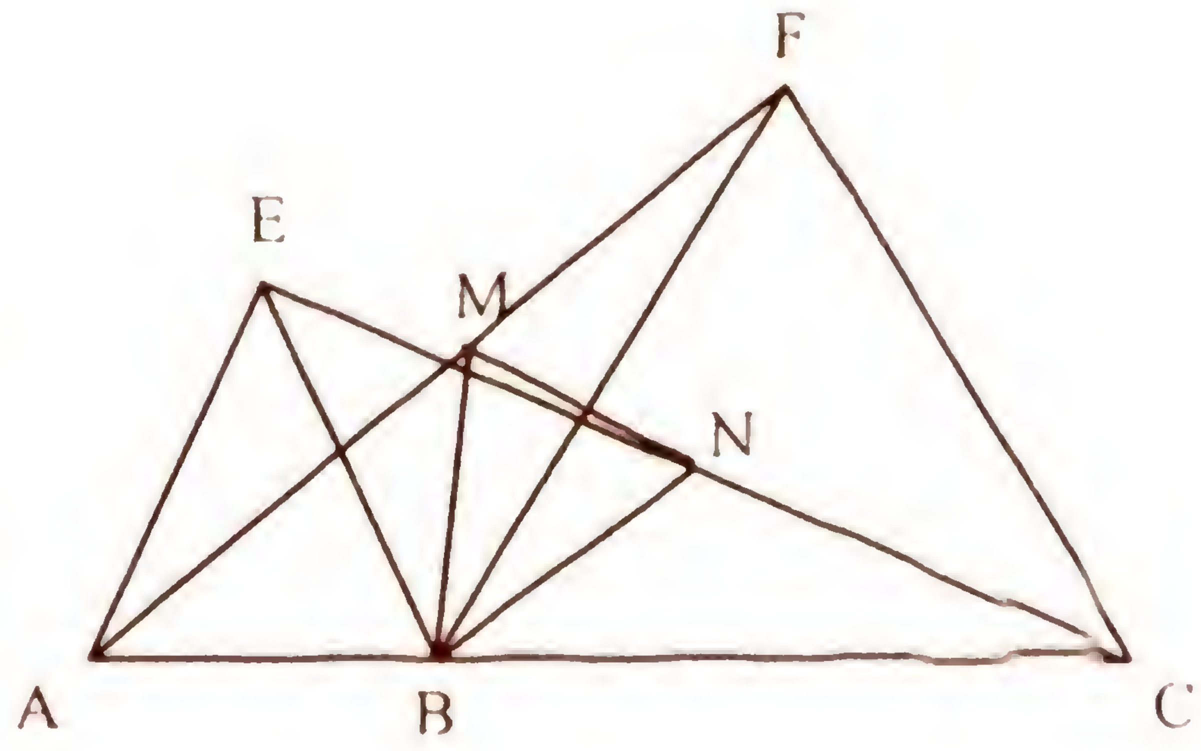
– Xét a // b khi đó không có phép quay nào thoả mãn yêu cầu:

– Xét $a \cap b = O$ thì O chính là tâm của phép quay và góc quay $\varphi = (OA, OA') = (OB, OB')$.

– Xét $a \equiv b$ nếu AB cắt a tại O, khi đó A'B' cũng cắt a tại O. Ta có phép quay tâm O, góc quay $\varphi = (OA, OA') = (OB, OB')$ còn nếu AB // a, khi đó A'B' // a, thì không có phép quay.

**Ví dụ 4**: Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC. Chứng minh tam giác BMN đều.

**Giải**

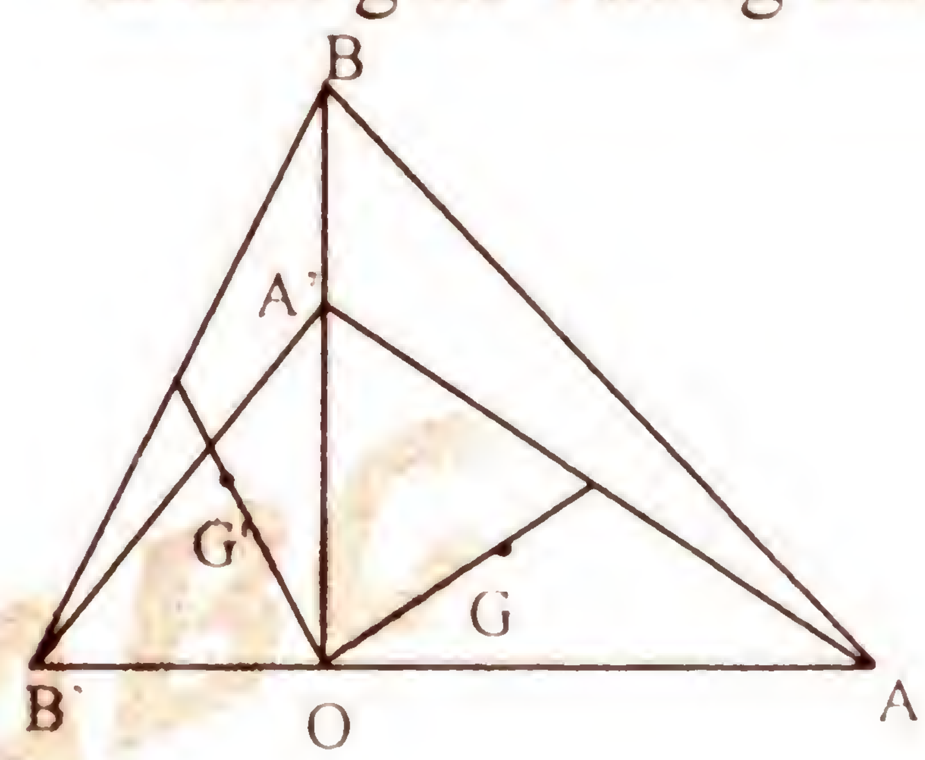



Phép quay tâm B góc quay $60^o$ biến các điểm E, C lần lượt thành các điểm A, F biến đoạn EC thành AF nên biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF, do đó

$BN = BM$ và $(BN, BM) = 60^o$.

Vậy tam giác BMN đều.

**Ví dụ 5**: Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B . Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.




**Giải**

Phép quay O, góc quay $90^o$ biến A thành B và biến A' thành B', biến tam giác OAA' thành tam giác OBB', nên biến trọng tâm G thành trọng tâm G'.

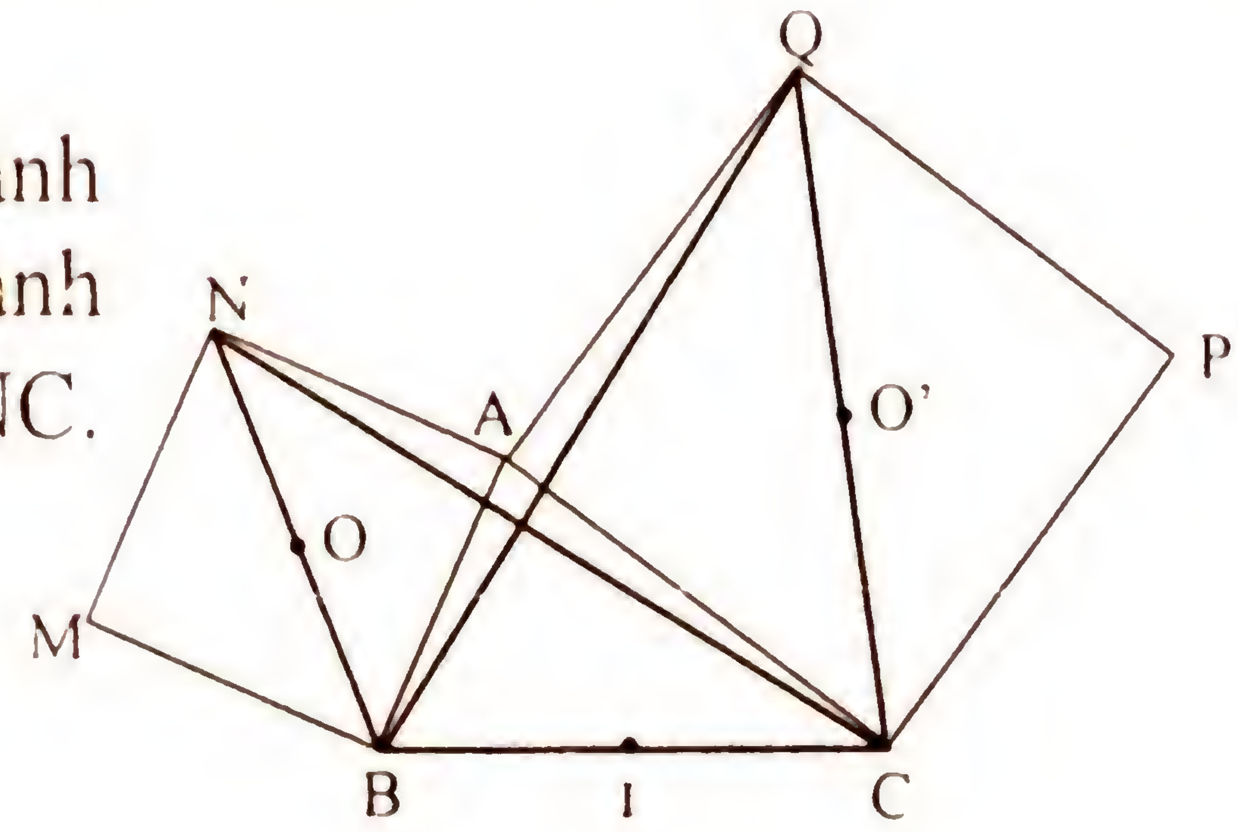
Do đó $OG = OG'$ và $\widehat{GOG'} = 90^o$. Vậy GOG' là tam giác vuông cân tại đỉnh O.

**Ví dụ 6**: Cho tam giác ABC và vẽ ra ngoài hai hình vuông ABMN, ACPQ.

a) Chứng minh hai đoạn thẳng BQ, CN bằng nhau và vuông góc với nhau.

b) Gọi O, O' là tâm của các hình vuông, I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác OIO' vuông cân.

**Giải**




a) Phép quay tâm A, góc $-90^o$ biến B thành N, Q thành C. Đoạn thẳng BQ biến thành đoạn thẳng NC nên $BQ = NC$ và $BQ \perp NC$.

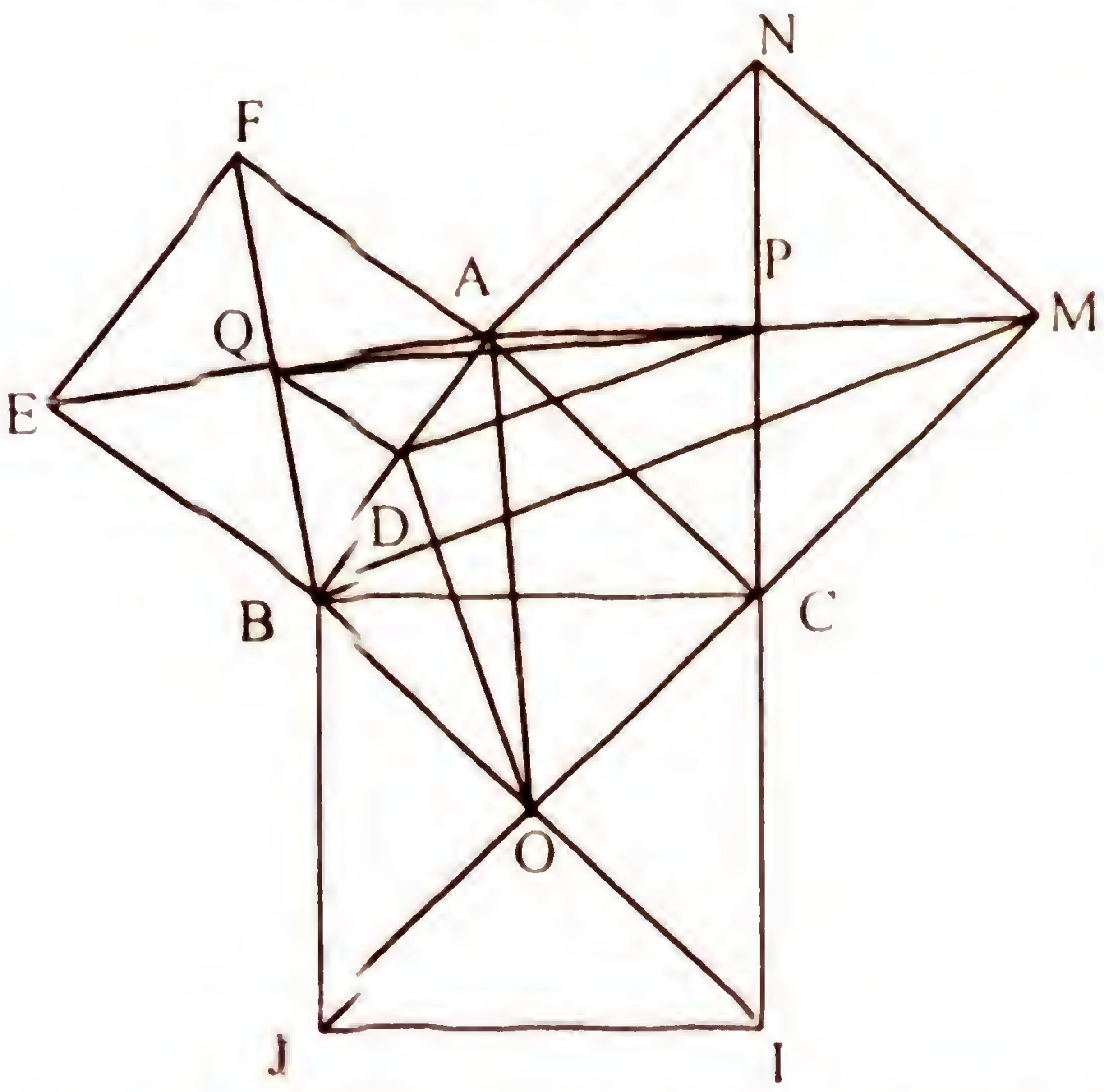
b) Ta có $OI // NC$, $OI = \frac{1}{2}NC$

và $O'I // QB$, $O'I = \frac{1}{2}QB$.

$\Rightarrow OI = O'I$, $OI \perp O'I$ nên tam giác IOO' vuông cân tại đỉnh I.

Chú ý: Đây là bài toán gốc để giải các bài toán khác.

**Ví dụ 7**: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm của chúng. Chứng minh AO vuông góc với PQ và $AO = PQ$.



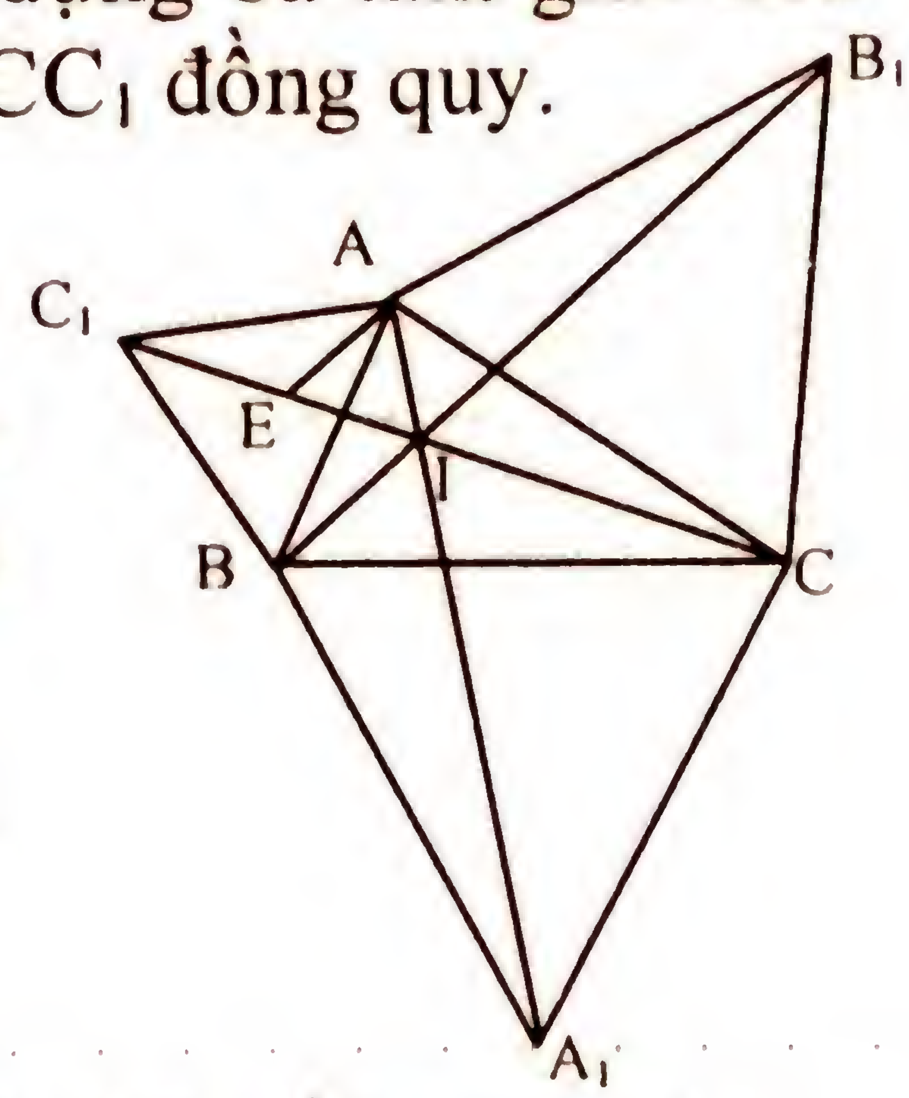

**Giải**

Gọi D là trung điểm AB thì phép quay tâm C góc $90^o$ biến MB thành AI, suy ra tam giác DPO vuông cân tại D.

Phép quay tâm D, góc $90^o$ biến O thành P, biến A thành Q. Do đó $OA = PQ$ và AO vuông góc với PQ.

**Ví dụ 8**: Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều $BCA_1$, $ACB_1$, $ABC_1$. Chứng minh rằng $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ đồng quy.

**Giải**




Gọi $I = AA_1 \cap CC_1$.

Phép quay tâm B góc $60^o$ biến $A_1$ thành C, biến A thành $C_1$, biến I, C thành $B_1$ và vì $C_1$, E, C thẳng hàng nên B, I, $B_1$ thẳng hàng.

Vậy $AA_1$, $BB_1$, $A_1A$ thành $CC_1$, do đó $\widehat{AIC_1} = 60^o$.

Lấy trên $CC_1$ điểm E sao cho $IE = IA$ thì tam giác EIA đều.

Phép quay tâm A góc $60^o$ biến $C_1$ thành B, biến E thành $CC_1$ đồng quy tại I.

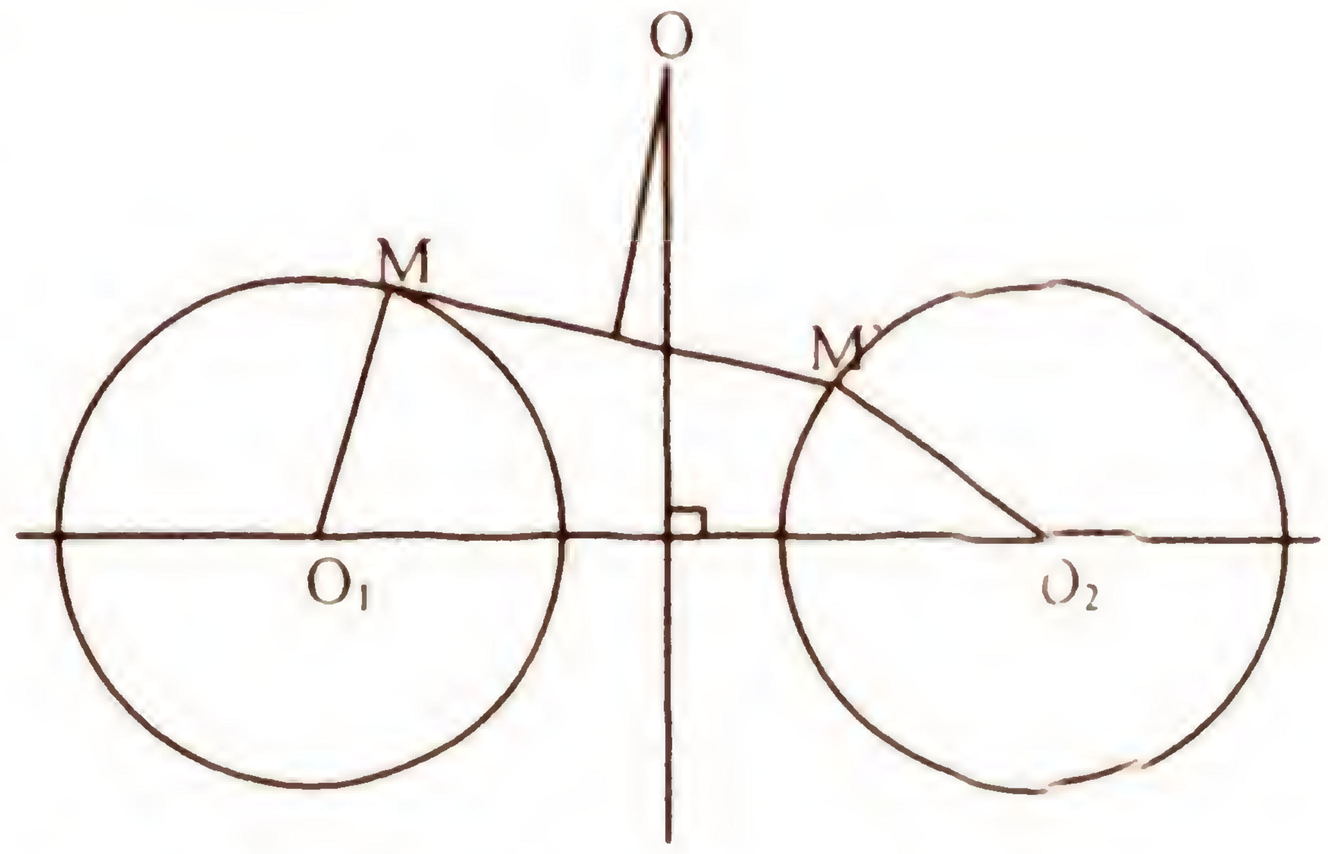
**Ví dụ 9**: Hai điểm M và M' lần lượt lưu động trên hai đường tròn bằng nhau $(O_1)$ và $(O_2)$ sao cho góc $(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_2M'}) = \varphi$ không đổi. Chứng minh rằng đường trung trực của MM' qua một điểm cố định.

**Giải**

Gọi O là điểm ở trên đường trung trực của $O_1O_2$ và $(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO_2}) = \varphi$.

Phép quay tâm O góc $\varphi$ biến đường tròn $(O_1)$ thành đường tròn $(O_2)$. điểm M thành M' nên OM = OM'.

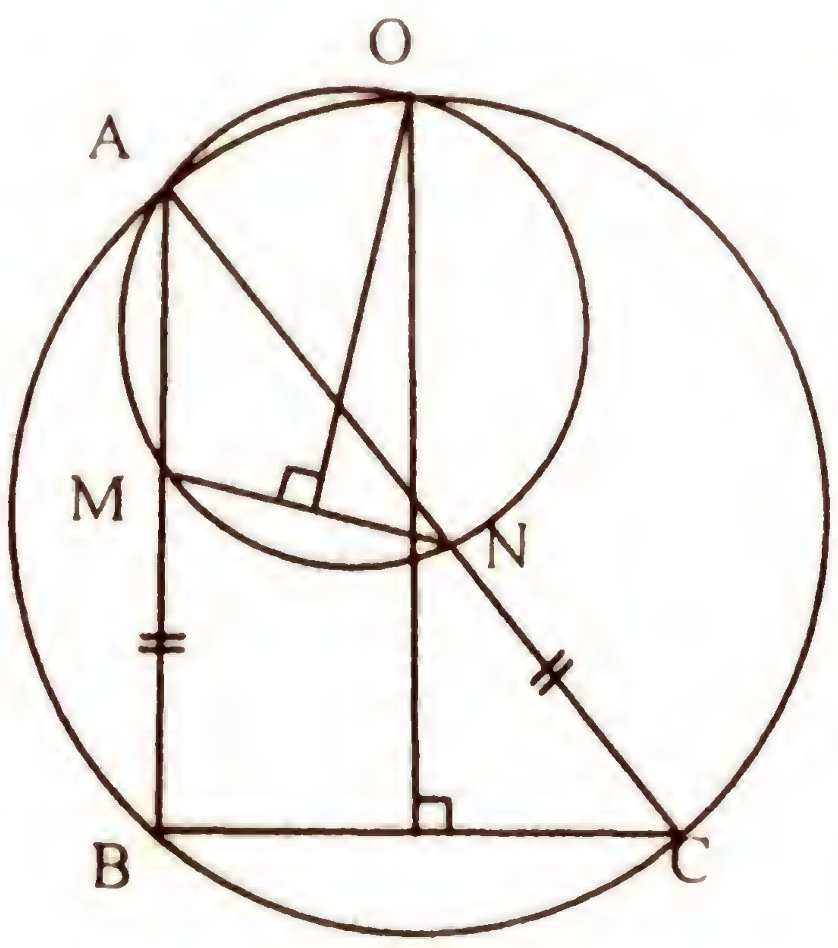
Vậy đường trung trực của MM' qua O cố định.




**Ví dụ 10:** Cho tam giác ABC. Lấy trên AB một điểm lưu động M và trên AC một điểm N sao cho BM = CN.

a) Chứng minh trung trực của MN qua 1 điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường tròn (AMN) qua 2 điểm cố định.




**Giải**

a) Ta có: BM = CN và

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \varphi$

Vậy N là ảnh của M trong phép quay có góc quay $\varphi$ biến B thành C.

Do đó đường trung trực của MN qua tâm quay O cố định là giao điểm của đường trung trực của BC và cung chứa góc $\varphi$ dựng trên dây BC.

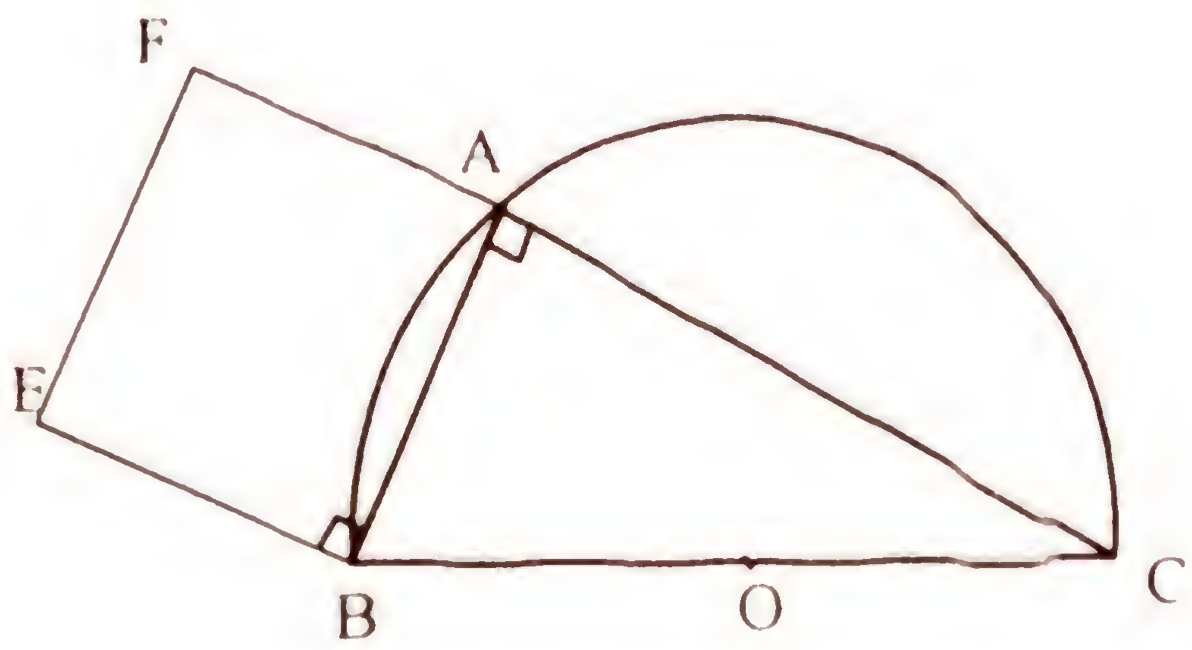
b) M và N là hai điểm tương ứng, và A là giao điểm của hai đường thẳng tương ứng BM và CN trong phép quay trên. Do đó góc (OM, ON) = (AM, AN) nên M, N, A, O cùng ở trên đường tròn. Vậy đường tròn (AMN) qua 2 điểm cố định A và O.

**Ví dụ 11**: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh $\vec{v} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n = \vec{0}$

**Giải**

Phép quay tâm O góc $\frac{2\pi}{n}$ hoặc $-\frac{2\pi}{n}$ biến đa giác đều thành chính nó nên không làm thay đổi vectơ $\vec{v}$ nên $\vec{v} = \vec{0}$.

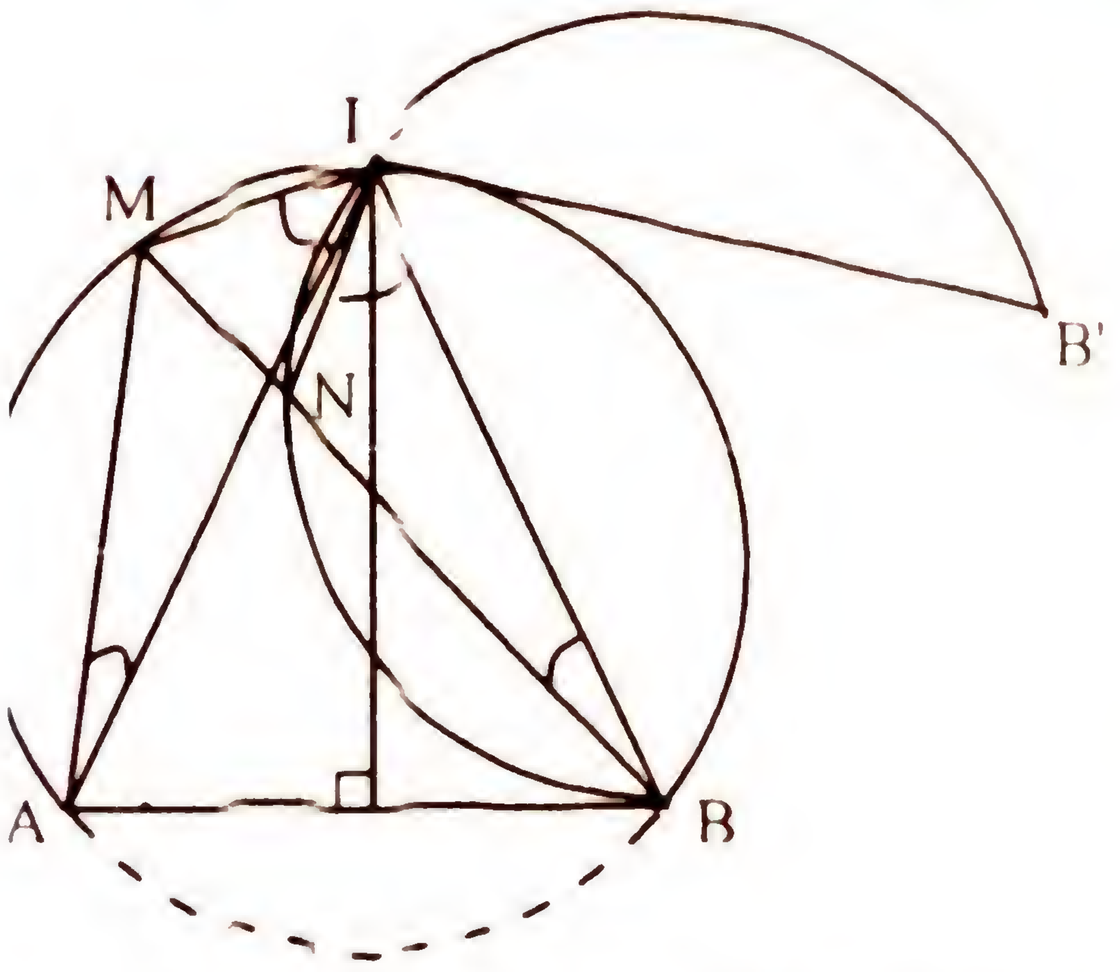
**Ví dụ 12:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông ABEF. Chứng minh rằng E chạy trên một nửa đường tròn cố định.



**Giải**

Ta có E là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc $90^o$. Khi A chạy trên nửa đường tròn (O), E sẽ chạy trên nửa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép quay tâm B, góc $90^o$.

**Ví dụ 13**: Một điểm M lưu động trên cung AB lớn của đường tròn (O), với A, B là hai điểm cố định trên đường tròn này. Trên đoạn BM lấy điểm N sao cho BN = AM. Tìm tập hợp điểm N.




**Giải**

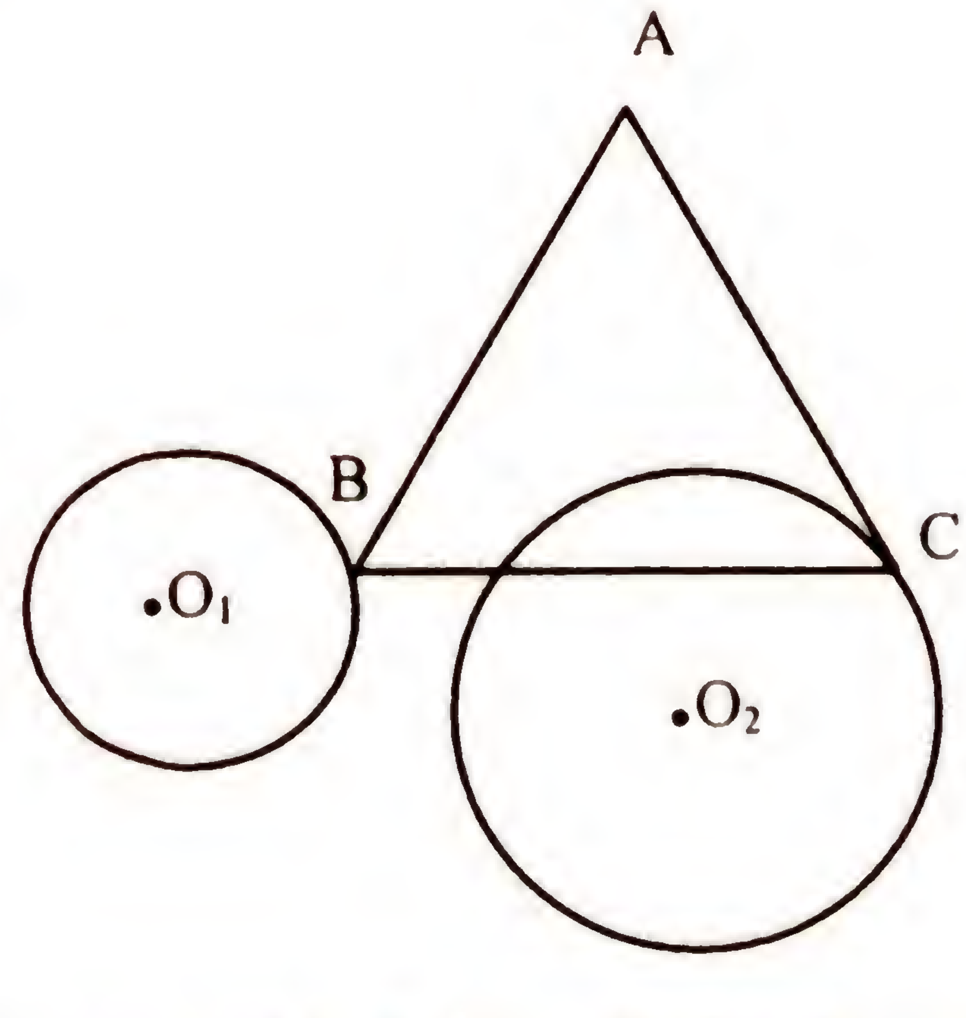
Đường trung trực của cung AB cắt cung AB lớn tại I cố định.

Ta có hai tam giác IMA và INB bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow$ IN = IM và $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \varphi$: không đổi nên phép quay tâm I góc $\varphi$ biến M thành N.

Vậy tập hợp điểm N là cung BIB' ảnh của cung AIB qua phép quay tâm I góc $\varphi$

**Ví dụ 14** Cho điểm A dựng tam giác đều ABC theo chiều dương, biết đỉnh B, C lần lượt ở trên hai đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$ cho trước.

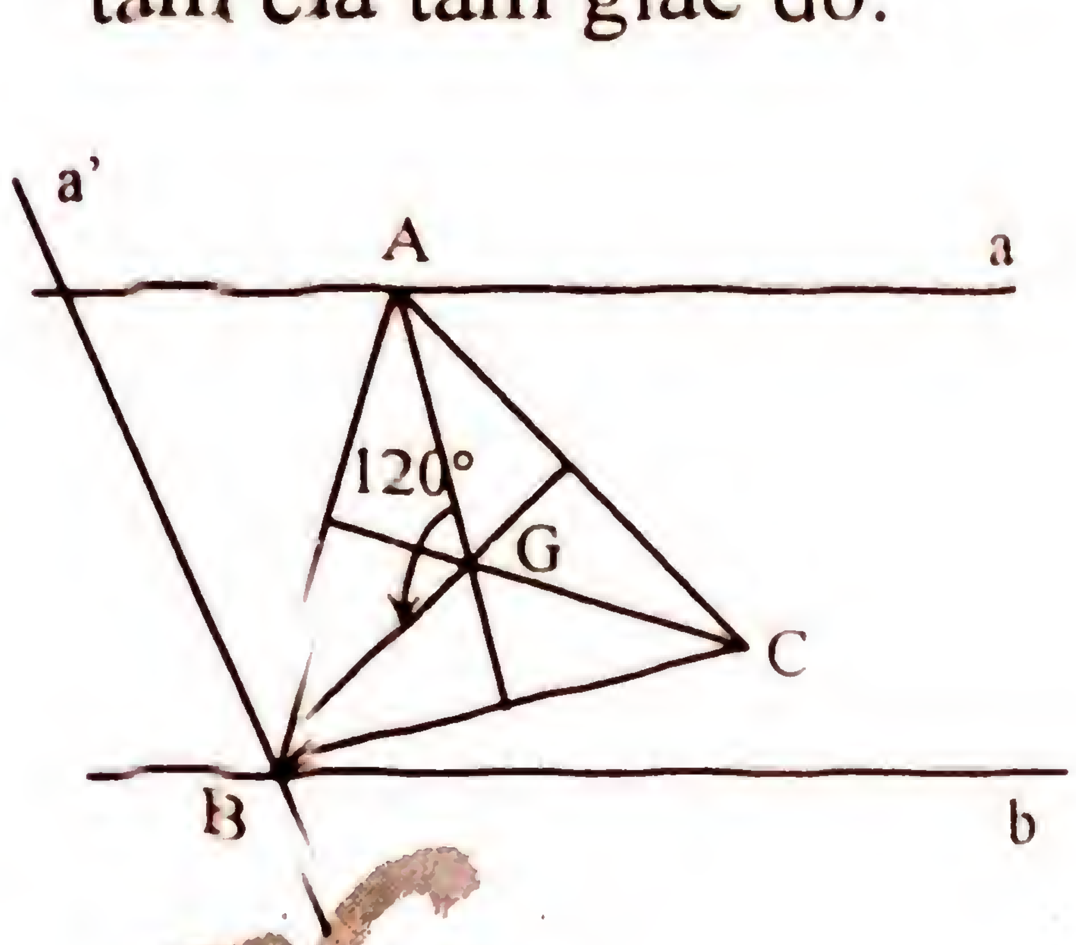



**Giải**

Ta có AB = AC và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^o$ nên C là ảnh của B trong phép quay tâm A góc $60^o$. Do đó C là giao điểm của đường tròn $(O_2)$ với đường tròn $(O'_1)$ là ảnh của $(O_1)$ trong phép quay trên.

Từ đó suy ra đỉnh B.

**Ví dụ 15** Cho hai đường thẳng a, b song song và một điểm G không nằm trên chúng. Xác định tam giác đều ABC có A $\in$ a, B $\in$ c và G là trọng tâm của tam giác đó.




**Giải**

Giả sử đã dựng được $\Delta$ABC thoả mãn các điều kiện

Ta có: GA = GB = GC và

$\widehat{AGB} = \widehat{BGC} = \widehat{CGA} = 120^o$, do đó trong phép quay Q tâm G góc $120^o$ biến A thành B, biến a thành a' nên B = b $\cap$ a'.

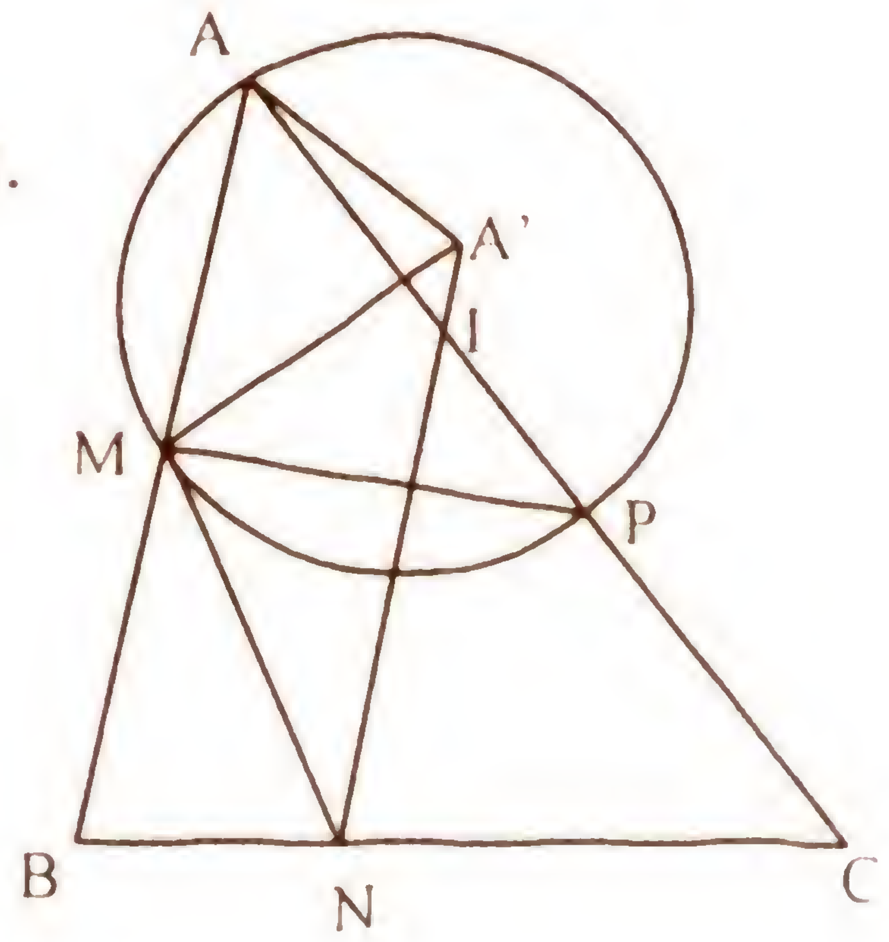
Từ đó suy ra cách dựng:

Dựng: a' là ảnh của a qua phép Q và $B = b \cap a'$. Các đỉnh A, C là ảnh của B qua phép quay tâm G, góc $\pm 120^o$.

Bài toán luôn có hai nghiệm hình, góc quay $\pm 120^o$.

**Ví dụ 16**: Cho tam giác ABC, có góc $A = \varphi$, và một điểm M nằm trên cạnh AB. Dựng trên các đường thẳng BC, CA các điểm N, P tương ứng sao cho MP = MN và đường tròn đi qua A, M, P tiếp xúc với MN.

**Giải**




Giả sử đã dựng được hai điểm:

$N \in BC$, $P \in AC$ thoả mãn các điều kiện.

Ta có $\widehat{NMP} = \widehat{MAP} = \varphi$,

MP = MN nên phép quay Q tâm M, góc $-\varphi$ biến A thành A', PA thành NA'.

Gọi $A'N \cap AC = I$.

Ta có $\widehat{NIC} = (PA, NA') = \varphi$

$\Rightarrow \widehat{NIC} = \widehat{BAC} \Rightarrow IN \parallel AB$.

Từ đó suy ra cách dựng như sau:

– Phép quay tâm M, góc $-\varphi$ biến A thành A'.

– Vẽ $A'N \parallel AB$, $N \in BC$.

– Dựng tia MP cắt AC tại P sao cho $\widehat{NMP} = \varphi$ thì N và P là các điểm cần tìm.

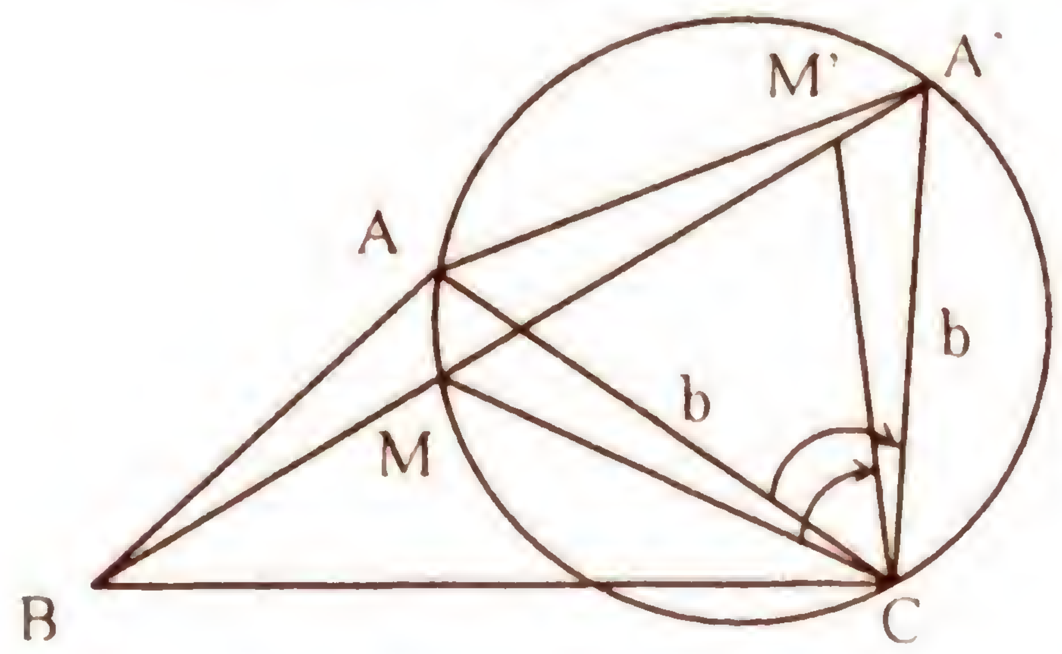
Bài toán có một nghiệm duy nhất.

**Ví dụ 17**: Tam giác ABC có BC = a, AC = b, $\hat{C} = \varphi$ ($\varphi < 120^o$). Tìm điểm M trong mặt phẳng sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất của tổng đó.

**Giải**

Thực hiện phép quay: $Q_{(C;-60^o)}: M \mapsto M', A \mapsto A'$, thì MA = M'A'. Tam giác CMM' đều, nên MM' = CM.

Do đó: $MA + MB + MC = BM + MM' + M'A' \geq A'B$: không đổi




Theo định lí hàm số cosin trong tam giác A'BC:

$$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi + 60^o).$$

Độ dài đường gấp khúc BMM'A' ngắn nhất khi M và M' nằm trên BA', do đó $\widehat{CMA'} = \widehat{CAA'} = 60^o$ nên thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACA'.

Vậy điểm M cần tìm là giao của đường thẳng BA' và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACA'. Độ dài ngắn nhất của tổng là:

$$MA + MB + MC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi + 60^o)}.$$

# DẠNG 6: HÌNH BẰNG NHAU

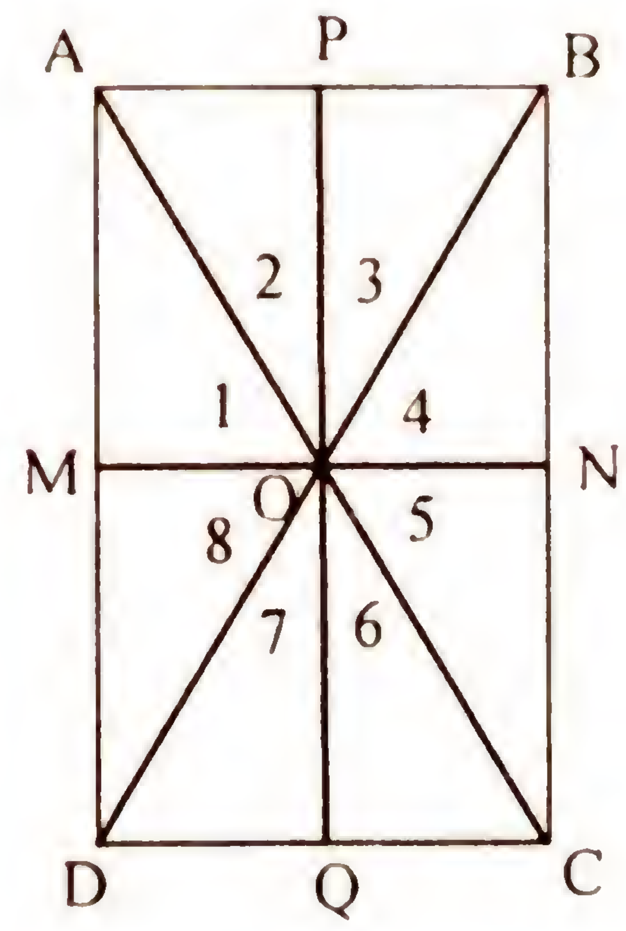
– Nếu ABC và A'B'C' là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

– Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

– Nếu hình $(H_1)$ bằng hình $(H_2)$ và hình $(H_2)$ bằng hình $(H_3)$ thì hình $(H_1)$ bằng hình $(H_3)$.

**Ví dụ 1:** Một hình chữ nhật được chia thành 8 tam giác vuông và đánh số từ 1 đến 8. Hãy tìm các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, phép tịnh tiến thích hợp để biến tam giác 1 lần lượt thành những tam giác còn lại.

**Giải**




– Tam giác 1 biến thành tam giác 2 qua phép đối xứng tâm là trung điểm AO.

– Tam giác 1 biến thành tam giác 3 qua phép đối xứng tâm là trung điểm AO, và phép đối xứng trục PQ.

– Tam giác 1 biến thành tam giác 4 qua phép đối xứng trục PQ.

– Tam giác 1 biến thành tam giác 5 qua phép đối xứng tâm O.

– Tam giác 1 biến thành tam giác 6 qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{AO}$.

– Tam giác 1 biến thành tam giác 7 qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AO}$ và phép đối xứng trục PQ.

– Tam giác 1 biến thành tam giác 8 qua phép đối xứng trục MN.

**Ví dụ 2**: Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

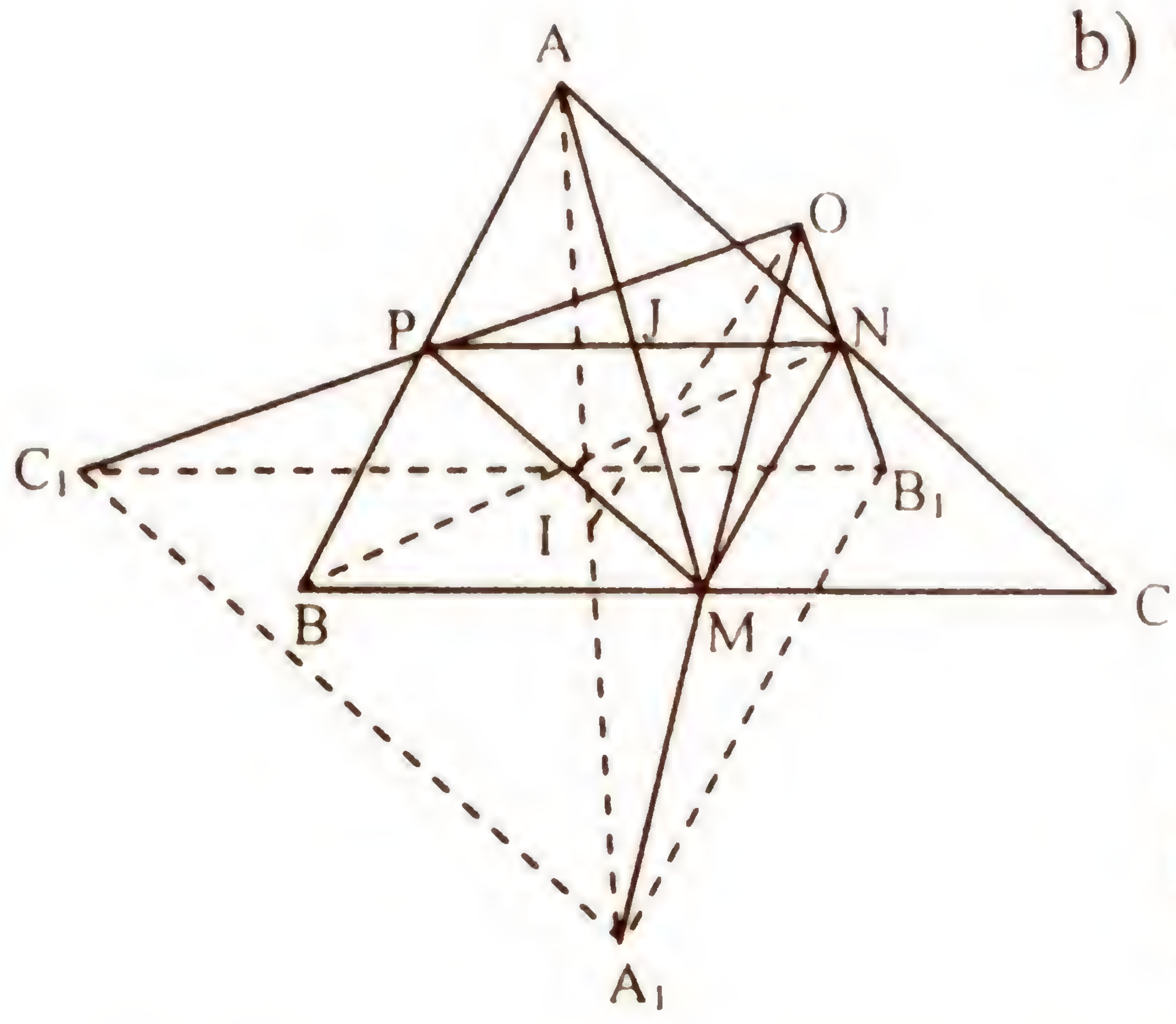
a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NMC, MNP. Tìm phép dời hình biến tam giác APN lần lượt thành một trong ba tam giác còn lại.

b) Xét tam giác có ba đỉnh là trực tâm của ba tam giác APN, PBM và NCM. Chứng minh tam giác đó bằng tam giác APN. Chứng minh điều đó cũng đúng nếu thay trực tâm bằng trọng tâm, hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp, hoặc tâm đường tròn nội tiếp.

**Giải**

a) Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AP}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM. Phép tịnh tiến vecơ $\overrightarrow{AN}$ biến tam giác APN thành tam giác NMC.

Phép đối xứng tâm J là trung điểm của PN, biến tam giác APN thành tam giác MNP.




b) Gọi $H_1$, $H_2$, $H_3$ lần lượt là trực tâm của các tam giác APN, PBM, NMC. Phép tịnh tiến $\overrightarrow{AP}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM nên biến $H_1$ thành $H_2$, tức là $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{AP}$ nên $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2}$. Suy ra $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2} = \overrightarrow{NH_3}$. Do đó phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AH_1}$ biến tam giác APN thành tam giác $H_1H_2H_3$.

Đối với trọng tâm tam đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, chứng minh hoàn toàn tương tự.

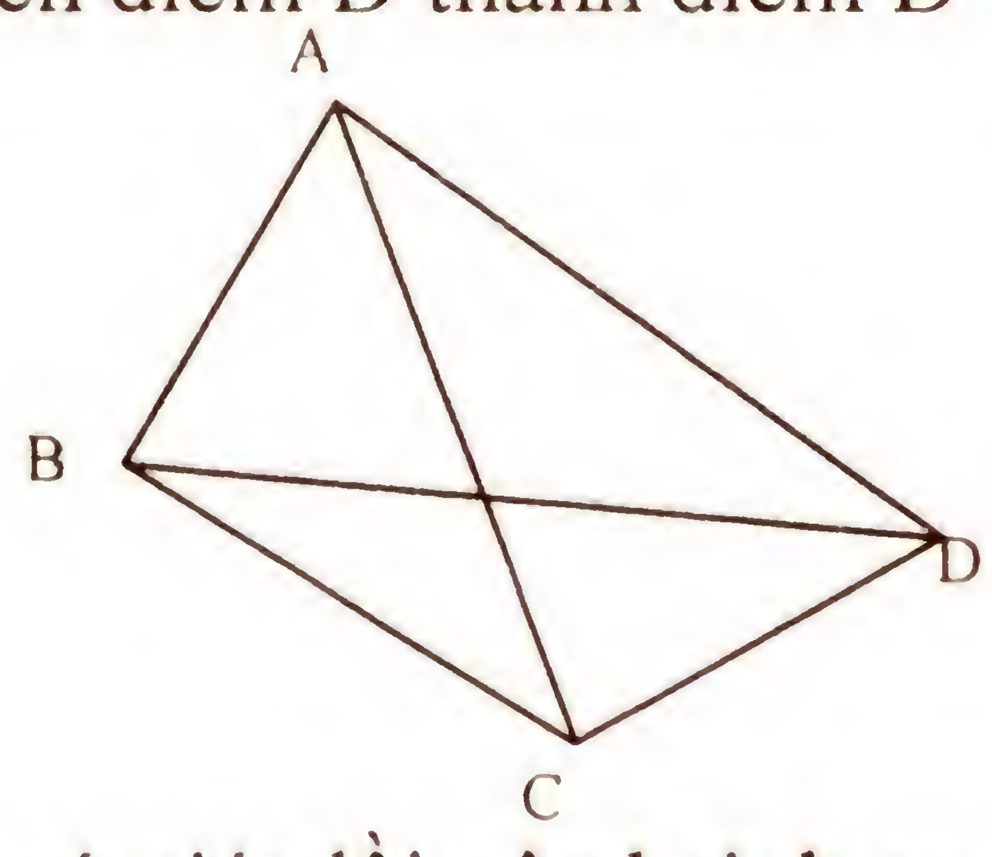
**Ví dụ 3**: a) Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

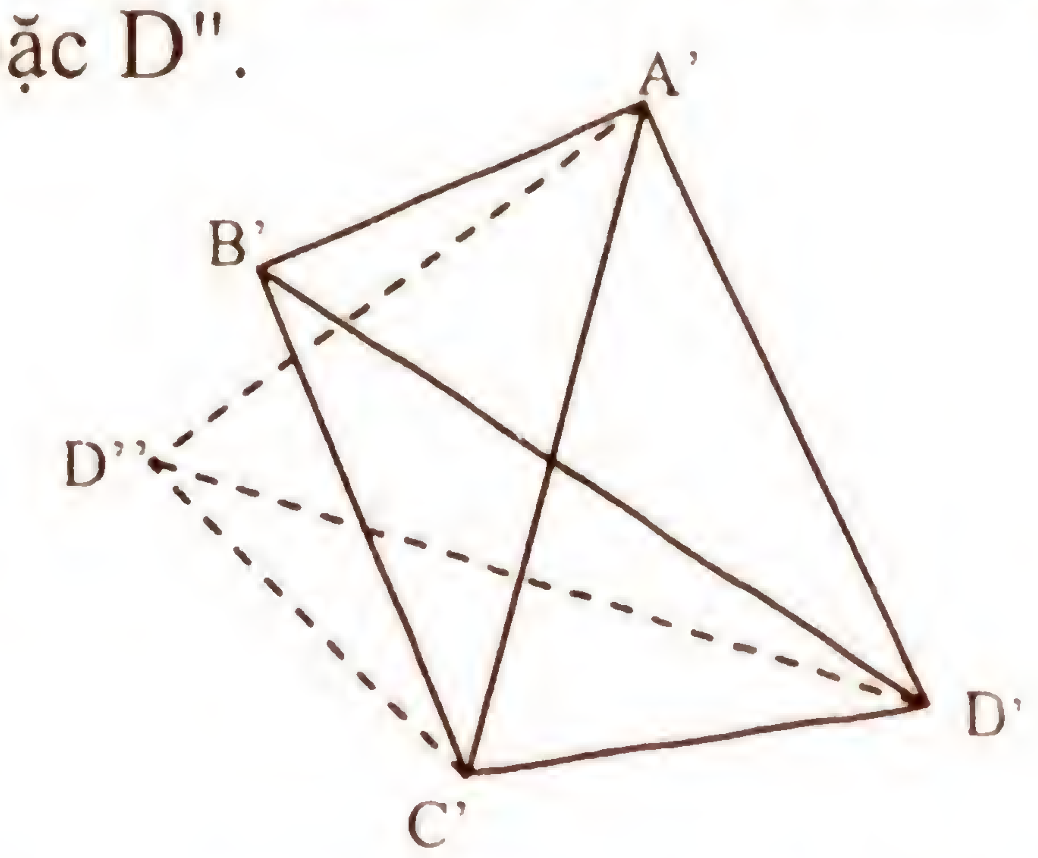
b) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

c) Hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không?

**Giải**

a) Giả sử hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A' và AC = A'C'. Khi đó hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau nên có phép dời hình F biến ba điểm A, B, C lần lượt thành ba điểm A', B', C'. Gọi D" là điểm đối xứng của D' qua A'C' thì hai tam giác A'C'D' và A'C'D" bằng nhau nên cùng bằng tam giác ACD. Do đó phép F chỉ có thể biến điểm D thành điểm D' hoặc D".




Vì ABCD là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau, A'B'C'D' cũng là tứ giác lồi nên hai đoạn thẳng A'C' và B'D' cắt nhau, và do đó hai đoạn thẳng A'C' và B'D" không cắt nhau. Từ đó ta suy ra F biến D thành D'. Vậy F biến tứ giác ABCD thành tứ giác A'B'C'D' và do đó hai tứ giác đó bằng nhau.

b) Giả sử hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A' và góc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Khi đó AC = A'C' nên đưa về trường hợp ở câu a).

c) Có thể không bằng nhau. Hai hình thoi có cạnh bằng nhau nhưng có thể là hai hình không bằng nhau.

**Ví dụ 4**: Đa giác lồi n cạnh gọi là n – giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n–giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.

**Giải**

Theo định nghĩa, hai n–giác đều bằng nhau thì cạnh bằng nhau. Ngược lại giả sử hai n–giác đều $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ có cạnh bằng nhau. Khi đó nếu gọi O và O' lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đó thì hai tam giác $OA_1A_2$ và $O'A'_1A'_2$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến tam giác $OA_1A_2$ thành tam giác $O'A'_1A'_2$. Vì hai tam giác $OA_2A_3$ và $O'A'_2A'_3$ cũng bằng nhau nên F biến điểm $A_3$ thành điểm $A'_3$ (vì $A_3$ không thể biến thành $A'_1$). Tương tự F biến các điểm $A_4$, ..., $A_n$ lần lượt thành các điểm $A'_4$, ..., $A'_n$. Vậy hai n–giác đều đã cho bằng nhau.

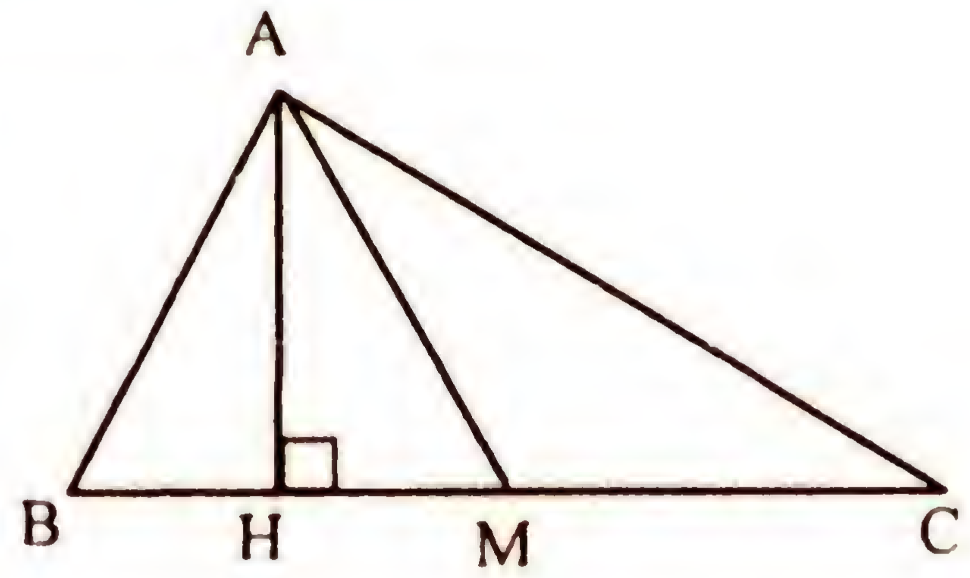
**Ví dụ 5:** Hình $(H_1)$ gồm ba đường tròn $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$ và $(O_3; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình $(H_2)$ gồm ba đường tròn $(I_1; r_1)$, $(I_2; r_2)$ và $(I_3; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình $(H_1)$ và $(H_2)$ bằng nhau.

**Giải**

Hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $I_1I_2I_3$ có các cạnh bằng nhau $O_1O_2 = I_1I_2 = r_1 + r_2$, $O_2O_3 = I_2I_3 = r_2 + r_3$, $O_3O_1 = I_3I_1 = r_3 + r_1$ nên có phép dời hình F biến ba điểm $O_1$, $O_2$, $O_3$ lần lượt thành ba điểm $I_1$, $I_2$, $I_3$. Khi đó F biến ba đường tròn $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$, $(O_3; r_3)$ lần lượt thành ba đường tròn $(I_1; r_1)$, $(I_2; r_2)$, $(I_3; r_3)$, tức là biến hình $(H_1)$ thành hình $(H_2)$. Vậy hai hình $(H_1)$ và $(H_2)$ bằng nhau.

**Ví dụ 6**: Chứng minh rằng hai tam giác vuông bằng nhau nếu có các cạnh huyền bằng nhau và đường cao ứng với cạnh huyền bằng nhau.

**Giải**



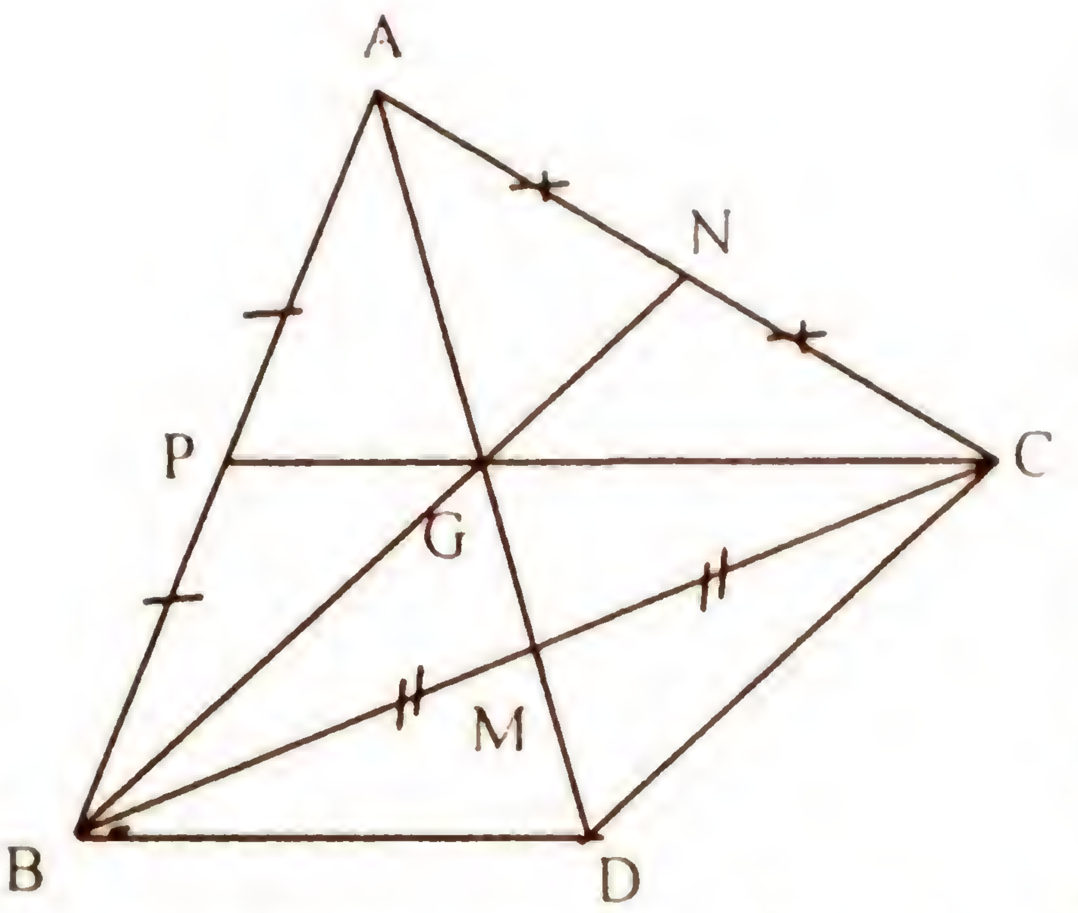

Cho hai tam giác ABC, A'B'C' vuông tại các đỉnh A, A'. Có BC = B'C' và hai đường cao AH, A'H' bằng nhau. Gọi AM, A'M' là các đường trung tuyến thì AM = A'M' và do đó hai tam giác vuông AHM và A'H'M' bằng nhau.

Gọi F là phép dời hình biến tam giác AHM thành tam giác A'H'M' thì F biến đoạn thẳng BC thành đoạn thẳng B'C' hoặc thành đoạn thẳng C'B'. Vậy hai tam giác đã cho bằng nhau.

**Ví dụ 7**: Chứng minh rằng nếu ba trung tuyến của tam giác ABC lần lượt bằng ba trung tuyến của tam giác A'B'C' thì hai tam giác đó bằng nhau.

**Giải**

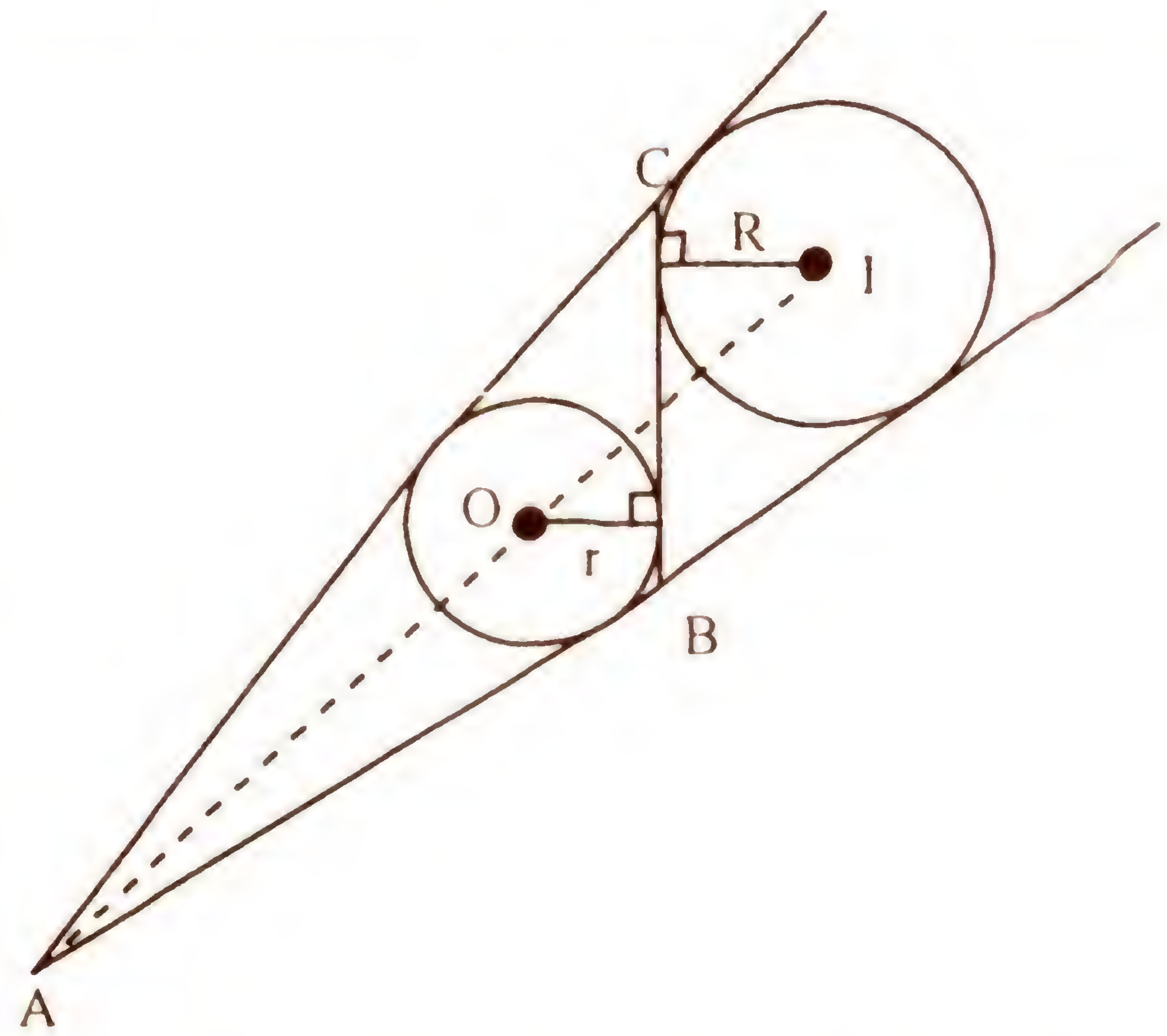
Giả sử tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G và tam giác A'B'C' có ba trung tuyến A'M', B'N', C'P' cắt nhau tại G', và AM = A'M', BN = B'N', CP = C'P'.




Lấy điểm D và D' sao cho BGCD và B'G'C'D' là những hình bình hành. Ta có hai tam giác GCD và G'C'D' bằng nhau. Bởi vậy, có một phép dời hình F biến G, C, D lần lượt thành các điểm G', C', D'. Rõ ràng khi đó F biến A thành A', B thành B' nên hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

**Ví dụ 8:** Chứng minh rằng hai tam giác bằng nhau nếu có các đường tròn nội tiếp bằng nhau, một cặp đường tròn bàng tiếp bằng nhau, đồng thời khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp đó của hai tam giác cũng bằng nhau.

**Giải**



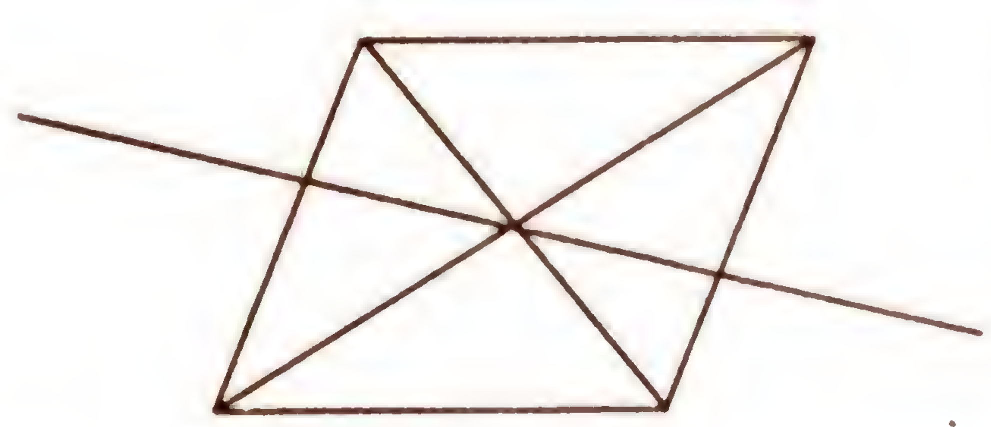

Giả sử tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (O; r), đường tròn bàng tiếp góc A là (I; R), tam giác A'B'C' có đường tròn nội tiếp (O'; r), đường tròn bàng tiếp (I'; R) đồng thời OI = O'I'.

Vì OI = O'I' nên có phép dời hình F biến O thành O' và I thành I', do đó F biến (O; r) thành (O'; r) và biến (I; R) thành (I'; R), Khi đó F biến cặp tiếp tuyến chung ngoài AB và AC của hai đường tròn (O) và (I) thành cặp tiếp tuyến chung ngoài A'B' và A'C (hoặc thành A'C' và A'B') còn tiếp tuyến chung BC phải biến thành tiếp tuyến chung B'C'.

Suy ra F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' hoặc thành tam giác A'C'B', tức là hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

**Ví dụ 9**: Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

**Giải**



Một đường thẳng đi qua tâm O của hình bình hành thì chia hình bình hành đó hành hai phần bằng nhau, vì phép đối xứng qua tâm O sẽ biến phần này thành phần kia. Do đó, vẽ đường thẳng đi qua 2 tâm của chúng thì chia mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.

Nếu tâm hai hình bình hành trùng nhau thì mọi đường thẳng đi qua tâm chung đều chia mỗi hình bình hành thành hai phần bằng nhau.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy, phép biến hình nào sau đây là phép dời hình:
   a) Phép biến hình $F_1$ biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x+2; y+2)$.
   b) Phép biến hình $F_2$ biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(3x; 3y)$.
   **ĐS:** a) phép dời hình      b) không phải là phép dời hình
2. Cho phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'. Phép biến hình biến ngược lại M' thành M gọi là phép biến hình đảo ngược của phép biến hình F. Xác định phép biến hình đảo ngược của phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay.

   **ĐS:** phép biến hình đảo ngược của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{v}$, của phép đối xứng trục d chính là phép đối xứng trục d, của phép đối xứng tâm O chính là phép đối xứng tâm O, của phép quay tâm O góc quay $\varphi$ là phép quay tâm O góc quay $-\varphi$.
3. Cho hai điểm A, B và đường thẳng d, đường tròn (C). Dựng hai điểm $C \in d$, $D \in (C)$ để ABCD là hình bình hành.

   **HD:** dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$
4. Dựng hình thang ABCD có AB // CD, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d cho trước.

   **HD:** dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ xác định
5. Dựng tứ giác ABCD biết AB = a, BC = b, CD = c và góc $\hat{A} = \alpha, \hat{D} = \beta$ cho trước.

   **HD:** dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ xác định
6. Cho hình vuông ABCD cạnh a tâm O. Tìm M, N thuộc cạnh AB, DC sao cho MN // BC và OM + MN + NB bé nhất.

   **HD:** dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$ xác định và phép đối xứng trục là đường thẳng AB
7. Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, B cố định, còn đỉnh C thay đổi trên một đường thẳng d. Tìm quỹ tích đỉnh D.
8. Cho điểm O cố định và một đường thẳng a cố định. Xét các đường tròn (I; R) có bán kính R không đổi và luôn đi qua điểm O. Gọi BB' là đường kính của (I; R) sao cho BB' // a. Tìm quỹ tích của B và B'.

   **HD:** dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{IB} = \vec{v}$ xác định
9. Cho tam giác MAN cân tại M và N lưu động trên tia Ax cố định. Tìm quỹ tích đỉnh M biết đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN có bán kính R cho trước.
10. Cho hình thoi ABCD cạnh a lưu động mà 2 đường chéo AC, BD qua I, J cố định, IJ vuông góc với AB. Tìm quỹ tích trung điểm BC và đỉnh A.

    **HD:** dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ xác định

**11.** Chứng minh tứ giác lồi có tổng 2 cạnh đối bằng 2 lần đoạn nối trung điểm 2 cạnh còn lại là 1 hình thang.

**12.** Cho tam giác ABC, vẽ hình vuông BCDE ra phía ngoài. Hạ DI $\perp$ AB, EK $\perp$ AC, AH $\perp$ BC. Chứng minh 3 đường thẳng đó đồng quy.

**HD:** dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BE}$

**13.** Cho hai đường thẳng a và a'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng này thành đường thẳng kia?

**HD:** xét 3 vị trí tương đối của 2 đường thẳng

**14.** Cho đường tròn (O, r), đường thẳng $\Delta$ và một đường thẳng d. Hãy xác định hai điểm M và M' lần lượt nằm trên đường tròn, đường thẳng $\Delta$ sao cho d là trung trực của đoạn thẳng MM'.

**HD:** dùng phép đối xứng trục d

**15.** Cho A, B không thuộc đoạn MN. Tìm X thuộc MN để $\widehat{MXA} = 2\widehat{NXB}$.

**16.** Cho A, B không thuộc đường thẳng d. M lưu động trên d. Tìm GTNN và GTLN của

a) $P = MA + MB$ b) $Q = |MA - MB|$.

**HD:** xét A, B khác phía đối với d và A, B cùng phía đối với d.

**17.** Cho tam giác ABC nhọn. Dựng 3 điểm M, N, P thuộc 3 cạnh BC, CA, AB mà tam giác MNP có chu vi bé nhất.

**HD:** M, N, P là 3 chân đường cao của tam giác ABC

**18.** Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có B, C cố định còn A lưu động. Tìm quỹ tích :

a) Điểm đối xứng A' của A qua BC.

b) Trực tâm H.

**19.** Trong góc nhọn xOy cho tia Oz cố định. M lưu động trên Oz có điểm đối xứng qua Ox, Oy là $M_1$, $M_2$. Tìm quỹ tích trung điểm I của $M_1$, $M_2$.

**HD:** tìm quỹ tích của $M_1$, $M_2$ rồi suy ra quỹ tích trung điểm I

**20.** Cho đường thẳng d đi qua trực tâm H của tam giác ABC. Chứng minh 3 đường thẳng đối xứng của d qua 3 cạnh đồng quy tại 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp.

**21.** Tìm trục đối xứng và tâm đối xứng của hình quạt, hình viên phân.

**22.** Xác định ảnh của điểm A(3;–2), đường thẳng d: $3x - 6y + 1 = 0$ và đường tròn $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ qua:

a) tâm I(1; 3) b) đường thẳng $\Delta: 2x + y - 5 = 0$

**23.** Cho hai đường tròn (O) và (O') và một điểm A. Tìm hai điểm M và N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho A là trung điểm của MN.

**HD:** phép đối xứng tâm A

**24.** Cho I ở trong góc xOy. Dựng đường thẳng d qua I cắt Ox, Oy tại A, B mà I trung điểm đoạn AB.

**25.** Dựng tứ giác biết trước 4 trung điểm của 4 cạnh.

**HD:** Nếu 4 trung điểm là 4 đỉnh của hình bình hành thì có vô số tứ giác, còn ngược lại thì không tồn tại.

**26.** Dựng n– giác biết trước n trung điểm của n cạnh

**27.** Cho hình bình hành ABCD có A, C cố định. Tìm quỹ tích D khi B lưu động trên đường tròn (O).

**28.** Cho M lưu động trên đường thẳng d và I cố định. Tìm quỹ tích các điểm N sao cho I là trung điểm MN.

**29.** Cho tam giác ABC có 2 trung tuyến AM, CN mà $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$. Chứng minh tam giác ABC đều.

**30.** Cho hai đường tròn bằng nhau tiếp xúc ngoài tại M. Ba đường thẳng qua M cắt $(O_1)$ và $(O_2)$ tại $A_1$, $B_1$, $C_1$ và $A_2$, $B_2$, $C_2$.
Chứng minh M là trung điểm đoạn nối tâm hai đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$.
**HD:** dùng phép đối xứng tâm M

**31.** Cho hình bình hành MNPQ nội tiếp hình bình hành ABCD (4 đỉnh nằm trên 4 cạnh). Chứng minh hai hình bình hành có cùng tâm đối xứng.

**32.** Tìm ảnh của tam giác đều ABC tâm O qua phép quay:
a) Tâm quay A góc quay $60^0$.
b). Tâm quay O góc quay $120^0$.
**HD:** dùng định nghĩa

**33.** Cho điểm A, đường tròn (O) và đường thẳng d. Tìm ảnh của (O) và d qua phép quay tâm A góc $90^0$.

**34.** Chứng minh phép quay:
a) Bảo toàn độ dài đoạn thẳng và tính thẳng hàng của 3 điểm.
b) Góc của đường thẳng và ảnh của nó bằng đúng góc quay.
**HD:** dùng định nghĩa, hệ thức Salơ

**35.** Cho tam giác đều ABC và M bất kỳ. Chứng minh đoạn lớn nhất trong 3 đoạn MA, MB, MC thì không lớn hơn tổng 2 đoạn còn lại.
**HD:** dùng phép quay tâm B góc $60^0$

**36.** Cho 3 đường thẳng a, b, c song song đôi một. Lấy $A \in a$. Dựng điểm $B \in b$ và điểm $C \in c$ sao cho tam giác ABC đều.
**HD:** dùng phép quay tâm A góc $60^0$

**37.** Cho tam giác ABC. Dựng 2 đường tròn bằng nhau $(C_1)$ qua A, B và $(C_2)$ qua A, C mà 2 tiếp tuyến tại A vuông góc nhau.

**38.** Cho hình vuông ABCD tâm O cố định, A lưu động trên đường thẳng d.
a) Tìm quỹ tích đỉnh B, D.
b) Tìm quỹ tích đỉnh C.

**39.** Cho $A \in (O)$ và M lưu động trên (O). Tìm quỹ tích :
a) Đỉnh thứ 3 của tam giác đều AMK.
b) Đỉnh thứ 4 của hình bình hành OAMN.

**40.** Tam giác ABC đều, tìm M trong tam giác ABC để MA + MB + MC bé nhất.

**41.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^0$. Tìm $M \in AB$, $N \in AC$ sao cho $BC = 2MN$ và $BM = CN$.

**42.** Cho góc vuông xOy. Trên tia phân giác Ot lấy A, đặt OA = a. Đường tròn lưu động qua O, A cắt Ox, Oy tại M, N.

a) Tìm phép quay tâm A biến M thành N.

b) Chứng minh OM + ON không đổi.

c) Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

**ĐS:** c ) trung trực của OA

**43.** Tìm các điểm bất động (điểm không thay đổi qua phép biến hình) qua phép $Đ_o$, $Đ_d$, $T_{\vec{v}}$, $Q_{(o;\varphi)}$.

**HD:** dùng định nghĩa của các phép $Đ_o$, $Đ_d$, $T_{\vec{v}}$, $Q_{(o;\varphi)}$ và cho điều kiện M trùng ảnh M'

**44.** Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Chứng minh hai tam giác AHB và AHC bằng nhau.

**HD:** dùng phép đối xứng trục AH

**45.** Cho tam giác ABC đều tâm O. Chứng minh ba tam giác OAB, OBC và OCA bằng nhau.

**HD:** dùng phép đối xứng trục hoặc phép quay

**46.** Chứng minh hai hình chữ nhật có cùng chiều dài và chiều rộng thì bằng nhau.

**47.** Chứng minh hai ngũ giác đều nội tiếp trong hai đường tròn bằng nhau thì bằng nhau.

**HD:** dùng hợp thành của phép tịnh tiến và phép quay

**48.** Cho phép tịnh tiến $\overrightarrow{AA'}$ biến hình bình hành ABCD thành A'B'C'D'.
Chứng minh: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC'}$

**49.** Cho tam giác ABC cân tại C. Lấy $M \in AC$, $N \in BC$ sao cho CM + CN = AC. Chứng minh 3 trung điểm AC, BC, MN thẳng hàng.

**50.** Cho M trong tam giác ABC. Dựng $N \in AC$, $P \in BC$ sao cho tam giác MNP cân tại M và PN song song AB.

**HD:** dùng phép đối xứng trục

**51.** Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia AB lấy điểm P, trên tia đối của tia CD lấy điểm Q. Hãy xác định một điểm M trên cạnh BC và một điểm N trên cạnh AD sao cho MN song song CD và tổng PN + QM nhỏ nhất.

**HD:** dùng phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AB}$.

# §3. PHÉP ĐỒNG DẠNG

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• PHÉP VỊ TỰ:

– Cho điểm O và một số k $\neq 0$. Phép biến hình biến một điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

– Nếu M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N qua phép vị tự tỉ số k thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$; $M'N' = |k|.MN$.

– Phép vị tự tỉ số k biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy; biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thành đoạn thẳng; biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho; biến góc thành góc bằng nó; biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

– Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

• PHÉP ĐỒNG DẠNG:

– Phép biến hình G gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có M'N' = kMN.

– Mọi phép đồng dạng F tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

– Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR, biến góc thành góc bằng nó.

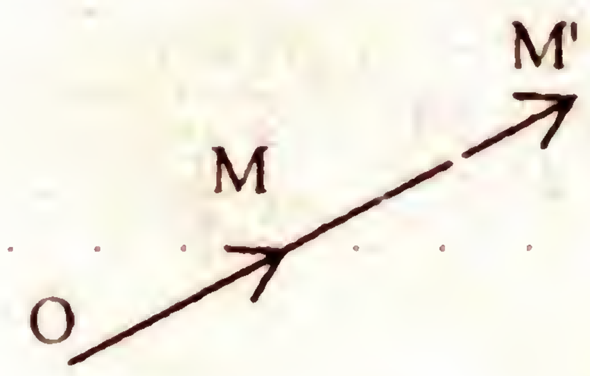
– Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: PHÉP VỊ TỰ

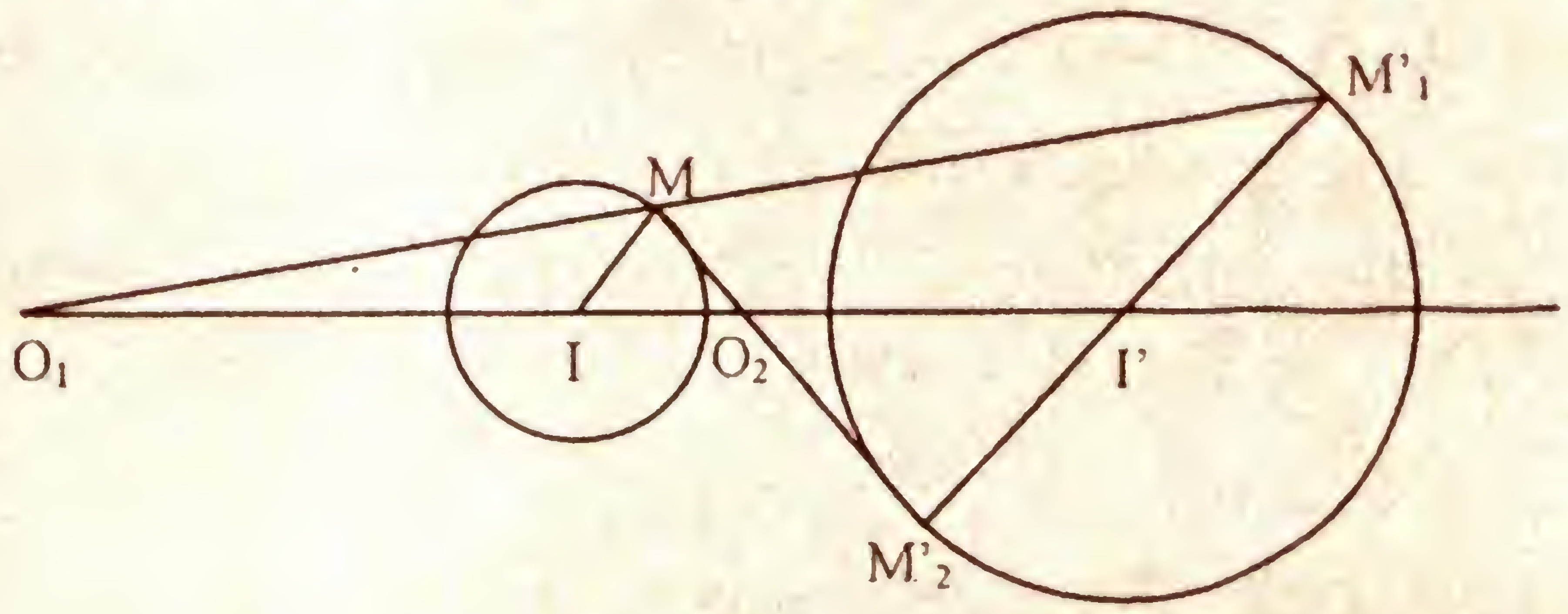
Cho một điểm O cố định và một số k không đổi $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k.

Kí hiệu phép vị tự bởi chữ V, nếu cần nói rõ tâm O và tỉ số k thì kí hiệu là $V_{(O, k)}$.



Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

Nếu có phép vị tự tâm O biến đường tròn này thành đường tròn kia thì O được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn đó. Phép vị tự đó có tỉ số dương thì điểm O gọi là tâm vị tự ngoài, phép vị tự đó có tỉ số âm thì điểm O gọi là tâm vị tự trong.




Hai đường tròn không đồng tâm (I; R) và (I'; R'). Nếu $R \neq R'$ thì có hai tâm vị tự $O_1$ và $O_2$ xác định bởi $\overrightarrow{O_1I'} = k\overrightarrow{O_1I}$ và $\overrightarrow{O_2I'} = -k\overrightarrow{O_2I}$ với $k = \dfrac{R'}{R}$ hoặc là giao điểm của đường nối tâm II' với đường thẳng qua 2 mút của cặp vectơ bán kính cùng hướng $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{I'M'_1}$ và ngược hướng $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{I'M'_2}$. Nếu $R = R'$ chỉ có một tâm vị tự $O_2$, là trung điểm của II', tỉ $k = -1$ chính là phép đối xứng tâm $O_2$.

Chú ý: – Phép vị tự tâm O tỉ số k là một một phép đồng dạng tỉ số $|k|$ nên có các tính chất của phép đồng dạng. Ngoài ra, phép vị tự có tính chất đặc biệt sau: đường thẳng nối một điểm và ảnh của nó luôn luôn đi qua O; ảnh d' của đường thẳng d luôn song song hoặc trùng với d, bảo toàn sự tiếp xúc, ...

– Yếu tố liên quan đến phép vị tự là thẳng hàng và tỉ số không đổi từ đó, vận dụng phép vị tự để giải toán chứng minh, xác định điểm, dựng hình, quỹ tích (tập hợp điểm) ảnh của M khi biết quỹ tích của M, ...

**<u>Ví dụ 1</u>**: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x + y - 4 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 4$.

**Giải**

Lấy A(0; 4) và B(2; 0) thuộc d. Phép vị tự tâm O tỉ $k = 4$, biến A thành A', B thành B'.

Ta có $\overrightarrow{OA'} = 4\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = 4\overrightarrow{OB}$ nên A'(0; 16), B'(8; 0)

Do đó d' là đường thẳng qua A', B' có phương trình đoạn chắn:

$\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{16} = 1 \Leftrightarrow 2x + y - 16 = 0$.

**<u>Ví dụ 2</u>**: Trong mặt phẳng Oxy cho hai parabol có phương trình $y = ax^2$ và $y = bx^2$ $(a \neq b)$. Chứng minh rằng có một phép vị tự biến parabol này thành parabol kia.

**Giải**

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, phép vị tự $V_{(O;\,k)}$ biến điểm M(x; y) thành M' (kx, ky).

Gọi ($P_1$) là parabol: $y = ax^2$ và ($P_2$) là parabol: $y = bx^2$.

Ta chứng minh rằng $V_{(O;\,k)}$: $(P_1) \to (P_2)$ với $k = \dfrac{b}{a}$.

Thật vậy, nếu $M(x_1; y_1) \in (P_1)$ thì $(x_1; y_1) = (x_1; ax_1^2)$ nên ảnh M' có toạ độ:

$$\left(\frac{a}{b}x_1;\frac{a}{b}ax_1^2\right) = \left(\frac{a}{b}x_1;b\left(\frac{a}{b}x_1\right)^2\right) = (x_2;bx_2^2) \in (P_2)\text{: đpcm.}$$

**Ví dụ 3**: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(2; 1) và B(8; 4). Tìm toạ độ tâm vị tự của hai đường tròn (A; 2) và (B; 4).

**Giải**

Hai đường tròn đã cho không đồng tâm và có bán kính R = 2, R' = 4 nên có hai phép vị tự tỉ $k = \pm\dfrac{R'}{R} = \pm 2$, biến đường tròn (A; 2) thành đường tròn (B; 4). Gọi I(x; y) là tâm vị tự, ta có:

$$\overrightarrow{IB} = \pm 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = \pm 2(2 - x) \\ 4 - y = \pm 2(1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4; y = -2 \\ x = 4; y = 2 \end{array}\right.$$

Vậy tâm vị tự ngoài là I(−4; −2) và tâm vị tự trong là I'(4; 2).

**Ví dụ 4**: Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:

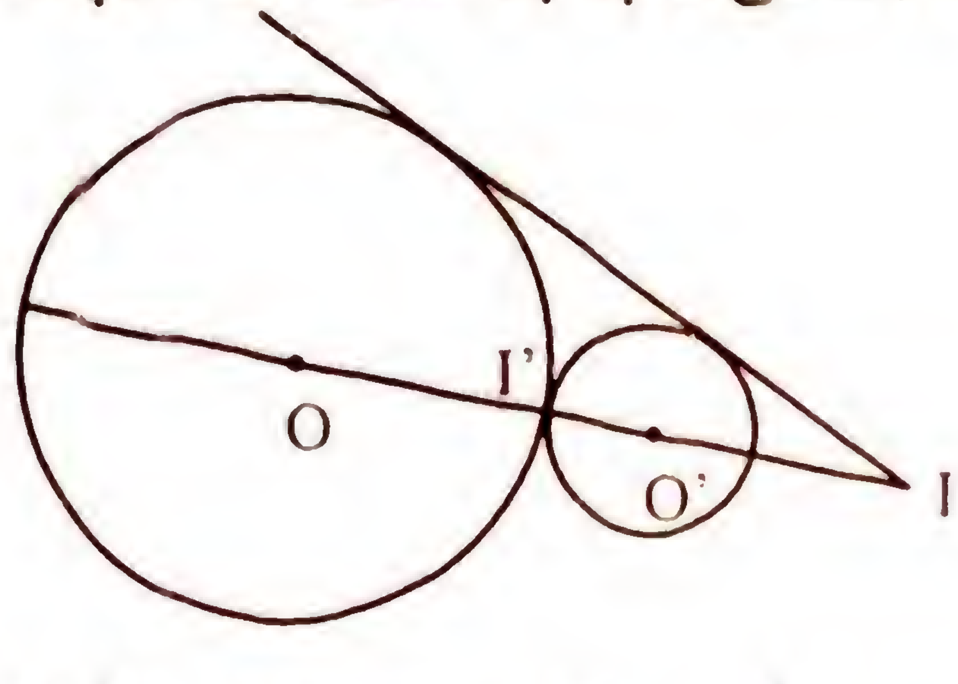
a) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

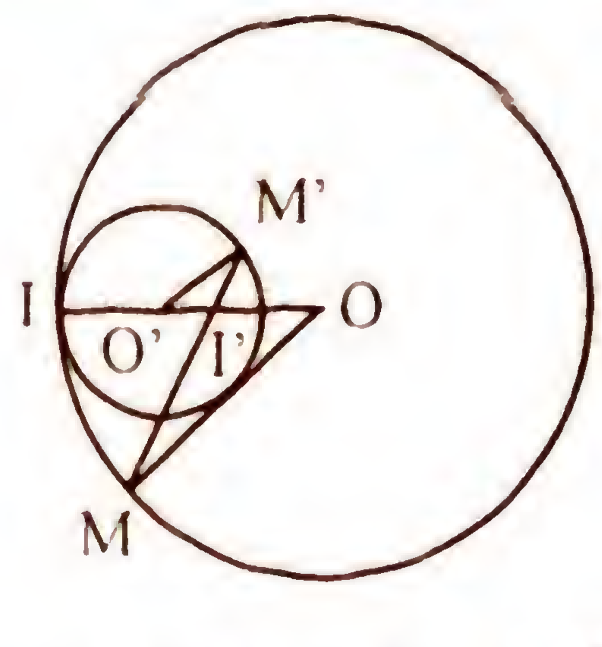
b) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

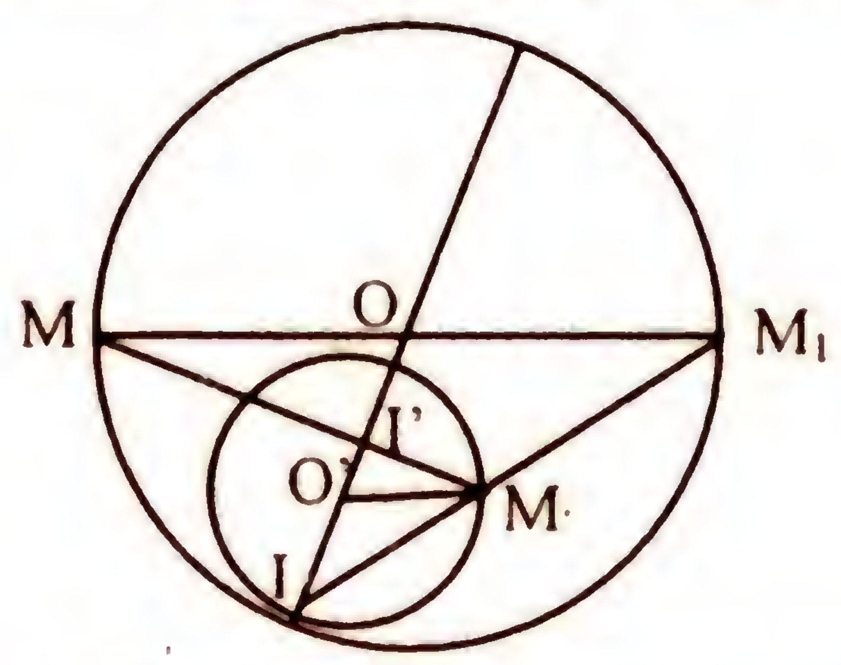
c) Một đường tròn chứa đường tròn kia.

**Giải**

Gọi I là tâm vị tự ngoài, I' là tâm vị tự trong của hai đường tròn (O) và (O').








a) Nếu (O) và (O') tiếp xúc ngoài thì tiếp điểm I' là tâm vị tự trong, giao điểm của OO' với tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O') nếu có là tâm vị tự ngoài.

b) Nếu (O) và (O') tiếp xúc trong thì tiếp điểm I là tâm vị tự ngoài, tâm vị tự trong I' là giao điểm của OO' và MM' trong đó $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{O'M'}$ là 2 vectơ bán kính ngược hướng của (O) và (O').

c) Nếu (O) chứa (O') thì xác định I và I' qua các cặp vectơ bán kính cùng hướng và ngược hướng. Đặc biệt, khi O trùng O' thì I và I' trùng O.

**Ví dụ 5:** Các khẳng định sau đây có đúng không?

a) Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

b) Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động.

c) Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

**Giải**

a) Đúng. Tâm vị tự là điểm bất động.

b) Sai. Phép vị tự tỉ số k = 1 có mọi điểm đều là điểm bất động.

c) Đúng. Phép vị tự tâm O luôn có điểm bất động O, nếu nó còn điểm bất động nữa là M (tức là ảnh M' của M trùng với M) thì vì $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ nên k = 1. Vậy phép vị tự đó là phép đồng nhất nên mọi điểm đều bất động.

**Ví dụ 6:** Các phép sau đây có phải là phép vị tự hay không: phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$?

**Giải**

– Phép đối xứng qua tâm O là phép vị tự tâm O tỉ số –1.

– Phép đối xứng trục không phải là phép vị tự vì các đường thẳng nối cặp điểm tương ứng không đồng quy.

– Phép đồng nhất là phép vị tự với tâm là điểm bất kì và tỉ số k = 1.

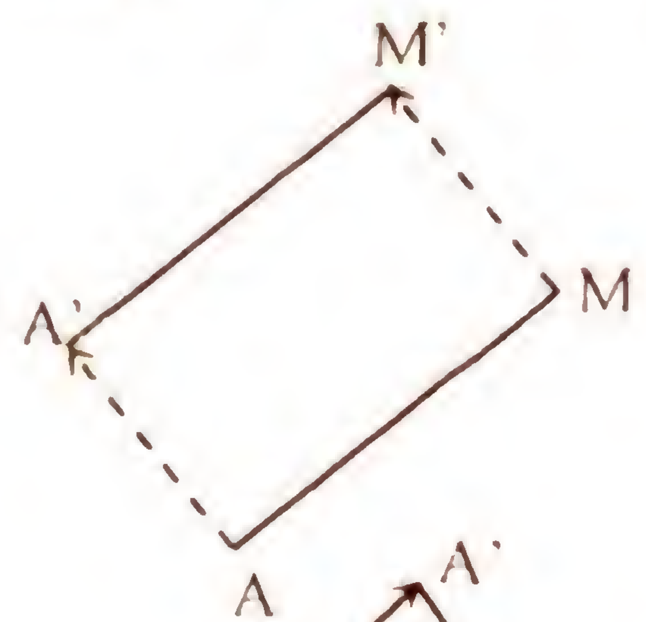
– Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$ không phải là phép vị tự vì không có điểm nào biến thành chính nó.

**Ví dụ 7:** Gọi F là phép biến hình có tính chất sau đây: Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.

**Giải**

Lấy một điểm A cố định và đặt A' = F(A). Theo giả thiết, với điểm M bất kì và ảnh M'= F(M), ta có:

$$\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$$

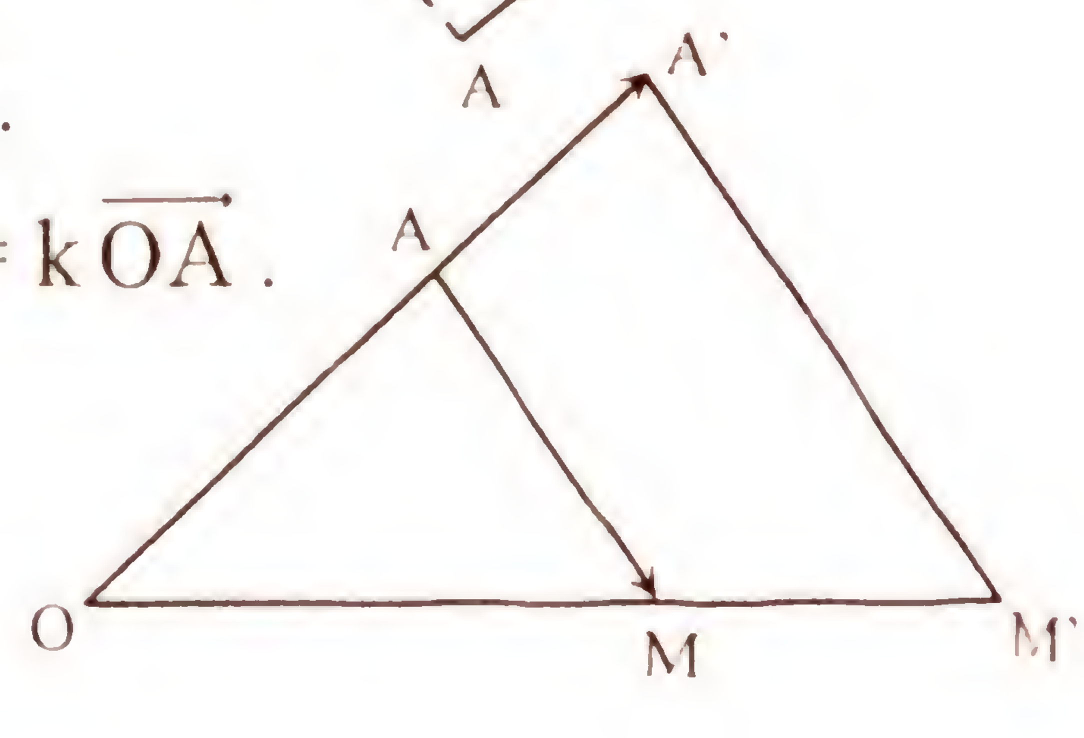



Nếu k = 1, thì $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$

nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$: xác định.

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Nếu k ≠ 1 thì có điểm O sao cho $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.




Ta có $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'}$

$$= k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{OM}$$

Vậy F là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

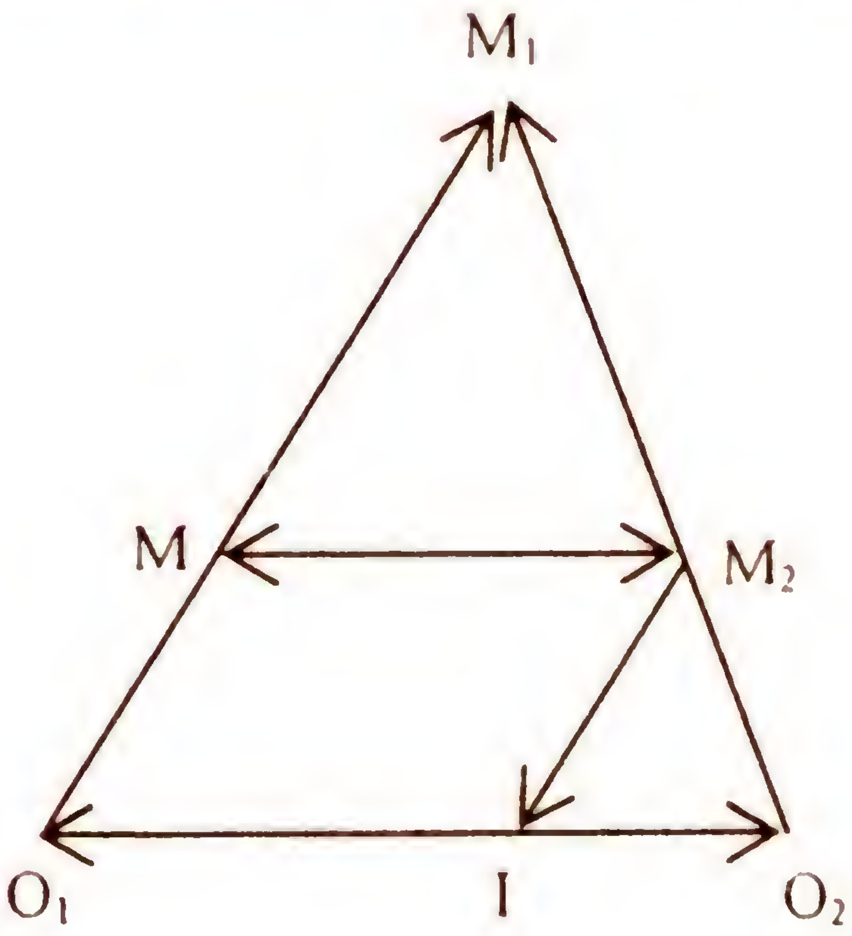
**Ví dụ 8**: Cho hai phép vị tự $V_1$ có tâm $O_1$ tỉ số $k_1$ và $V_2$ có tâm $O_2$ tỉ số $k_2$. Gọi F là hợp thành của $V_1$ và $V_2$. Chứng minh rằng

a) F là một phép tịnh tiến nếu $k_1.k_2 = 1$. Hãy xác định vectơ tịnh tiến.

b) F là một phép vị tự nếu $k_1.k_2 \neq 1$. Hãy xác định tâm và tỉ số của phép vị tự đó.

**Giải**

Lấy một điểm M bất kì, nếu $V_1$ biến M thành $M_1$ và $V_2$ biến $M_1$ thành $M_2$ thì $\overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$ và $\overrightarrow{O_2M_2} = k_2\overrightarrow{O_2M_1}$




Khi đó, phép hợp thành F biến M thành $M_2$.

Gọi I là ảnh của $O_1$ qua phép vị tự $V_2$, tức là:

$\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$

Khi đó: $\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$

a) Nếu $k_1.k_2 = 1$ thì $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M}$ nên

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$ : xác định.

Vậy trong trường hợp này F là phép tịnh tiến theo vectơ

$\vec{u} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$

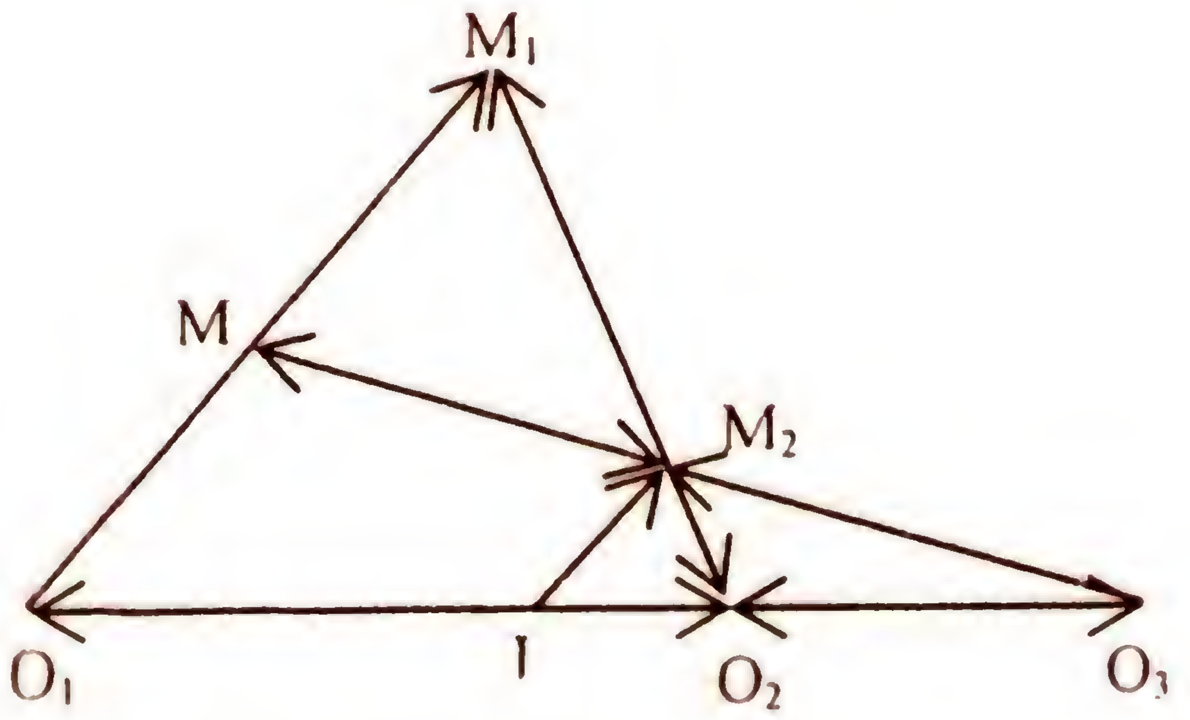
b) Nếu $k_1.k_2 \neq 1$ ta chọn điểm $O_3$ sao cho: $\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

Khi đó: $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = k_1k_2\overrightarrow{O_3M}$

Vậy F là phép vị tự tâm $O_3$ tỉ số $k_1k_2$.

Tâm $O_3$ của phép vị tự đó được xác định bởi đẳng thức

$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$




hay $\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

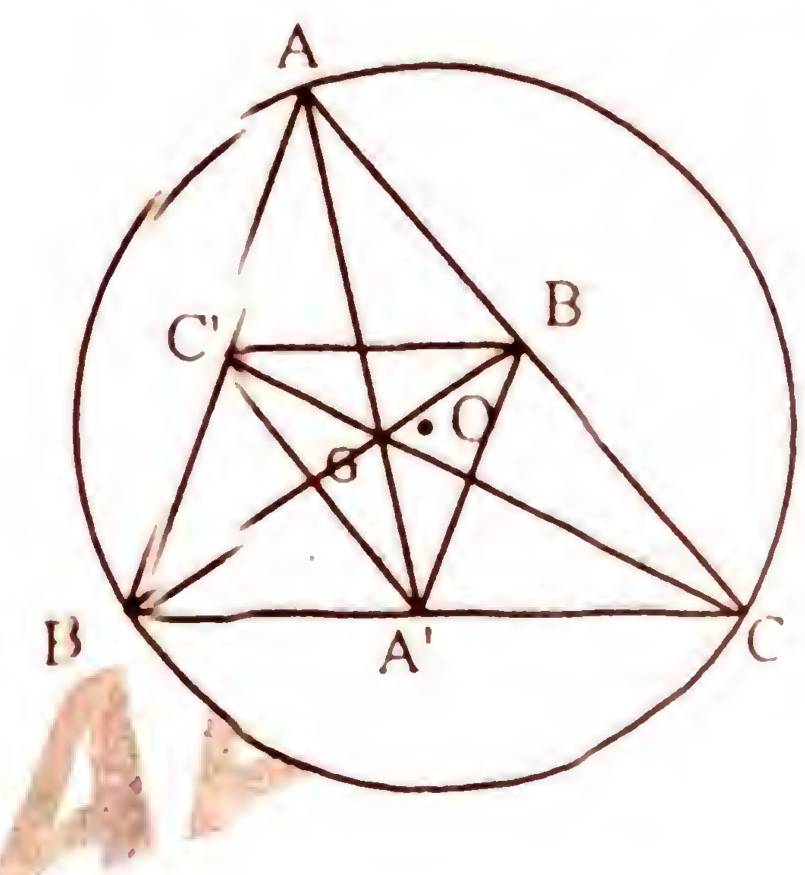
Suy ra $\overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = (1 - k_1k_2)\overrightarrow{O_1O_3}$

Do đó: $\overrightarrow{O_1O_3} = \dfrac{1 - k_2}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$

Do đó tâm của ba phép vị tự $V_1$, $V_2$ và F là ba điểm thẳng hàng.

**Ví dụ 9**: Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ và ba điểm G, H, O cùng nằm trên một đường thẳng (gọi là đường thẳng Ơ–le).

**Giải**




Ta có OA' ⊥ BC mà BC // B'C' nên OA' ⊥ B'C'.

Tương tự OB' ⊥ A'C'. Vậy O là trực tâm của tam giác A'B'C'.

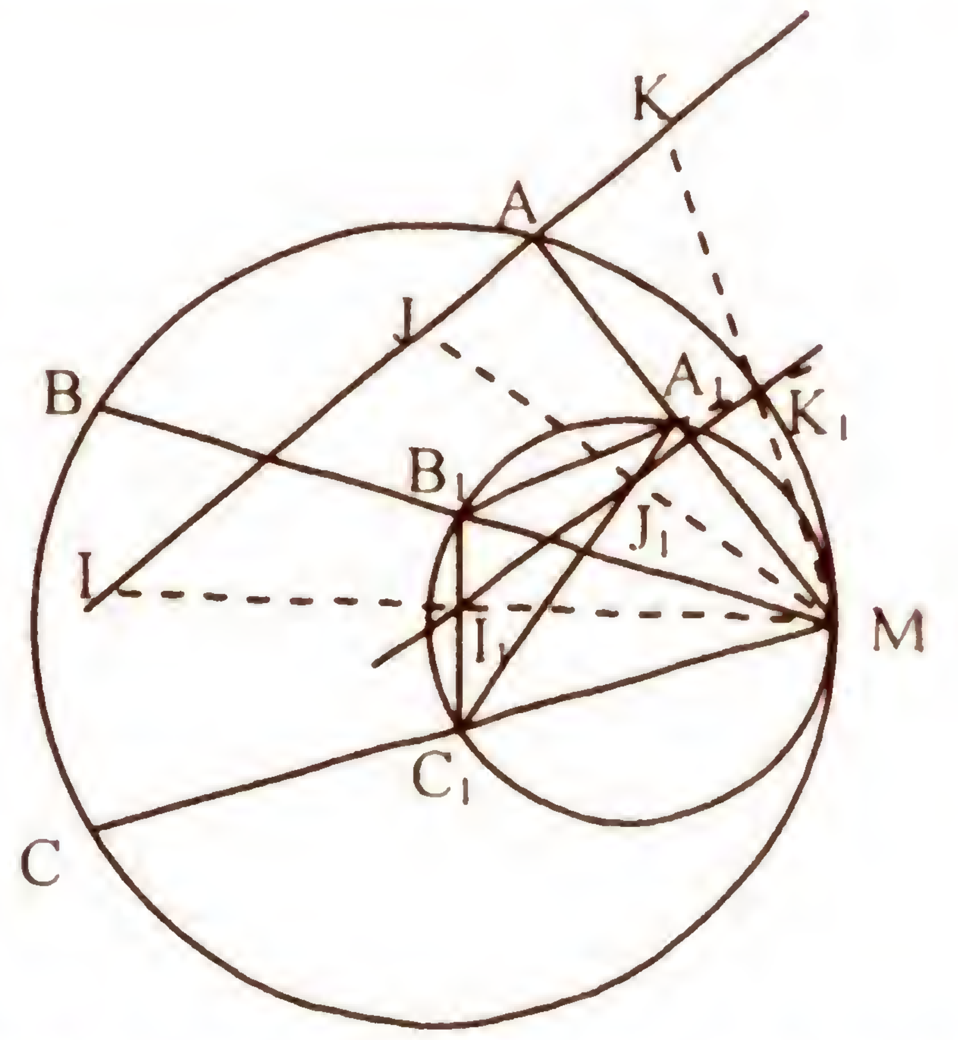
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$.

Do đó phép vị tự V tâm G, tỉ số – 2 biến tam giác A'B'C' thành tam giác ABC. Điểm O là trực tâm của tam giác A'B'C' nên phép vị tự V biến O thành trực tâm H của tam giác ABC.

Do đó $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ nên ba điểm G, H, O thẳng hàng.

**Ví dụ 10**: Gọi MA, MB, MC là 3 dây cung của đường tròn tâm O. Chứng minh rằng các giao điểm khác với M của 3 đường tròn đường kính MA, MB và MC lấy từng đôi một là 3 điểm thẳng hàng.




**Giải**

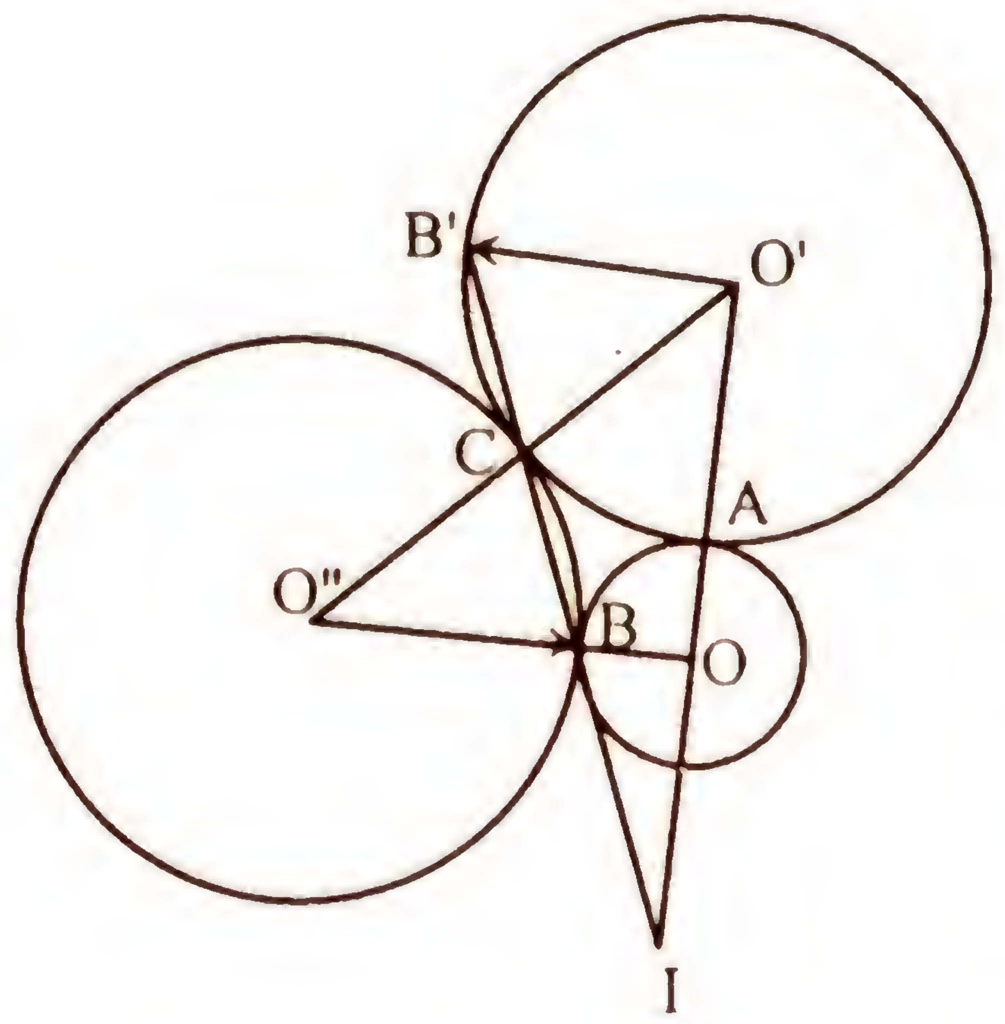
Gọi $A_1$, $B_1$ và $C_1$ lần lượt là trung điểm của MA, MB và MC; I, J, K lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn đường kính MB, MC, đường tròn đường kính MC, MA và đường tròn đường kính MA, MB.

Ta có I, J, K là điểm đối xứng của M qua $B_1C_1$, $C_1A_1$ và $A_1B_1$. Phép vị tự tâm M tỉ số 2 biến các hình chiếu I, J, K của M lên các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ thành $I_1$, $J_1$, $K_1$.

Từ các tứ giác nội tiếp được thì góc $\widehat{K_1I_1M} = \widehat{J_1I_1M}$ nên $I_1$, $J_1$, $K_1$ thẳng hàng do đó I, J, K thẳng hàng.

**Ví dụ 11**: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O") thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

**Giải**



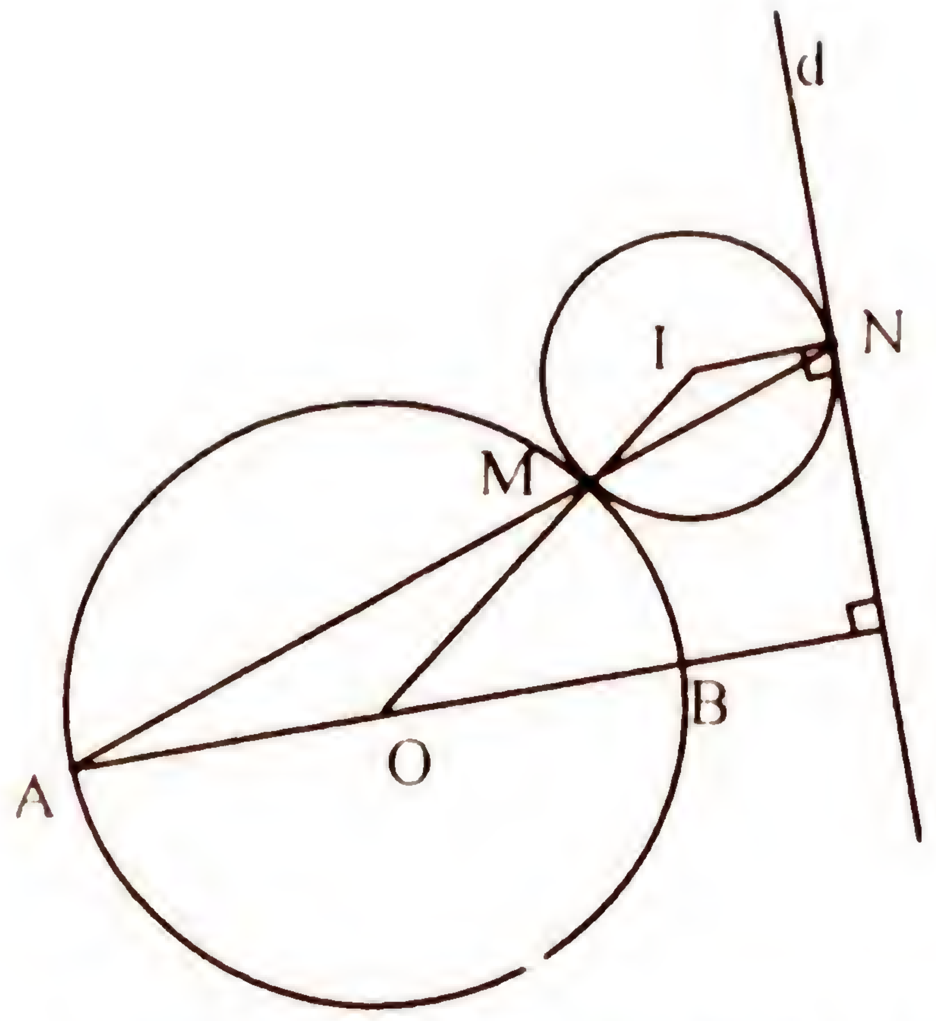

Kéo dài BC cắt (O') tại B'. Vì C là tâm vị tự trong của (O') nên hai vectơ $\overrightarrow{O'B'}$ và $\overrightarrow{O''B}$ ngược hướng.

Vì B là tâm vị tự trong của (O) và (O") nên hai vectơ $\overrightarrow{O''B}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{O'B'}$ cùng hướng.

Vậy đường thẳng BB', cũng chính là đường thẳng BC, luôn luôn đi qua điểm cố định là tâm vị tự ngoài I của (O) và (O').

**Ví dụ 12**: Cho đường thẳng d và đường tròn (O). Một đường tròn lưu động tiếp xúc với (O) và d tại M và N. Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định.

**Giải**




Gọi I là tâm đường tròn tiếp xúc ngoài với (O) và d, và AB là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với d.

Hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc ngoài tại M nên M là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

Ta có $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{OA}$ là hai vectơ bán kính của (I) và (O) ngược hướng nên I và A tương ứng của phép vị tự trong có tâm M. Do đó NA qua M. Vậy MN qua điểm cố định A.

**Ví dụ 13**: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một góc vuông xAy quay quanh A, tia Ax cắt (O) tại M còn tia Ay cắt (O') tại M'.

a) Chứng minh đường thẳng MM' luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng MM' cắt (O) tại N và cắt (O') tại N'. Chứng minh $\widehat{NAN'} = 90^o$.

c) Chứng minh các tiếp tuyến của (O) tại M, N, các tiếp tuyến của (O') tại M', N' cắt nhau tạo thành một hình bình hành.

**Giải**

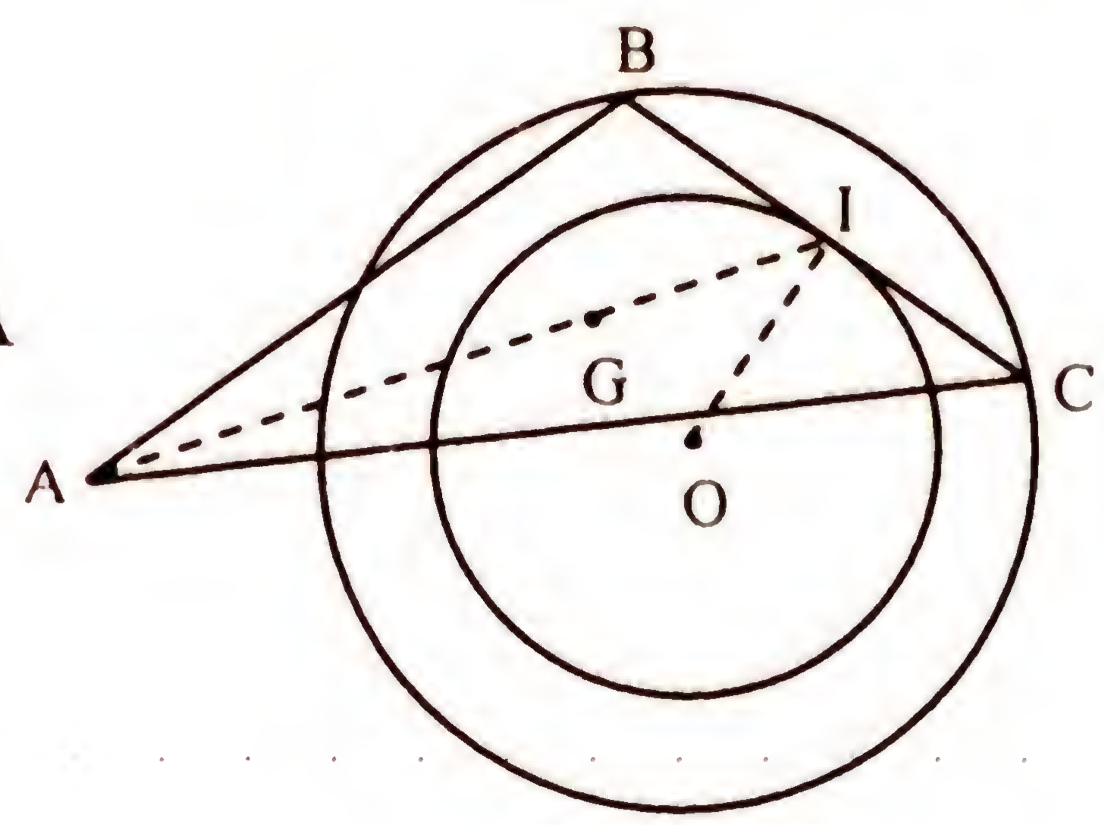
a) Gọi A' là giao điểm thứ hai của OO' và đường tròn (O'). Ta có $\overrightarrow{A'M'}$ và $\overrightarrow{AM}$ có cùng hướng suy ra $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M'}$ cùng hướng. Vậy đường thẳng MM' luôn luôn đi qua tâm vị tự ngoài S của (O) và (O').

b) Vì S là tâm vị tự ngoài của (O) và (O') nên $\overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{O'N'}$ cùng hướng. Suy ra AN // A'N', mà AN' ⊥ A'N' nên AN' ⊥ AN hay $\widehat{NAN'} = 90^o$.

c) Qua phép vị tự tâm S, tiếp tuyến tại M của (O) biến thành tiếp tuyến tại M' của (O'), nên hai tiếp tuyến đó song song. Cũng tương tự, tiếp tuyến tại N của (O) và tiếp tuyến tại N' của (O') cũng song song. Vậy bốn tiếp tuyến đó tạo thành một hình bình hành.

**Ví dụ 14**: Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O; R) có độ dài không đổi BC = m. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

**Giải**




Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ nên phép vị tự V tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$ biến điểm I thành điểm G.

Trong tam giác vuông OIB ta có:

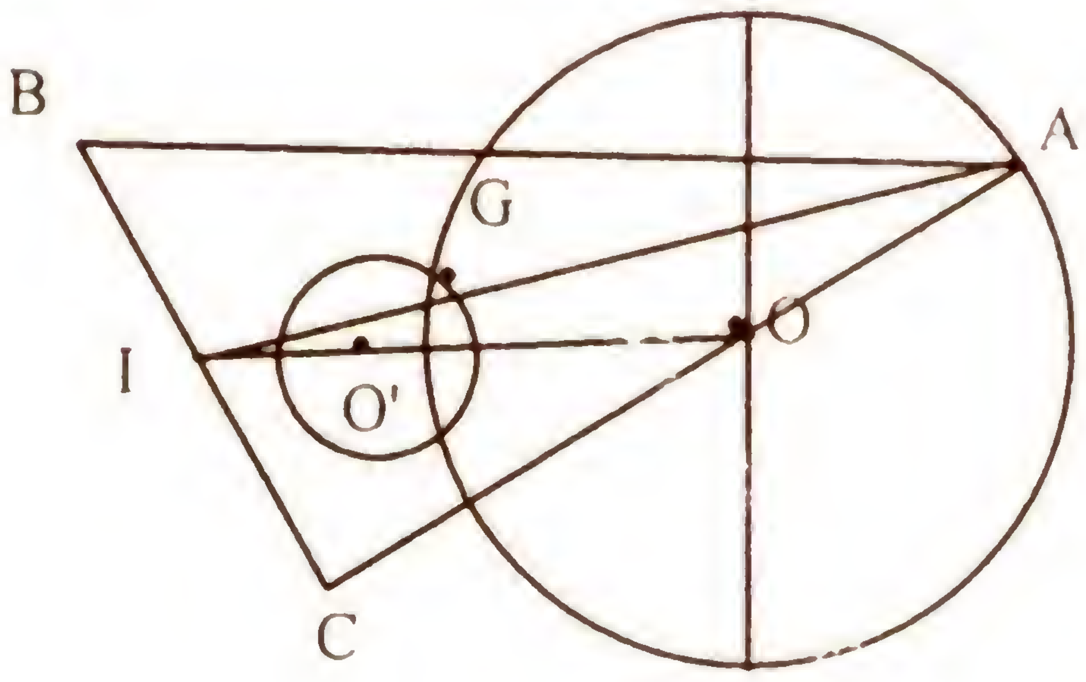
$OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = R'$ (không đổi) nên quỹ tích I là đường tròn (O; R') với $m \le 2R$.

Vậy quỹ tích G là ảnh của quỹ tích I qua phép vị tự V.

**Ví dụ 15**: Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm qũy tích trọng tâm G của tam giác ABC.

**Giải**

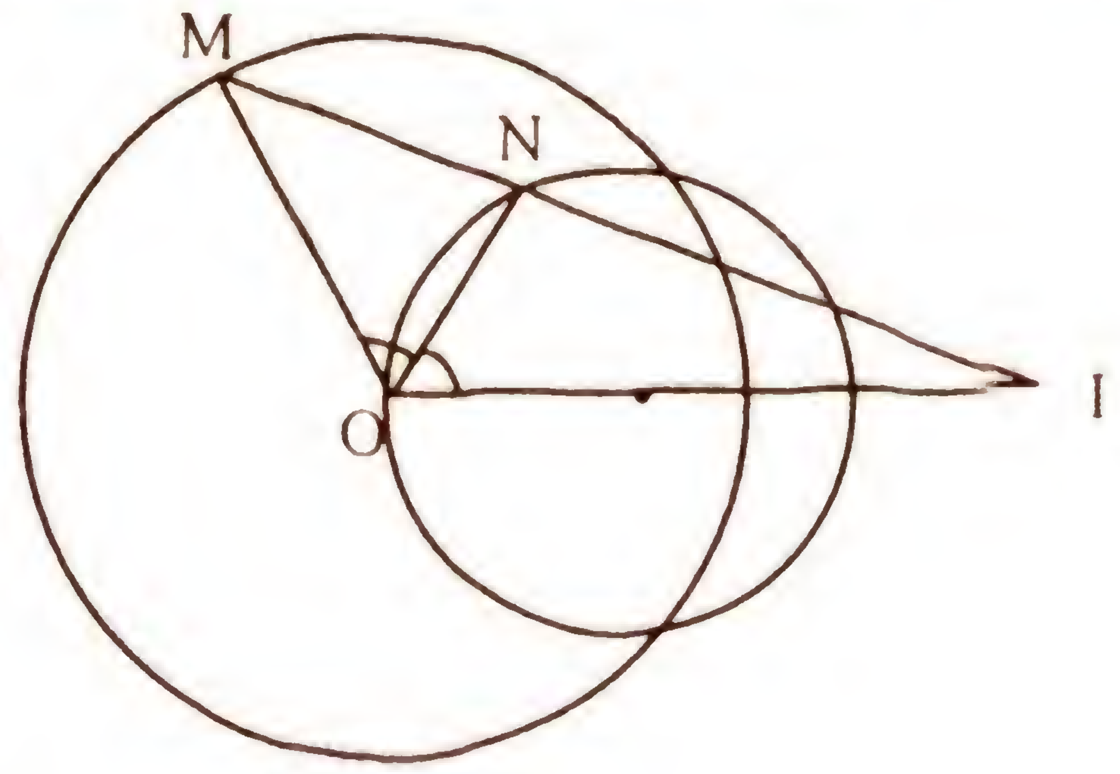
Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định.




Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Do đó phép vị tự V tâm tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G. Từ đó suy ra khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì quỹ tích G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn (O'; R') mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3}R$.

**Ví dụ 16**: Cho đường tròn (O; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.




**Giải**

Đặt IO = d. Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{IN}{NM} = \frac{IO}{OM} = \frac{d}{R}$

$\Rightarrow \frac{IN}{IN + NM} = \frac{d}{d + R} \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{d}{d + R}$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{IN} = \frac{d}{d + R}\overrightarrow{IM}$.

Do đó phép vị tự V tâm I tỉ số $k = \frac{d}{d + R}$ biến điểm M thành điểm N.

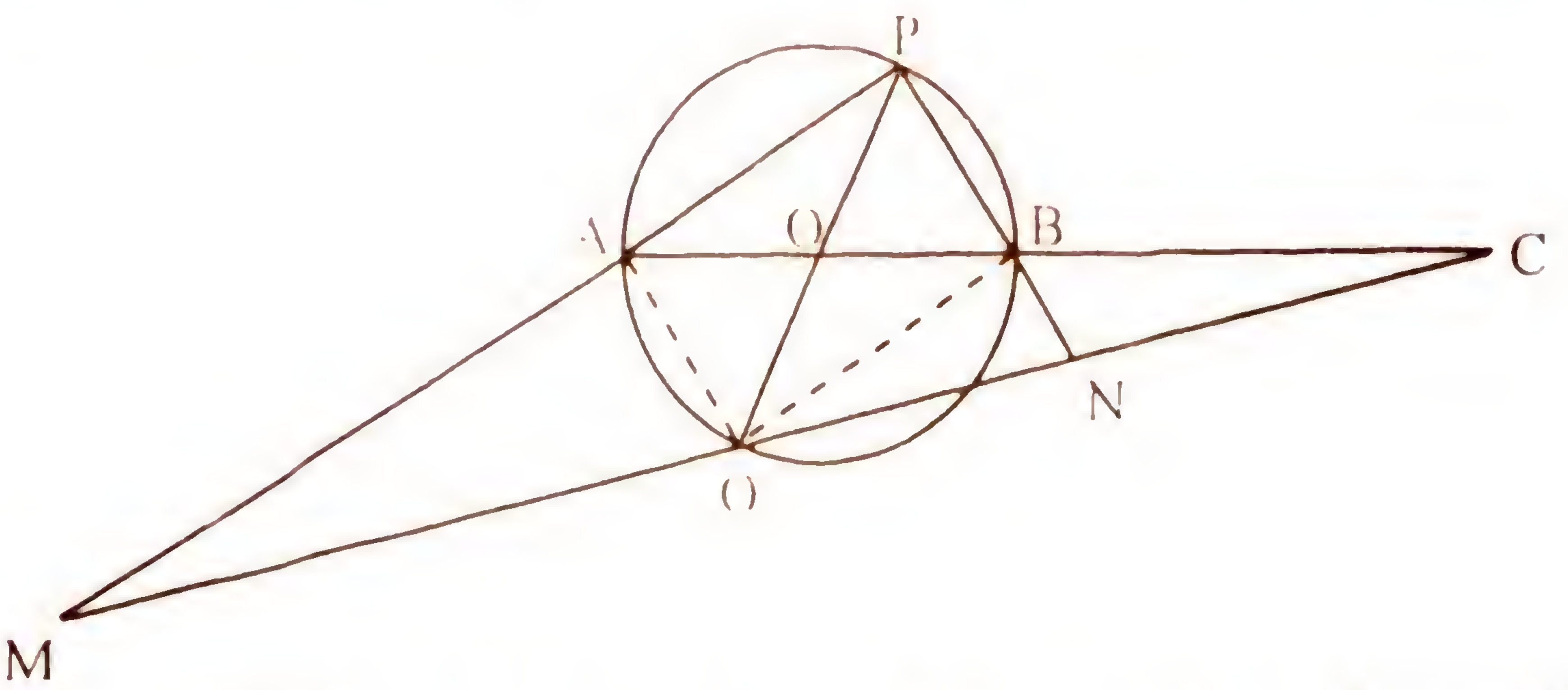
Khi M ở vị trí $M_0$ trên đường tròn (O; R) sao cho $\widehat{IOM_0} = 0^o$ thì tia phân giác của góc $\widehat{IOM_0}$ không cắt IM. Điểm N không tồn tại.

Vậy khi M chạy trên (O; R) (M khác $M_0$) thì quỹ tích điểm N là ảnh của (O; R) qua phép vị tự V bỏ đi ảnh của điểm $M_0$.

**Ví dụ 17**: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N. Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

**Giải**

Ta có QB // AP (vì cùng vuông góc với PB) và B là trung điểm của AC nên Q là trung điểm của CM. Tương tự ta có AQ // BN (vì cùng vuông góc với AP) và B là trung điểm của AC nên N là trung điểm của CQ.

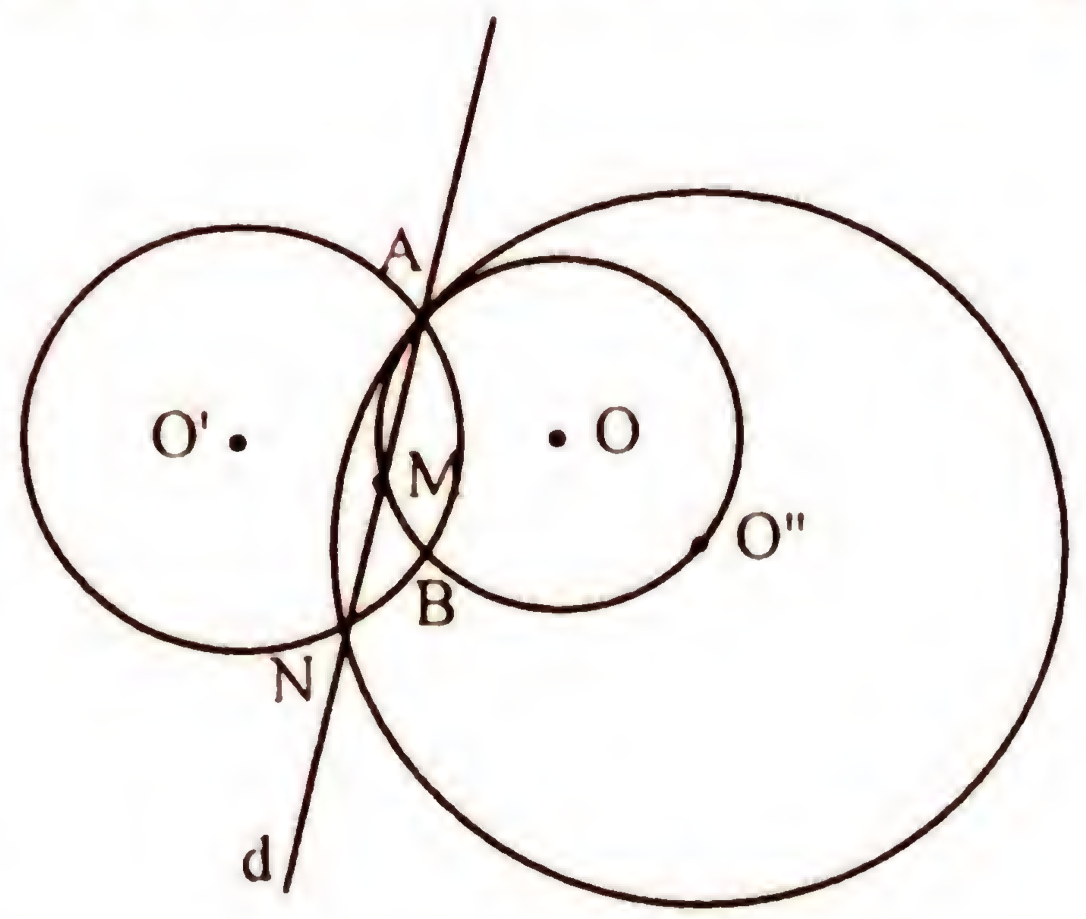



Ta có $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ}$ nên phép vị tự V tâm C tỉ số 2 biến Q thành M. Vì Q chạy trên đường tròn (O) trừ hai điểm A, B nên quỹ tích M là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V trừ 2 ảnh của A, B.

Tương tự $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$ nên quỹ tích N là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự V' tâm C, tỉ số $\dfrac{1}{2}$ trừ 2 ảnh của A, B.

**Ví dụ 18:** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

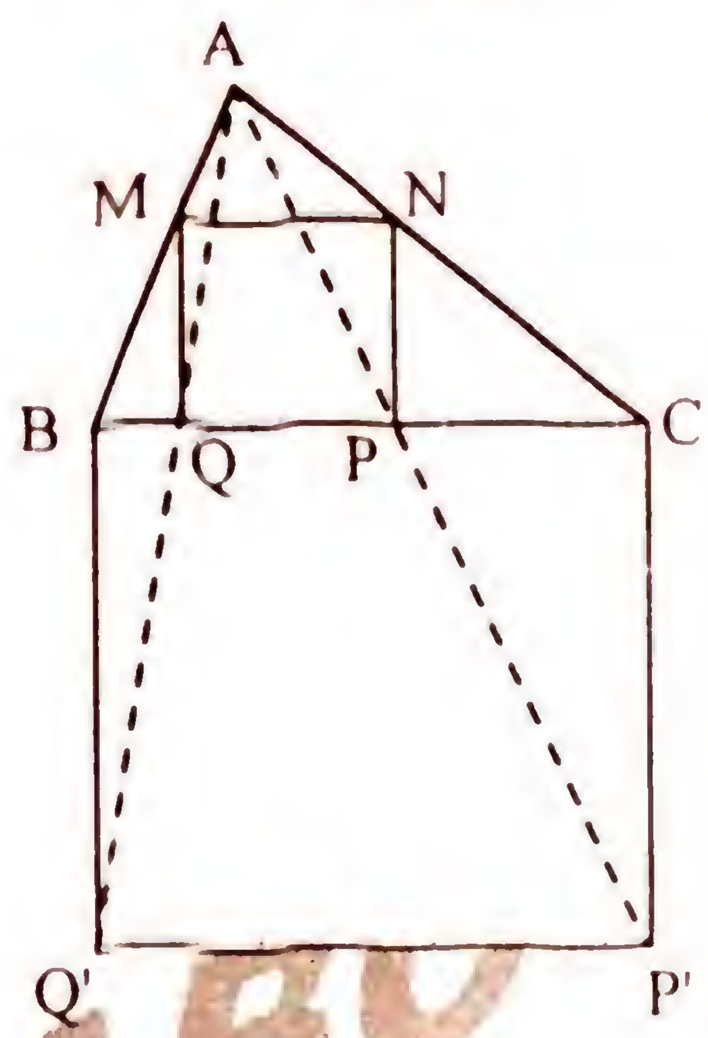
**Giải**




Giả sử đã dựng được đường thẳng d theo yêu cầu của bài toán. Vì M là trung điểm của AN nên $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$ . Do đó phép vị tự V tâm A tỉ số 2 biến M thành N, biến (O) thành (O") thì (O") phải đi qua N.

Vậy N là giao điểm của hai đường tròn (O') và (O").

**Ví dụ 19**: Cho tam giác nhọn ABC, hãy dựng hình vuông MNPQ sao cho hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và hai đỉnh M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC.




**Giải**

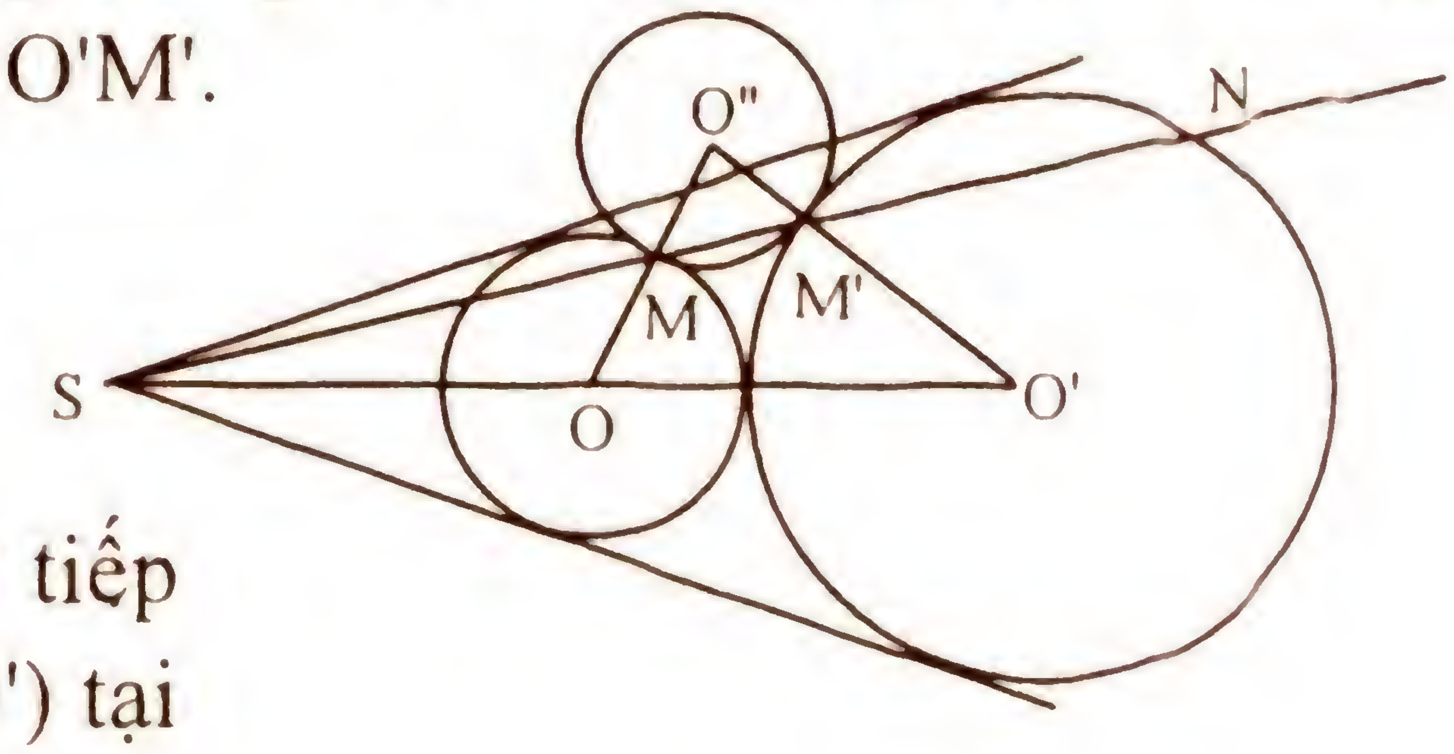
Giả sử ta đã dựng hình vuông MNPQ thì phép vị tự tâm A, tỉ số $\dfrac{BC}{MN}$ biến hình vuông MNPQ thành hình vuông BCP'Q'. Suy ra cách dựng:

Dựng hình vuông BCP'Q' nằm ngoài tam giác ABC. Lấy giao điểm P, Q của BC với các đoạn thẳng tương ứng AP' và AQ'. Từ P và Q, vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, lần lượt cắt AC và AB tại N và M. Khi đó MNPQ chính là hình vuông cần dựng.

**Ví dụ 20**: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau và một điểm M trên (O). Dựng một đường tròn đi qua M và tiếp xúc với cả hai đường tròn (O) và (O').

**Giải**

Gọi S là tâm vị tự ngoài của (O) và (O'). Gọi N là ảnh của M qua phép vị tự tâm S biến (O) thành (O'). Đường thẳng SN cắt (O') tại điểm thứ hai M'. Gọi O" là giao điểm của OM và O'M'.




Ta có OM // O'N $\Rightarrow \dfrac{O''M}{O'N} = \dfrac{O''M'}{M'O'}$

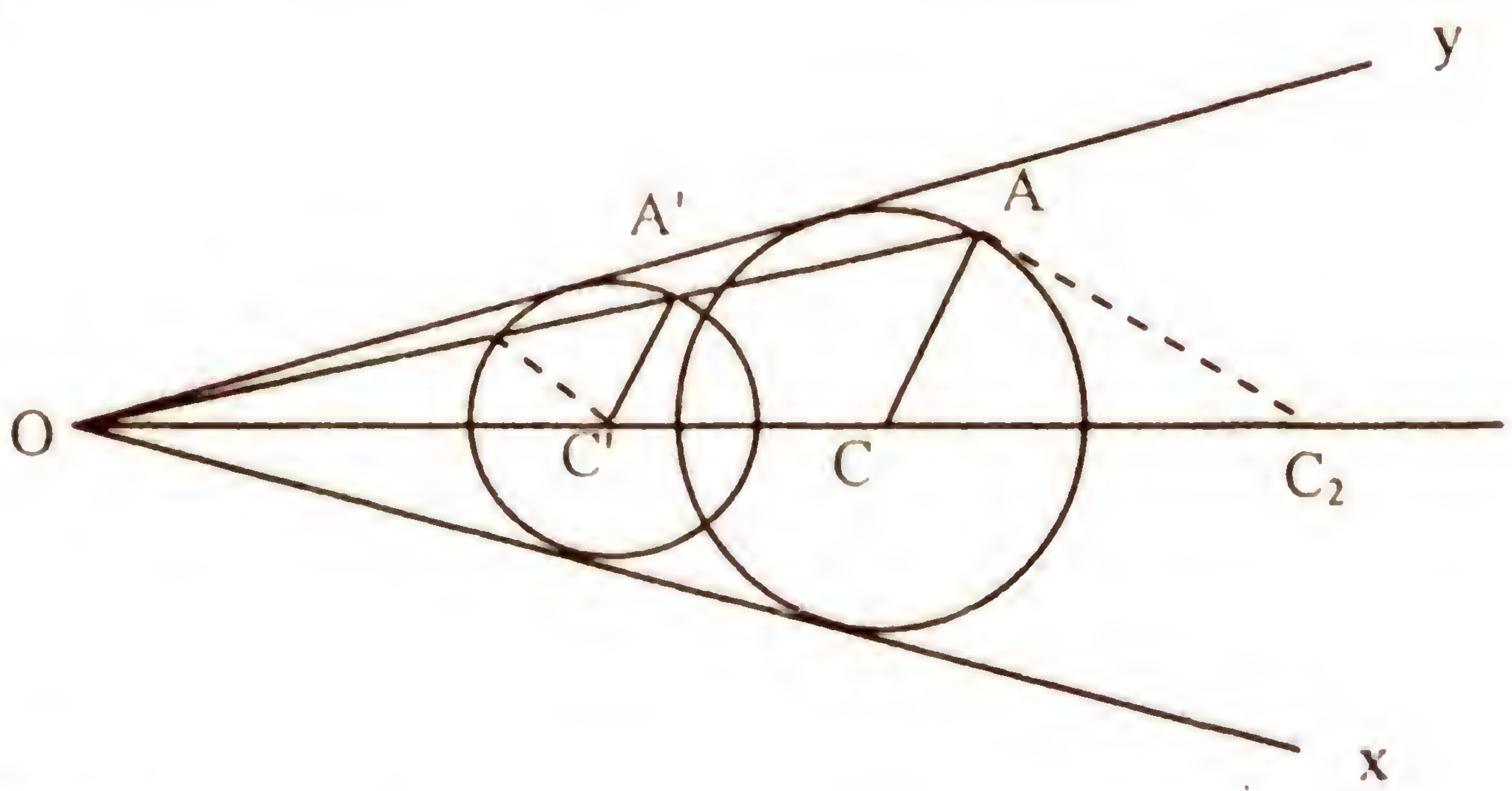
vì O'N = O'M' nên O"M = O"M'.

Vậy đường tròn O" bán kính O"M tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với (O') tại M' là đường tròn cần dựng.

**Ví dụ 21**: Dựng một đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Ox, Oy cho sẵn và đi qua một điểm cố định A cho sẵn ở trong góc xOy.

**Giải**

Phân tích, giả sử dựng được đường tròn (C) đi qua A và tiếp xúc với Ox, Oy, phép vị tự tâm O biến (C) thành (C') chỉ thoả 2 điều kiện tiếp xúc với Ox, Oy.




Cách dựng:

– Dựng đường tròn (C') tuỳ ý tiếp xúc với Ox và Oy.

– Dựng OA cắt (C') tại A'.

– Dựng giao điểm A của đường thẳng OA' với đường thẳng qua C, song song C'A'.

– Đường tròn tâm C, bán kính CA là đường tròn phải dựng.

Chứng minh: Đường tròn tâm C, bán kính CA đi qua A là ảnh của đường tròn (C') trong phép vị tự nên tiếp xúc với Ox, Oy, tâm O tỉ số k = $\dfrac{CA}{C'A'}$

Biện luận: Đường thẳng OA cắt (C') tại 2 điểm $A'_1$, $A'_2$ nên bài toán có 2 nghiệm hình.

– Phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) là phép biến hình biến mỗi cặp điểm M, N thành cặp điểm M', N' sao cho M'N' = kMN.

– Mỗi phép đồng dạng bao giờ cũng có thể xem là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.

– Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Chú ý: Để chứng minh 2 hình ($H_1$) và ($H'_1$) đồng dạng, ta sử dụng phép vị tự để biến hình ($H_1$) thành ($H_2$) bằng ($H'_1$) rồi sử dụng phép dời hình biến ($H_2$) thành ($H'_1$).

**Ví dụ 1**: Trong mặt phẳng Oxy xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x; y) thành M'(3x + 1; –3y + 5). Chứng minh F là một phép đồng dạng.

**Giải**

Phép F biến $A(x_1; y_1)$ thành $A'(3x_1 + 1; -3y_1 + 5)$

$B(x_2; y_2)$ thành $B'(3x_2 + 1; -3y_2 + 5)$

Ta có $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ và

$$A'B' = \sqrt{(3x_1 - 3x_2)^2 + (-3y_1 + 3y_2)^2}$$

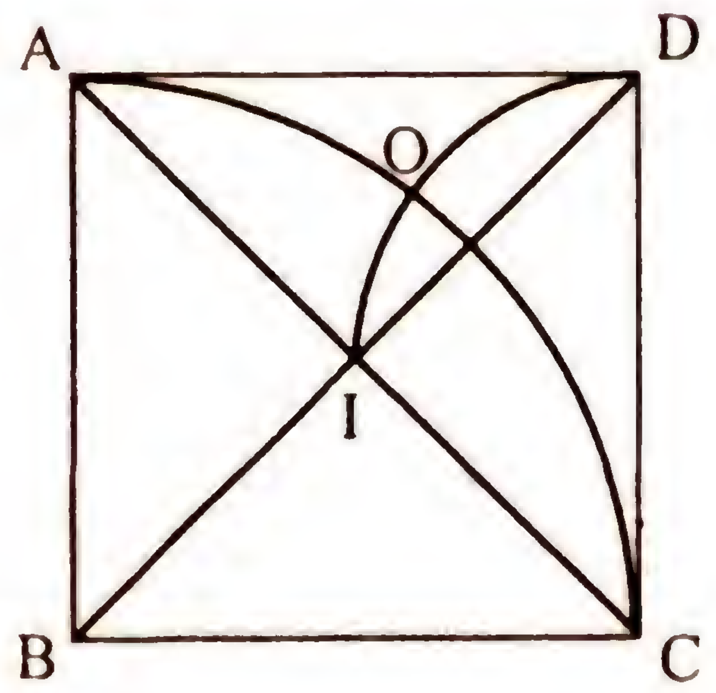
$$= 3\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 3.AB$$

Vậy F là phép đồng dạng tỉ k = 3.

**Ví dụ 2**: Cho hình vuông ABCD tâm I có các đỉnh A, B, C, D quay theo chiều dương. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

**Giải**

Tỉ số đồng dạng là $k = \dfrac{CD}{AI} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$



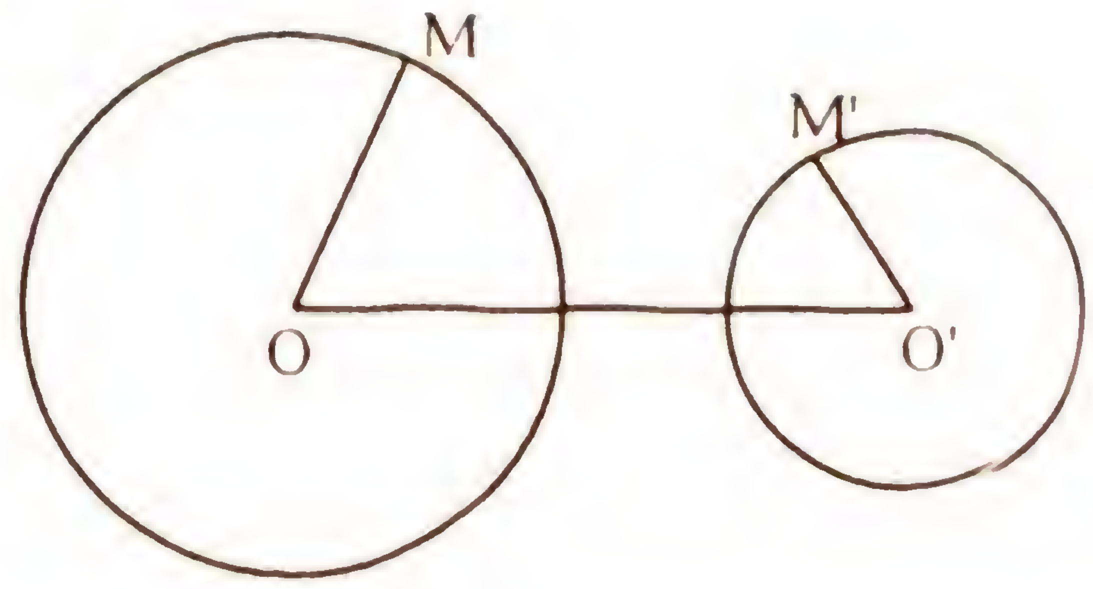

Gọi O là giao điểm 2 cung chứa góc $\dfrac{3\pi}{4}$ dựng trên dây AC và ID.

Hợp thành của phép quay tâm O, góc quay $\dfrac{3\pi}{4}$ và phép vị tự tâm O tỉ $k = \sqrt{2}$ biến A thành C, I thành D nên chính là phép đồng dạng cần tìm biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

**Ví dụ 3**: Cho hai đường tròn cố định (O; R) và (O'; R') với $R \neq R'$. Hai điểm M và M' lần lượt lưu động trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = 60^o$. Xác định phép đồng dạng biến M thành M'.

**Giải**

Ta có $\dfrac{O'M'}{OM} = \dfrac{R'}{R}$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = 60^o$




Gọi A và B là 2 tâm vị tự của 2 đường tròn (O) và (O') thì A, B chia OO' theo tỉ $\pm\dfrac{R'}{R}$.

Gọi I là giao điểm của đường tròn đường kính AB với cung chứa góc $60^o$ dựng trên dây OO'. Hợp thành của phép quay tâm I, góc $60^o$ và phép vị tự tâm I, tỉ $k = \dfrac{R'}{R}$ biến $\overrightarrow{OM}$ thành $\overrightarrow{O'M'}$ nên biến M thành M'. Đó là phép đồng dạng cần tìm.

**<u>Ví dụ 4</u>**: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Hãy viết phương trình đường tròn (C") là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ và phép đối xứng qua trục Oy.

**Giải**

Đường tròn (C) tâm I(1; 2) bán kính R = 3. Qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$ biến I(1; 2) thành I'(–2; –4) biến R thành $R' = |k|R = 6$. Phép đối xứng qua trục Oy biến I'(–2; –4) thành I"(2; –4), R" = R' = 6 nên phương trình (C"): $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$.

**<u>Ví dụ 4</u>**: Chứng minh phép đồng dạng biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng, đồng thời bảo toàn thứ tự các điểm.

**Giải**

Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó, ta có AB + BC = AC (1).

Phép đồng dạng F biến A thành A', B thành B', C thành C' thì

A'B' = kAB, B'C' = kBC, A'C' = kAC.

Từ (1) $\Rightarrow$ kAB + kBC = kAC $\Rightarrow$ A'B' + B'C' = A'C'.

Vậy A', B', C' thẳng hàng theo thứ tự.

**<u>Ví dụ 5</u>**: Chứng minh nếu phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

**Giải**

– Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC thì phép đồng dạng F biến điểm D thành trung điểm D' của đoạn thẳng B'C' và vì thế trung tuyến AD của tam giác ABC biến thành trung tuyến A'D' của tam giác A'B'C'. Đối với hai trung tuyến còn lại cũng thế. Vì trọng tâm tam giác là giao điểm của các đường trung tuyến nên trọng tâm tam giác ABC biến thành trọng tâm tam giác A'B'C'.

– Gọi AH là đường cao của tam giác ABC ($H \in BC$). Khi đó phép đồng dạng F biến đường thẳng AH thành đường thẳng A'H'. Vì $AH \perp BC$ nên $A'H' \perp B'C'$, nói cách khác A'H' là đường cao của tam giác A'B'C'. Đối với các đường cao khác cũng thế. Vì trực tâm của tam giác là giao điểm của các đường cao nên trực tâm tam giác ABC biến thành trực tâm tam giác A'B'C'.

– Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì OA = OB = OC nên nếu điểm O biến thành điểm O' thì O'A' = O'B' = O'C' = kOA = kOB = kOC, do đó O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

**Ví dụ 6**: Chứng minh rằng hai hình vuông bất kì đều đồng dạng với nhau.

**Giải**

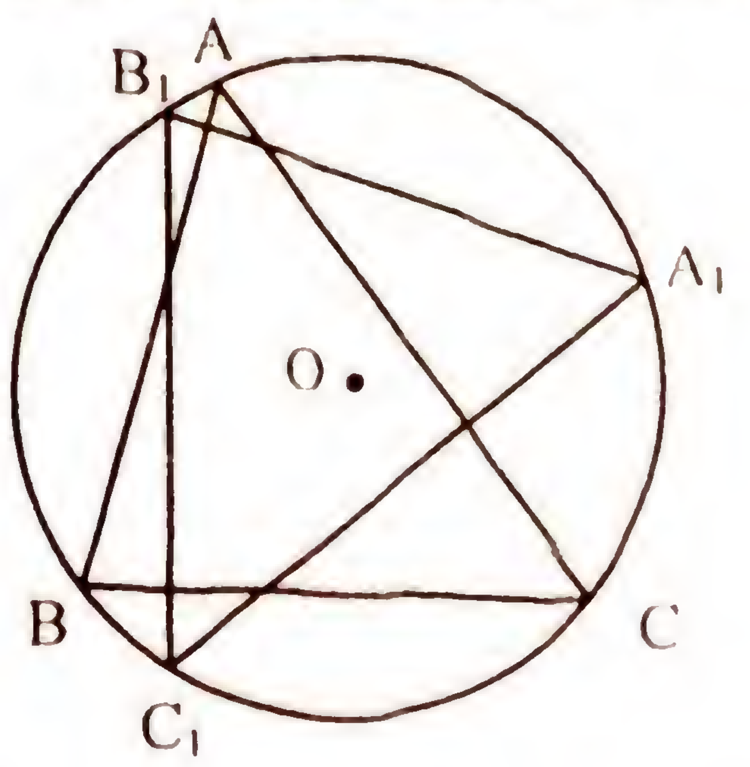
Cho 2 hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Phép vị tự V tâm A tỉ số $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ biến hình vuông ABCD thành hình vuông $AB_1C_1D_1$, có cạnh $AB = kAB = A'B'$. Do đó 2 hình vuông $AB_1C_1D_1$ và A'B'C'D' bằng nhau nên có phép dời hình F biến hình vuông $AB_1C_1D_1$ thành A'B'C'D'.

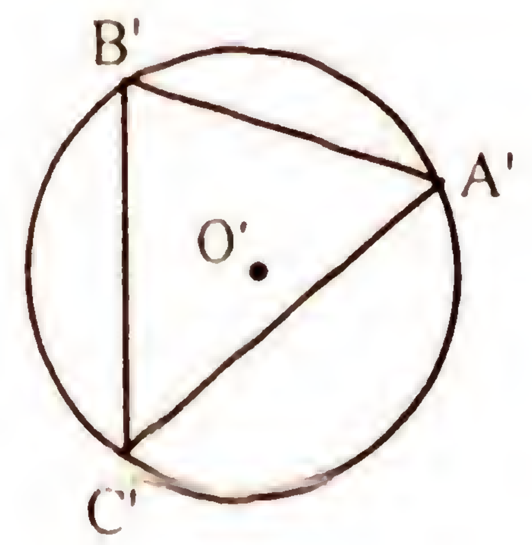
Hợp thành của V và F là phép đồng dạng nên hai hình vuông ABCD và A'B'C'D' đồng dạng.

**Ví dụ 7**: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$, $CA \perp C'A'$. Chứng minh rằng hai tam giác đó đồng dạng.

**Giải**

Gọi (O) và (O') là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và A'B'C'. Ta có một phép vị tự biến đường tròn (O') thành đường tròn (O). Kí hiệu $A_1, B_1, C_1$ là ảnh của các đỉnh A', B', C' trong phép vị tự đó.




Vì: $A_1B_1 \parallel A'B'$, $B_1C_1 \parallel B'C'$, $C_1A_1 \parallel C'A'$ nên $A_1B_1 \perp AB$, $B_1C_1 \perp BC$, $C_1A_1 \perp CA$. Thực hiện phép quay tâm (O) góc quay $90^o$ biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác $A_2B_2C_2$. Tam giác $A_2B_2C_2$ có 3 cạnh song song với tam giác ABC và cùng nội tiếp trong một đường tròn (O), do đó các đỉnh của $A_2B_2C_2$ trùng với đỉnh của tam giác ABC. Điều đó chứng tỏ rằng tồn tại một phép đồng dạng là hợp thành của một phép vị tự với một phép quay biến tam giác A'B'C' thành tam giác ABC nên 2 tam giác đó đồng dạng.

**Ví dụ 8**: Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

**Giải**

Cho hai n−giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có tâm lần lượt là điểm O và điểm O'.

Đặt $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{O'B_1}{OA_1}$. Gọi V là phép vị tự tâm O, tỉ số k và $C_1C_2...C_n$ là ảnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ qua phép vị tự V. Ta có $C_1C_2...C_n$ cũng là đa giác đều và vì $\dfrac{C_1C_2}{A_1A_2} = k$ nên $C_1C_2 = B_2B_2$. Do đó hai n−giác đều $C_1C_2$ và $B_2B_2...B_n$ có cạnh bằng nhau nên có phép dời hình D biến $C_1C_2...C_n$ thành $B_1B_2...B_n$. Nếu gọi F là phép hợp thành của V và D thì F là phép đồng dạng biến $A_1A_2...A_n$ thành $B_1B_2...B_n$. Vậy hai đa giác đều đó đồng dạng với nhau.

**Ví dụ 9**: Tìm điều kiện để hai hình chữ nhật đồng dạng với nhau

**Giải**

Đường chéo hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành 2 tam giác vuông, ta đưa về điều kiện 2 tam giác vuông đồng dạng.

Nếu hình chữ nhật (H) có chiều rộng a, chiều dài b và hình chữ nhật (H') có chiều rộng a', chiều dài b', điều kiện cần và đủ để (H) đồng dạng với (H') là: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$.

**Ví dụ 10:** Cho hai đường thẳng song song d và d' và điểm cố định S ở ngoài dải (d, d'). Một cát tuyến lưu động qua S cắt d tại M và d' tại M'. Chứng minh rằng các tiếp điểm T và T' của các tiếp tuyến vẽ từ S đến đường tròn đường kính MM' ở trên những đường thẳng cố định.

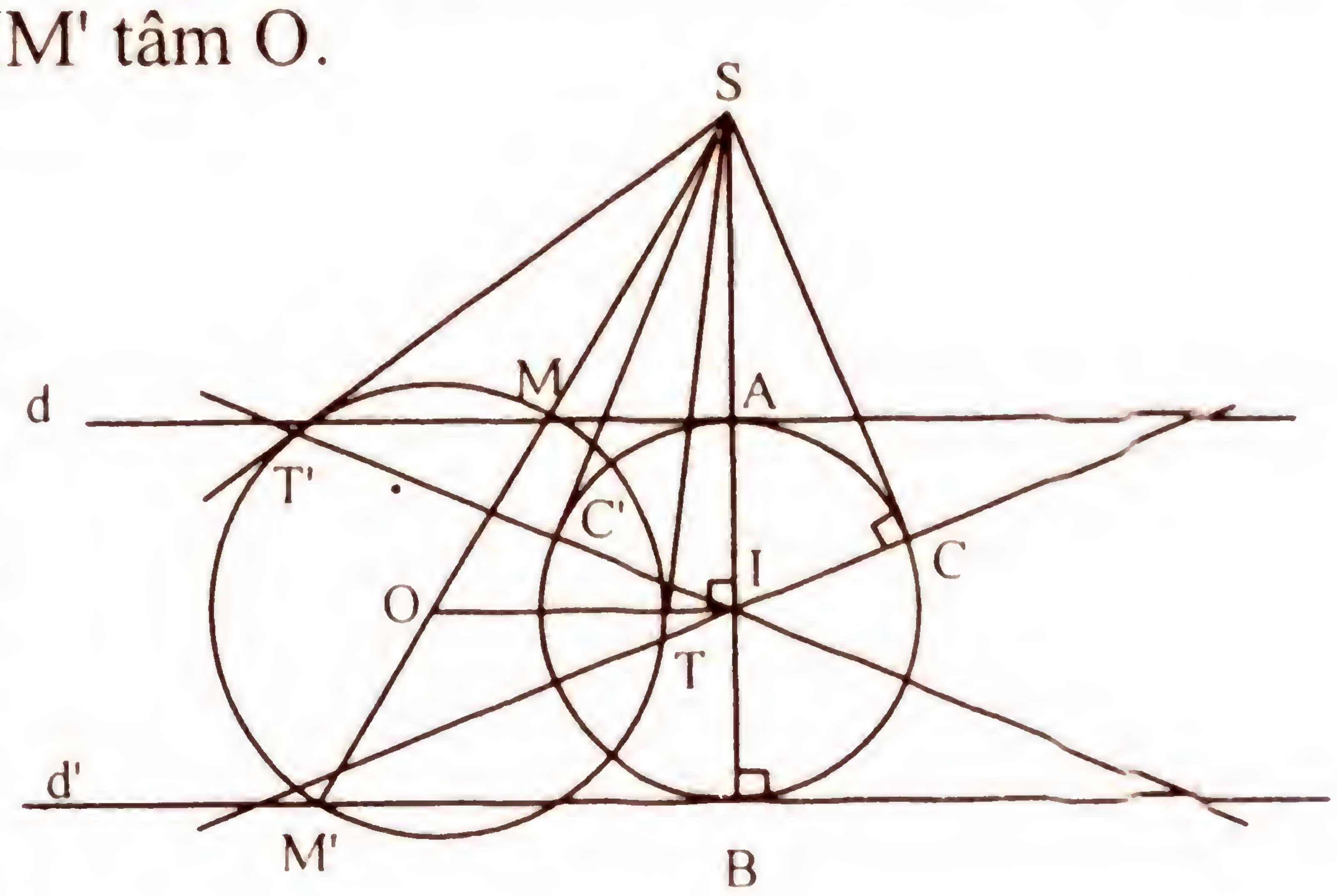
**Giải**

Vẽ cát tuyến qua S và vuông góc với d tại A và d' tại B.

Dựng tiếp tuyến SC với đường tròn đường kính AB tâm I và tiếp tuyến ST với đường tròn đường kính MM' tâm O.

Ta có: $\dfrac{SO}{OM} = \dfrac{SI}{IA} \Rightarrow \dfrac{SO}{SI} = \dfrac{OM}{IA}$

Do đó đường tròn (O) là ảnh của đường tròn (I) qua phép đồng dạng có tâm là S. Trong phép đồng dạng này các điểm T và T' là điểm tương ứng của các tiếp điểm C và C' của đường tròn (I).



Do đó các tam giác SIO, SCT và SC'T' đồng dạng và vì $\widehat{SIO} = 90^o$ nên: $\widehat{SCT} = \widehat{SC'T'} = 90^o$.

Vậy T và T' ở trên các đường thẳng IC và IC' cố định.

**Ví dụ 11**: Cho một đường tròn (O), một đường thẳng d và một điểm P cố định. Với mỗi điểm M thuộc đường tròn (O) ta xác định điểm N đối xứng với M qua d. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PN. Tìm tập hợp điểm I, khi M thay đổi trên đường tròn.

**Giải**

Từ điều kiện bài toán ta suy ra tập hợp N là một đường tròn (O') ảnh của (O) trong phép đối xứng trục d.

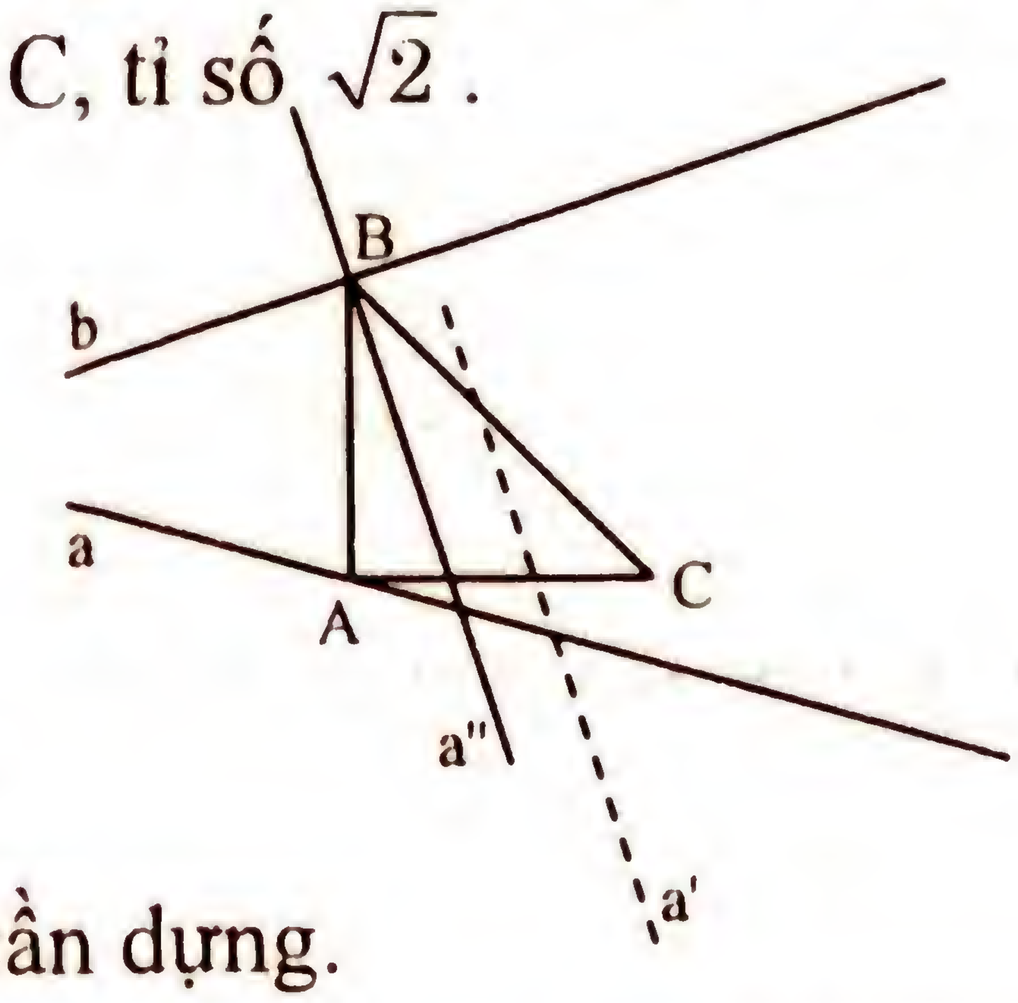
Mặt khác, ta có $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$, nên I là ảnh của N trong phép vị tự tâm P, tỉ $k = \frac{1}{2}$.

Tập hợp các điểm I là một đường tròn (O'') và ảnh của (O') trong phép vị tự $V_{(P,\frac{1}{2})}$. Vậy tập hợp các điểm I là một đường tròn ảnh của (O) qua phép đồng dạng là hợp thành của 2 phép $Đ_d$ và $V_{(P,\frac{1}{2})}$.

**Ví dụ 12**: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và điểm C. Tìm trên hai đường thẳng a và b các điểm A và B tương ứng sao cho tam giác ABC vuông cân ở A.

**Giải**

Ta có thấy góc lượng giác (CA; CB) = $-45^o$ và $\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}$. Do đó B là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm C, góc $-45^o$ và phép vị tự tâm C, tỉ số $\sqrt{2}$.




Cách dựng:

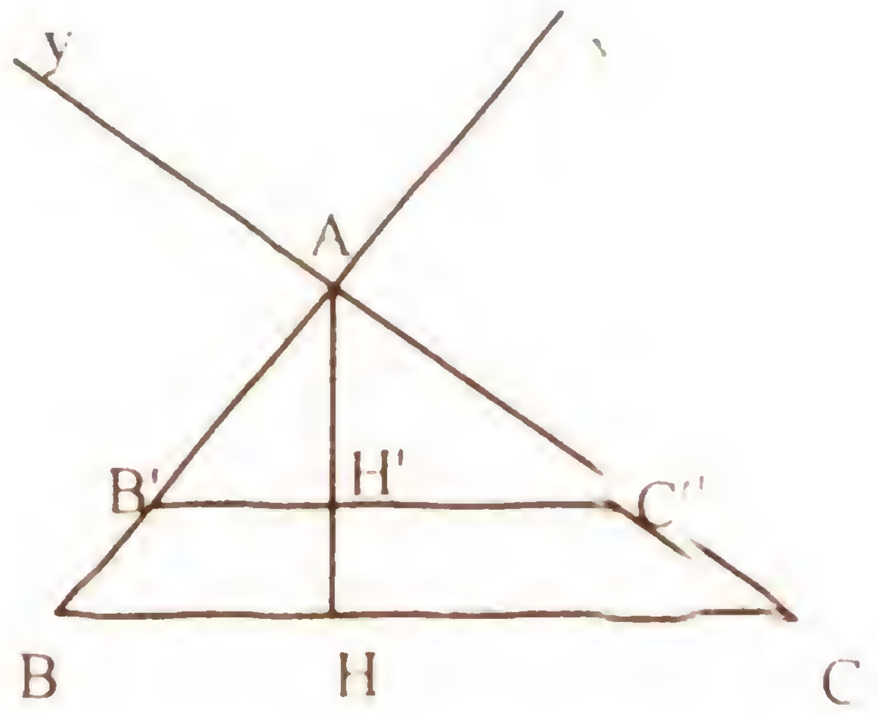
- Phép $Q_{(C,-45^o)}$ biến a thành a'.
- Phép $V_{(C,\sqrt{2})}$ biến a' thành a'',
- B là giao điểm của a'' và b,
- A là giao điểm của a và trung trực của BC.

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A cần dựng.

**Ví dụ 13:** Dựng tam giác ABC nếu biết hai góc $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$ và một trong các yếu tố sau:

a) Đường cao AH = h.  b) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp

**Giải**

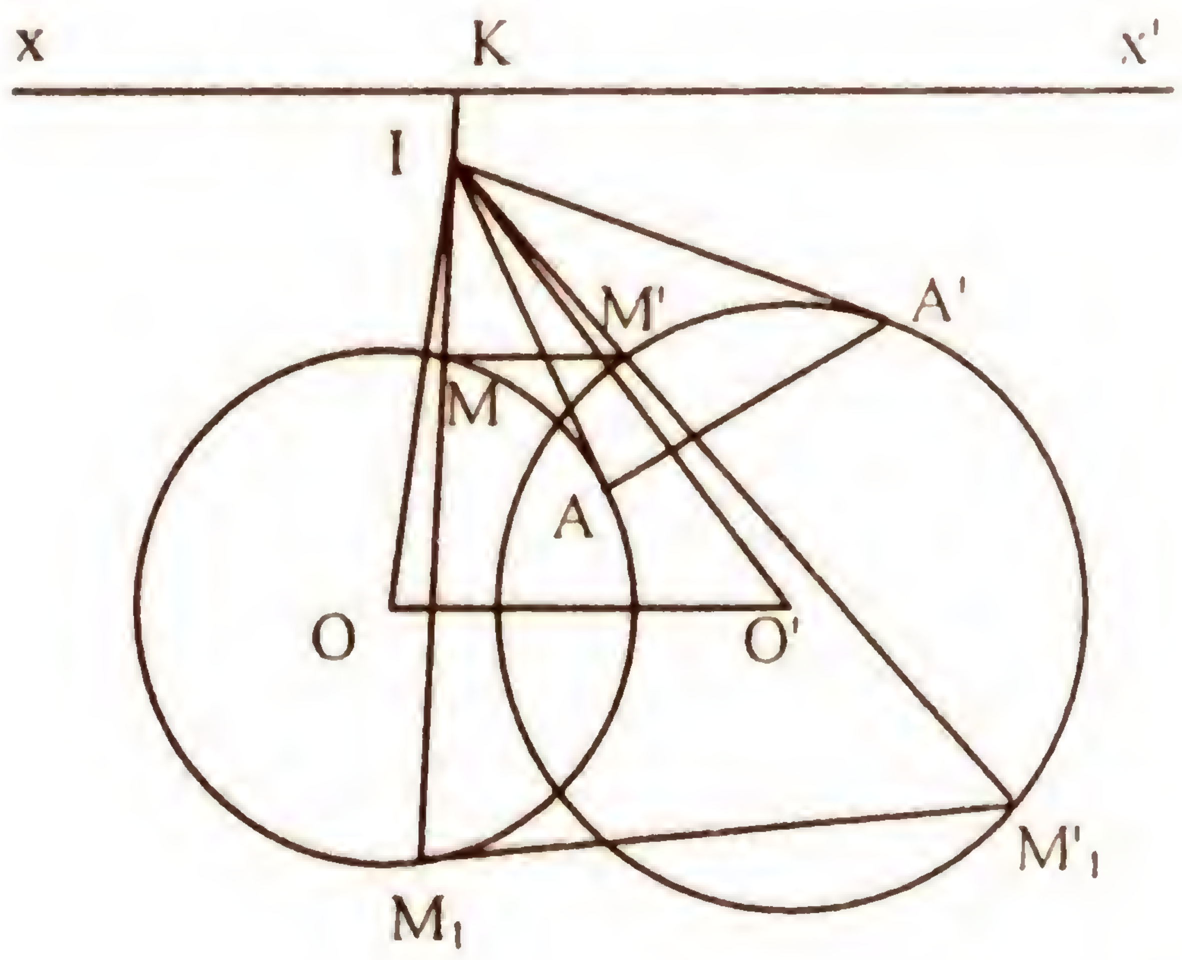



a) Dựng đoạn thẳng B'C' tuỳ ý. Trên một nửa mặt phẳng có bờ B'C' dựng tia B'x và C'y sao cho $\widehat{xB'C'} = \beta$ và $\widehat{yC'B'} = \gamma$. Hai tia đó cắt nhau tại A và ta có tam giác AB'C'.
Dựng đường cao AH' của tam giác AB'C'. Nếu AH' = h thì AB'C' là tam giác cần dựng.
Nếu AH' ≠ h thì trên tia AH', ta lấy điểm H sao cho AH = h rồi dựng đường thẳng a vuông góc với AH tại H, cắt AB' tại B và cắt AC' tại C. Tam giác cần dựng là ABC.

b) Dựng tam giác AB'C' như câu a) rồi dựng tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB'C'. Trên tia AO' lấy điểm O sao cho AO = R rồi dựng đường tròn (O) đi qua A (tức là có bán kính bằng R). Hai tia AB' và AC' lần lượt cắt (O) tại các điểm B và C (khác A). Tam giác ABC là tam giác cần dựng.

<u>**Ví dụ 14:**</u> Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R'), hai điểm A trên (O) và điểm A' trên (O'), một đường thẳng xx'. Dựng đoạn thẳng MM' song song với xx' sao cho M nằm trên (O); M' nằm trên (O') đồng thời các tam giác OAM, O'A'M' đồng dạng và cùng hướng.

**Giải**




Phân tích : Giả sử đã dựng được hai điểm M, M' thoả mãn điều kiện của đầu bài. Lấy điểm I sao cho ΔIOO' ~ ΔIAA' và cùng hướng. Đặt $\alpha = \widehat{OIO'}$.

Gọi F là hợp thành của phép vị tự tâm I, tỉ $k = \dfrac{R'}{R}$ và phép quay tâm I, góc α thì F biến A thành A', O thành O'.

Giả sử ảnh của M trong F là M'', ta có M'' ∈ (O').

Do F biến A thành A', O thành O', M thành M' nên ta có ΔOAM ~ ΔO'A'M' và cùng hướng. Suy ra M'' ≡ M' hay ΔIMM' ~ ΔIOO' và cùng hướng. Do vậy hai góc $\widehat{IMM'}$, $\widehat{IOO'}$ bằng nhau và cùng hướng.

Cách dựng: Từ I vẽ đường thẳng cắt (O) tại các điểm M, M và cắt đường thẳng xx' tại điểm K sao cho hai góc $\widehat{IKx}$ và $\widehat{IOO'}$ bằng nhau và cùng hướng. Từ I vẽ tia IM' cắt đường tròn (O') tại M' và $M'_1$ sao cho hai góc $\widehat{MIM'}$, $\widehat{OIO'}$ bằng nhau và cùng hướng.

Chứng minh: do M ∈ (O), M' ∈ (O'), $\widehat{MIM'} = \widehat{OIO'}$ và F: (O) ⇒ (O') nên F biến M thành M'.

Suy ra $\Delta IMM' \sim \Delta IOO'$ và ta có $\widehat{IMM'} = \widehat{IOO'} = \widehat{IKx}$. Mà IMM', IKx cùng hướng với IOO', suy ra MM' // xx' (đối với $M_1$, $M'_1$ cũng chứng minh tương tự).
Biện luận: Số nghiệm tuỳ theo số giao điểm của đường thẳng IK với đường tròn (O).

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Chứng minh phép dời hình cũng là một phép đồng dạng .
   **ĐS:** phép đồng dạng tỉ số k = 1
2. Cho tam giác ABC có 3 trung điểm của 3 cạnh là M, N, P. Chứng minh 2 tam giác ABC, MNP đồng dạng.
   **ĐS:** phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$
3. Chứng minh 2 tam giác vuông cân thì đồng dạng.
   **HD:** hợp thành của phép vị tự và phép quay.
4. Chứng minh 2 ngũ giác đều bất kỳ thì đồng dạng.
5. Cho đường tròn (O), lấy điểm A cố định và điểm M lưu động trên (O). Tìm quỹ tích đỉnh thứ 3 của tam giác AMN vuông cân tại M.
   **HD:** hợp thành của phép vị tự và phép quay tâm A.
6. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự $V_{(A;2)}$, $V_{(G;-\frac{1}{2})}$.
   **HD:** dùng định nghĩa của phép vị tự
7. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d và đường tròn (O). Vẽ ảnh của d, (O) qua $V_{(A;3)}$.
8. Cho 2 đường tròn (O; R) và (O', 2R) . Tìm các phép vị tự biến (O) thành (O').
   **HD:** xét các vị trí tương đối của 2 đường tròn
9. Cho hình thang ABCD, AB // CD. Tìm phép vị tự:
   a) Biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{DC}$
   b) Biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$
10. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại C và tiếp xúc AB tại D. Đường thẳng CD cắt (O) tại I. Chứng minh IA = IB.
    **HD:** dùng phép vị tự tâm C
11. Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác ABC.
    **HD:** dùng phép vị tự tâm I là trung điểm của BC.
12. Cho đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm AN.

**13.** Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác đó. Dựng đường tròn đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh của tam giác ABC .

**HD:** xét 3 trường hợp cho các cặp cạnh

**14.** Cho hình thoi ABCD cạnh a, góc nhọn $A = 60^0$.

a) Tính diện tích đường tròn nội tiếp (I).

b) Tính phương tích của A đối với đường tròn (BCD).

c) Tìm quỹ tích các điểm M có phương tích M đối với (I) bằng $-\frac{a^2}{4}$.

d) Tìm quỹ tích các trung điểm của BM.

**HD:** dùng phép vị tự tâm B tỉ $k = \frac{1}{2}$

**15.** Cho (O) có 2 bán kính OA, OB. Dựng dây MN sao cho OA, OB chia MN ra 3 phần bằng nhau.

**16.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có B, C cố định. Tìm quỹ tích:

a) Trực tâm H của tam giác ABC

b) Trung điểm I của AC.

c) Điểm D mà B trung điểm AD.

**HD:** dùng định nghĩa các phép dời hình, phép vị tự

**17.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có B, C cố định. Tìm quỹ tích:

a) Trọng tâm G của tam giác ABC

b) Đỉnh thứ 3 của tam giác ABC đều

c) Điểm D mà A trung điểm BD.

**HD:** dùng định nghĩa các phép dời hình, phép vị tự

**18.** Cho điểm I ở trong đường tròn (O). Một đường thẳng lưu động qua I, cắt đường tròn tại M, N . Tìm tập hợp các điểm T sao cho $\overrightarrow{IT} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}$.

**HD:** dùng phép vị tự tâm I tỉ k = 2

**19.** Cho hình thang có hai đáy AB, CD với AD = a, DC = b cho trước và 2 đỉnh A, B cố định. Tìm quỹ tích giao điểm của 2 đường chéo.

**ĐS:** ảnh vị tự của quỹ tích đỉnh C qua phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{AB}{AB + b}$

**20.** Cho 2 đường thẳng a, b và điểm I . Tìm hai điểm A thuộc a và B thuộc b sao cho I chia đoạn AB theo tỉ số k cho trước.

**HD:** dùng phép vị tự tâm I tỉ số k.

**21.** Cho điểm A ở trong góc nhọn xOy. Tìm điểm M trên tia Oy sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng MA.

**HD:** hạ MH vuông góc với Ox rồi tìm ảnh cuả tam giác AMH .

**22.** Cho 6 đường thẳng a, b, c, d , d', d'' đôi một cắt nhau và không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Dựng ba điểm A, B, C lần lượt thuộc 3 đường thẳng a, b, c sao cho AB // d, BC // d' và CA // d''.

**HD:** sử dụng định lý Talet

CHƯƠNG II:

# ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

## §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Điểm, đường thẳng, mặt phẳng:
  - Điểm thường đặt tên A, B, C, D, ...
  - Đường thẳng thường đặt tên a, b, c, d, ..., $\Delta$, $\Delta'$, ...
  - Mặt phẳng thường đặt tên $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, ..., (P), (Q), ...
- Quan hệ thuộc:
  - Điểm A thuộc đường thẳng a: $A \in a$.
  - Điểm B không thuộc đường thẳng a: $B \notin a$
  - Điểm A thuộc mặt phẳng (P): $A \in (P)$, $A \in mp(P)$.
  - Điểm B không thuộc mặt phẳng (P): $B \notin (P)$, $B \notin mp(P)$.
  - Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Q): $d \subset (Q)$, $d \subset mp(Q)$
  - Đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$: $a \not\subset (\alpha)$, $a \not\subset mp(\alpha)$.
- Hình biểu diễn: vẽ hình phẳng của các hình không gian với các quy tắc:

  - Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.

  - Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).

  - Điểm A thuộc đường thẳng a được biểu diễn bởi một điểm A' thuộc đường thẳng a', trong đó a' biểu diễn cho đường thẳng a.

  - Dùng nét vẽ liền (—) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - -) để biểu diễn cho những đường bị khuất.
- Các tính chất thừa nhận của hình học không gian:

  - Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

  - Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

  - Tính chất 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

  - Tính chất 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung này gọi là giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt nhau.

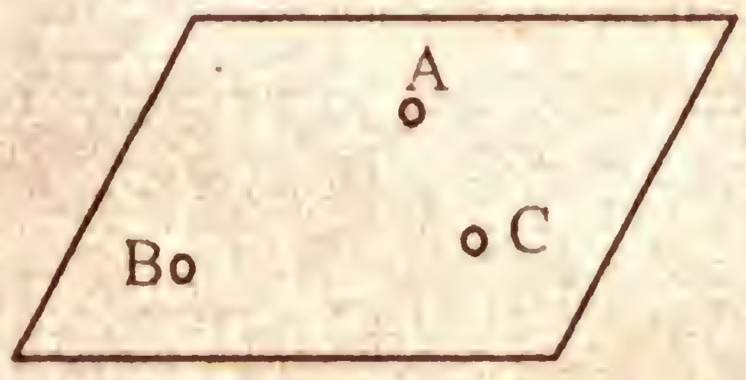
- Tính chất 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Định lý: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

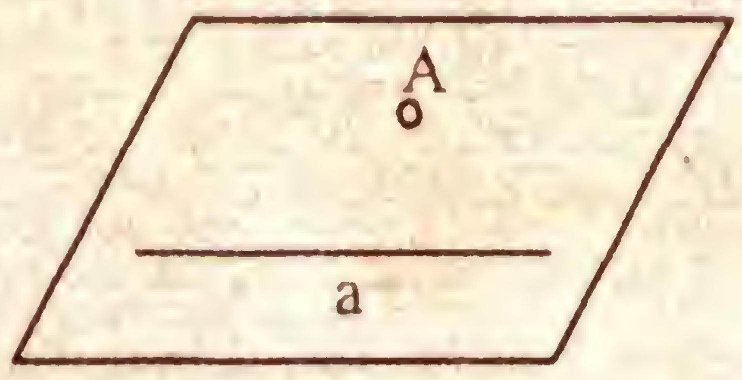
• Cách xác định mặt phẳng:

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết:

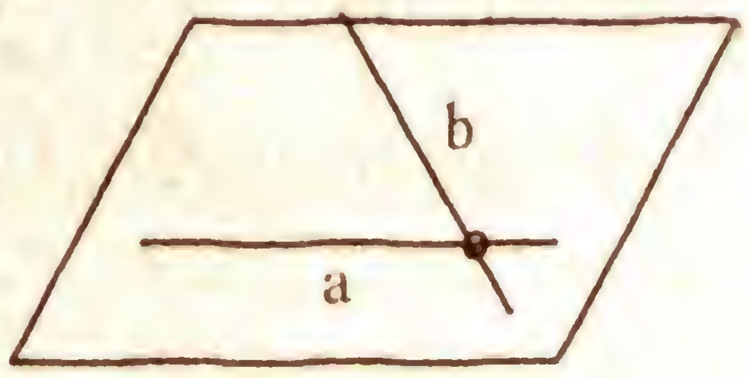
- Mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng;
- Mặt phẳng đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó;
- Mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.



mp(ABC)



mp(A;a)

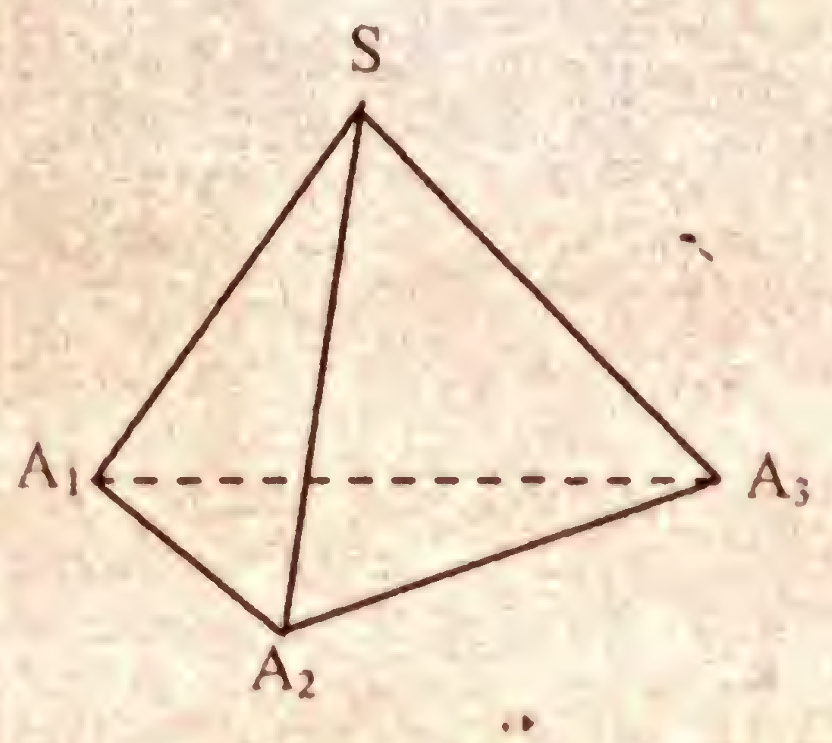


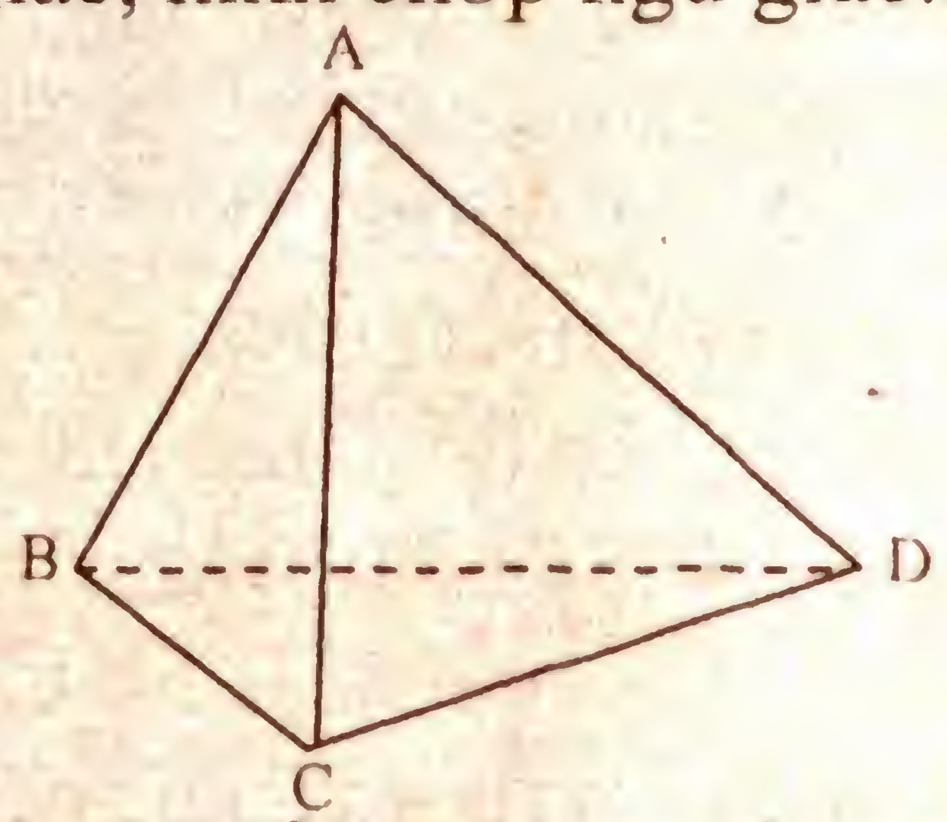
mp(a; b)

• Hình chóp và hình tứ diện:

- Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ để được n tam giác: $SA_1A_2$, $SA_2A_3$, ... $SA_nA_1$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp. Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp. Các cạnh của mặt đáy gọi là các cạnh đáy của hình chóp. Các đoạn thẳng $SA_1$, $SA_2$, ..., $SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp. Mỗi tam giác $SA_1A_2$, $SA_2A_3$, ..., $SA_nA_1$ gọi là một mặt bên của hình chóp. Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác...




- Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là hình tứ diện hay là tứ diện và kí hiệu là ABCD. Các điểm A, B, C, D gọi là các đỉnh của tứ diện. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, AD, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện. Hai cạnh không có điểm chung gọi là hai cạnh đối diện. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

Tứ diện ABCD có thể coi là hình chóp tam giác với 4 cách chọn đỉnh chóp.

Tứ diện đều là tứ diện có 4 mặt là 4 tam giác đều.

- Thiết diện (hay mặt cắt) của hình (H) khi cắt bởi mp(P) là phần chung của mp(P) và hình (H).

- Quy ước: Khi nói đến "tam giác", ta có thể hiểu là hình gồm ba cạnh của nó hoặc là hình gồm ba cạnh và các điểm nằm trong tam giác đó. Đối với đa giác cũng như thế.

Chú ý: - Nếu có nhiều điểm thuộc một mặt phẳng thì ta nói rằng các điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng không đồng phẳng.

- Hình lập phương ABCD.A'B'C'D' gồm 6 mặt là hình vuông, hình hộp chữ nhật gồm 6 mặt là hình chữ nhật.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: HÌNH BIỂU DIỄN VÀ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

- Để vẽ được hình biểu diễn hoặc đánh giá một hình biểu diễn đúng hoặc sai, ta dựa vào các quy tắc vẽ hình biểu diễn đã nêu: đoạn thẳng, đường thẳng song song, cắt nhau, điểm thuộc đường thẳng,... và đặc biệt là vẽ liền nét cho những đường trông thấy và vẽ nét đứt cho phần đường bị mặt che khuất. Trước hết là tập vẽ đúng, sau đó chỉnh hình và nâng lên vẽ tốt để thuận lợi cho việc nhìn và định hướng giải toán.

- Vị trí tương đối của điểm A và đường thẳng a là $A \in a$ hoặc $A \notin a$, của điểm B và mặt phẳng $(\alpha)$ là $B \in (\alpha)$ hoặc $B \notin (\alpha)$.

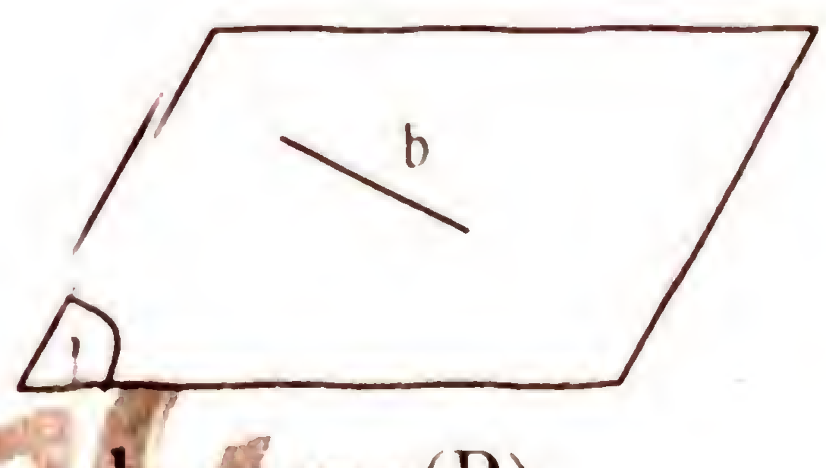
- Một đường thẳng được xác định khi biết hai điểm phân biệt của nó, hoặc 2 mặt phẳng phân biệt cùng chứa nó.

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng, hoặc biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó, hoặc biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

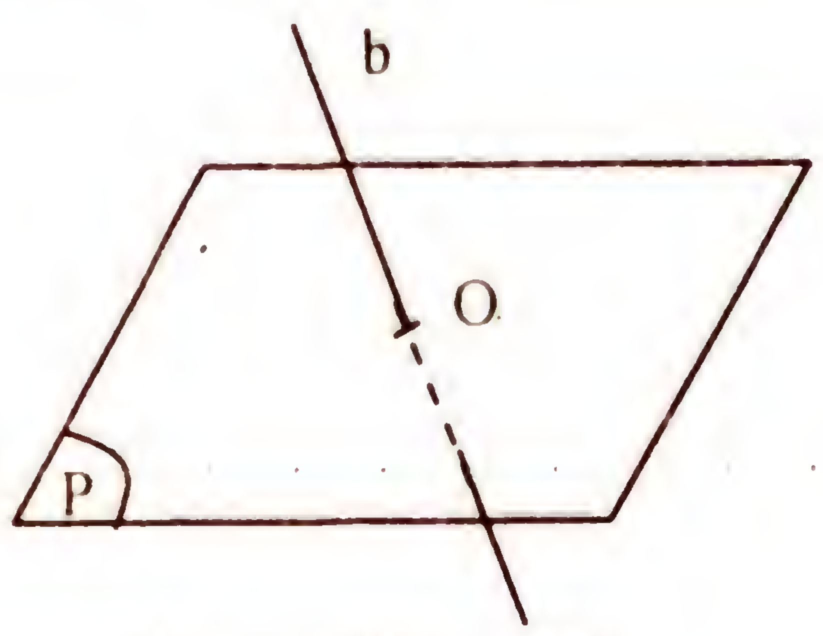
Chú ý: Sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh gián tiếp.

**Ví dụ 1**: Vẽ hình biểu diễn một đường thẳng nằm trong mặt phẳng, một đường thẳng cắt mặt phẳng.

**Giải**



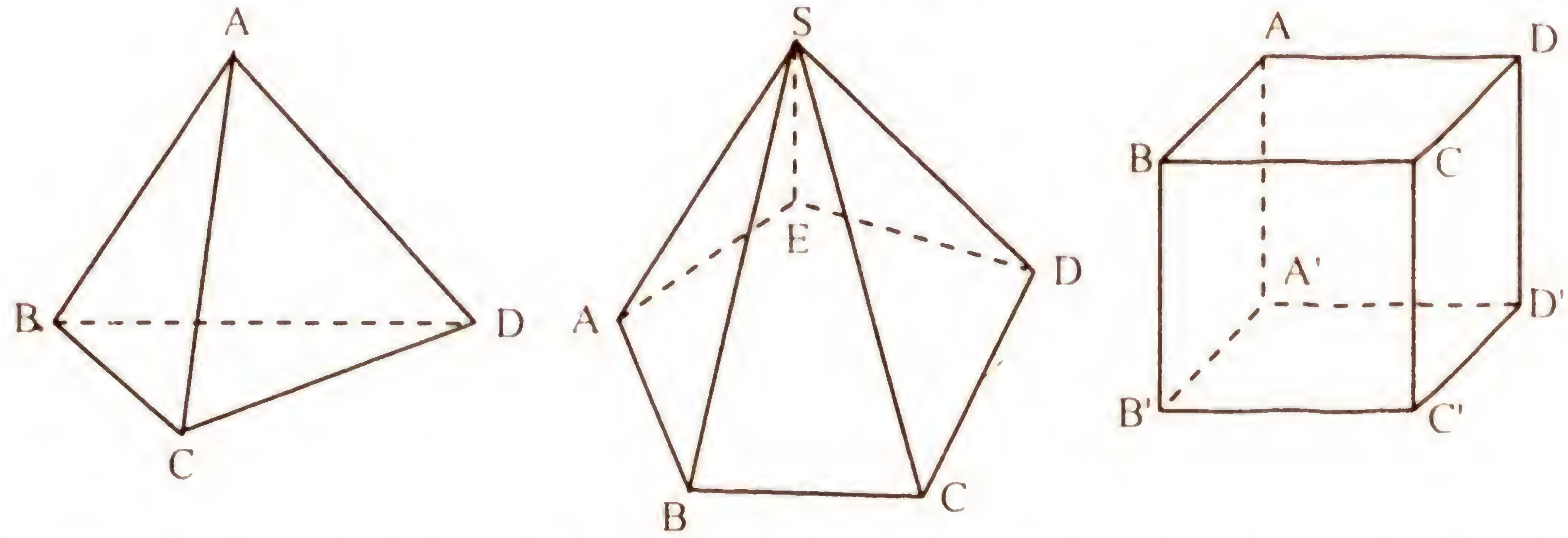

$b \subset mp(P)$




$b \cap (P) = O$

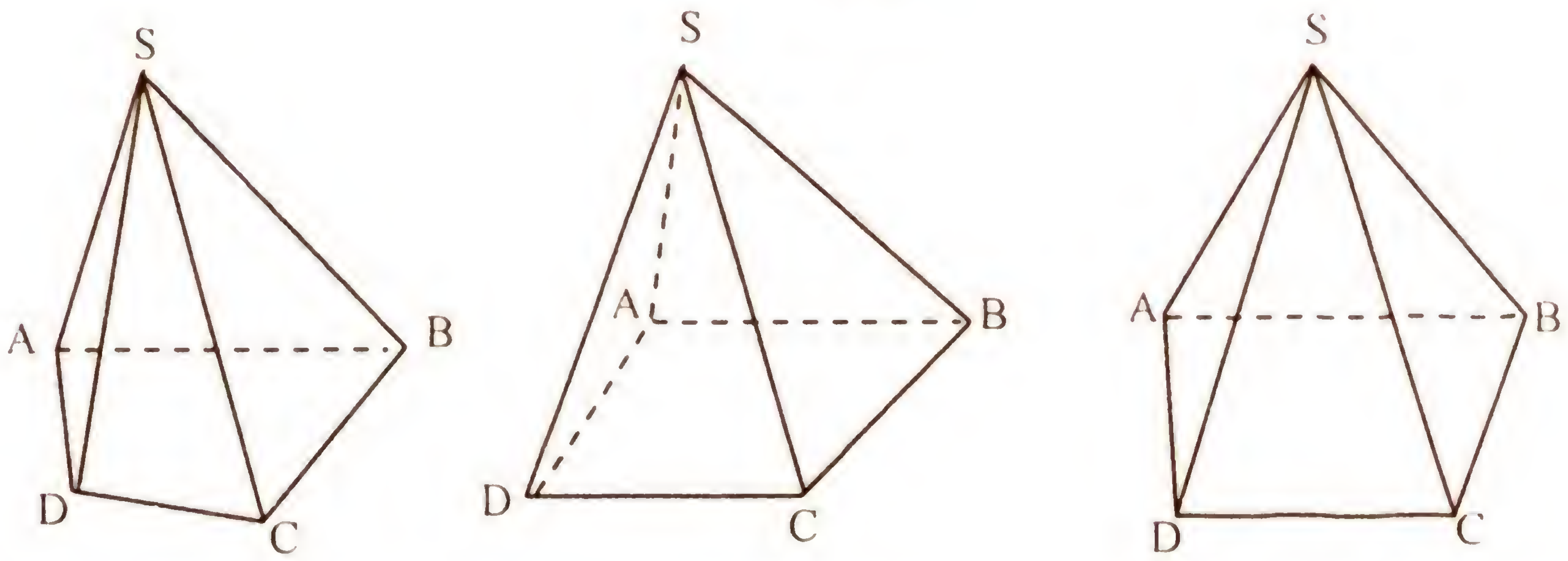
**Ví dụ 2**: Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện, hình chóp ngũ giác, hình lập phương.

**Giải**

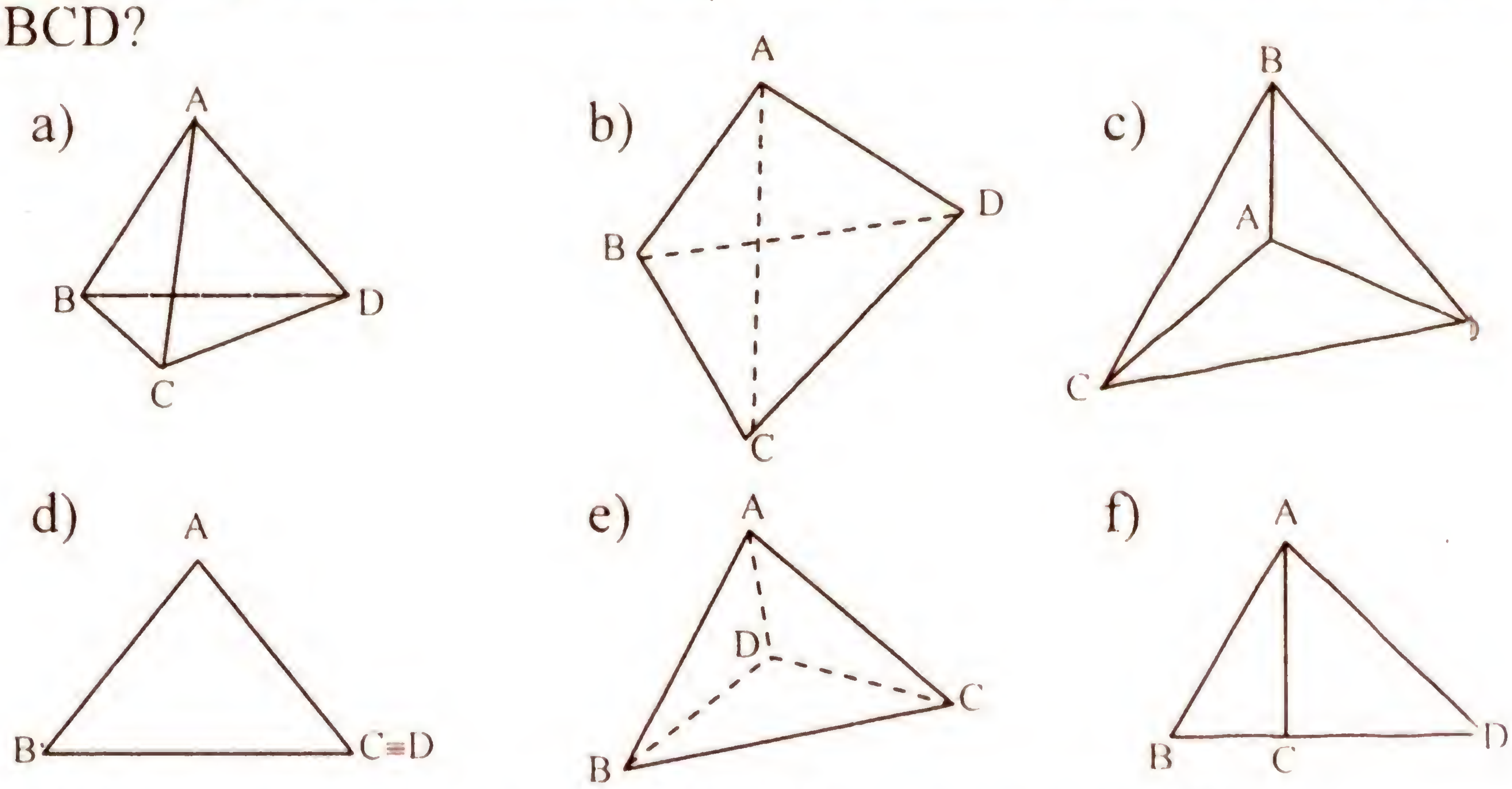



**Ví dụ 3:** Vẽ hình biểu diễn của một hình chóp tứ giác với đáy là tứ giác lồi, đáy là hình bình hành, đáy là hình thang.

**Giải**




**Ví dụ 4**: Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của một tứ diện ABCD?




Các hình c), d), e), f) là hình biểu diễn của tứ diện ABCD.

Hình a) không phải vì AC, BD đều liền nét (thấy)

Hình b) không phải vì AC, BD đều nét đứt (khuất).

**Ví dụ 5**: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước;

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước;

c) Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.

**Giải**

Theo tính chất thừa nhận 2 thì b) đúng và c) đúng.

**Ví dụ 6** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng cho trước.

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó;

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

**Giải**

Theo các cách xác định một mặt phẳng thì chỉ có c) đúng.

**Ví dụ 7**: Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

a) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước;

b) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước;

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

**Giải**

Theo cách xác định một mặt phẳng thì chỉ có b) đúng.

**Ví dụ 8**: a) Có hình chóp nào mà số cạnh gồm các cạnh bên và cạnh đáy của nó là số lẻ không? Tại sao?

b) Hình chóp có 20 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

**Giải**

a) Không có hình chóp nào mà số cạnh của nó là số lẻ, vì số cạnh bên của hình chóp bằng số cạnh đáy của nó nên số cạnh phải là số chẵn.

b) Hình chóp có 20 cạnh thì có 10 cạnh bên và 10 cạnh đáy, 10 cạnh đáy thì có 10 mặt bên. Hình chóp có một mặt đáy nên số mặt là 10 + 1 = 11.

**Ví dụ 9**: Cho tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng nếu trên đường thẳng AB lấy hai điểm P, Q phân biệt thì hai đường thẳng CP và DQ không cắt nhau, hai đường thẳng CQ và DP cũng không cắt nhau.

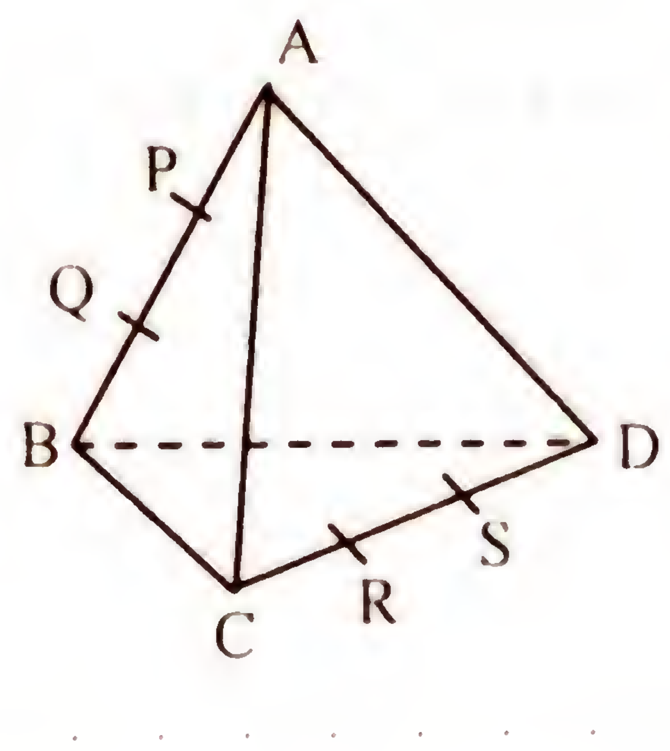
b) Có thể tìm hai điểm P, Q phân biệt trên AB và R, S phân biệt trên CD sao cho bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng hay không?

**Giải**

Ta dùng phương pháp phản chứng.

a) Giả sử CP và DQ cắt nhau thì bốn điểm P, Q, C, D đồng phẳng và do đó A, B, C, D đồng phẳng vô lí. Tương tự CQ và DP cũng không cắt nhau.

b) Giả sử có các điểm P, Q, R, S như vậy thì 4 điểm A, B, C, D sẽ đồng phẳng: vô lý. Vậy không tồn tại.

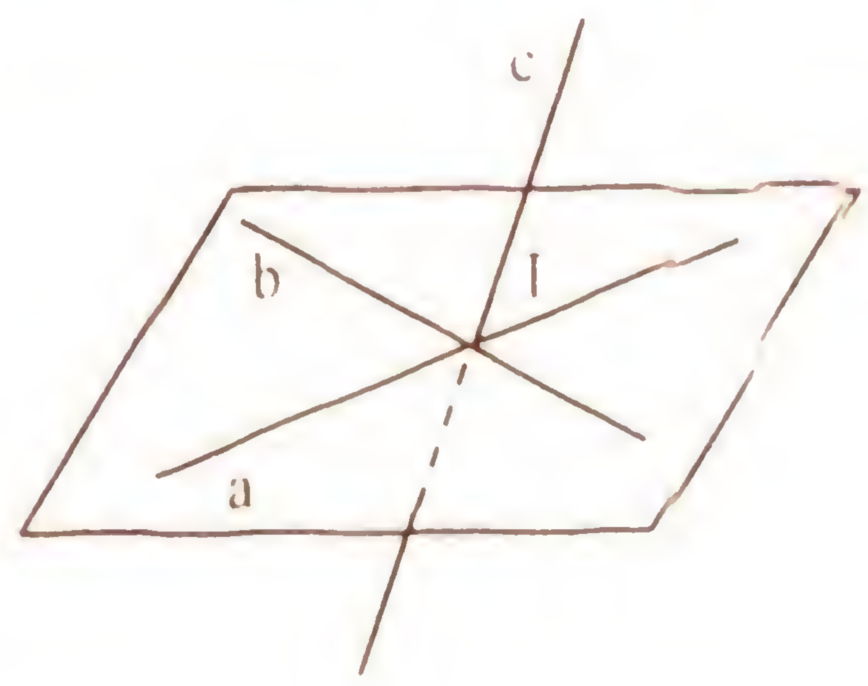


**Ví dụ 10**: Cho n điểm ($n \geq 4$) trong đó bất kì 4 điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng tỏ rằng n điểm đó đồng phẳng.

**Giải**

Ta dùng phản chứng. Giả sử n điểm đó không đồng phẳng thì ít nhất phải có 4 điểm trong chúng không đồng phẳng, trái giả thiết.

**Ví dụ 11**: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Một đường thẳng c cắt cả a và b. Có thể kết luận rằng ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng hay không?



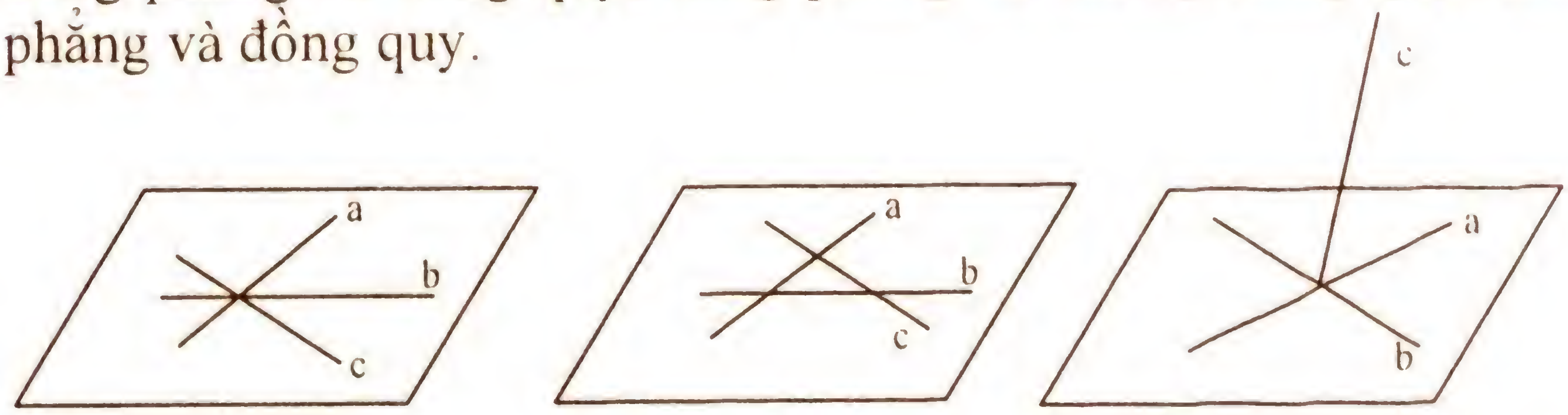

**Giải**

Không chắc: Bởi vì nếu a và b cắt nhau tại I thì đường thẳng c qua I cắt cả a và b nhưng nó có thể không thuộc mp(a; b).

**Ví dụ 12**: Cho 3 đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau. Có thể kết luận 3 đường này đồng phẳng và đồng quy?

**Giải**

Không chắc. Ta minh hoạ 3 hình vẽ sau tương ứng 3 đường thẳng a, b, c đồng phẳng và đồng quy; đồng phẳng và không đồng quy; không đồng phẳng và đồng quy.

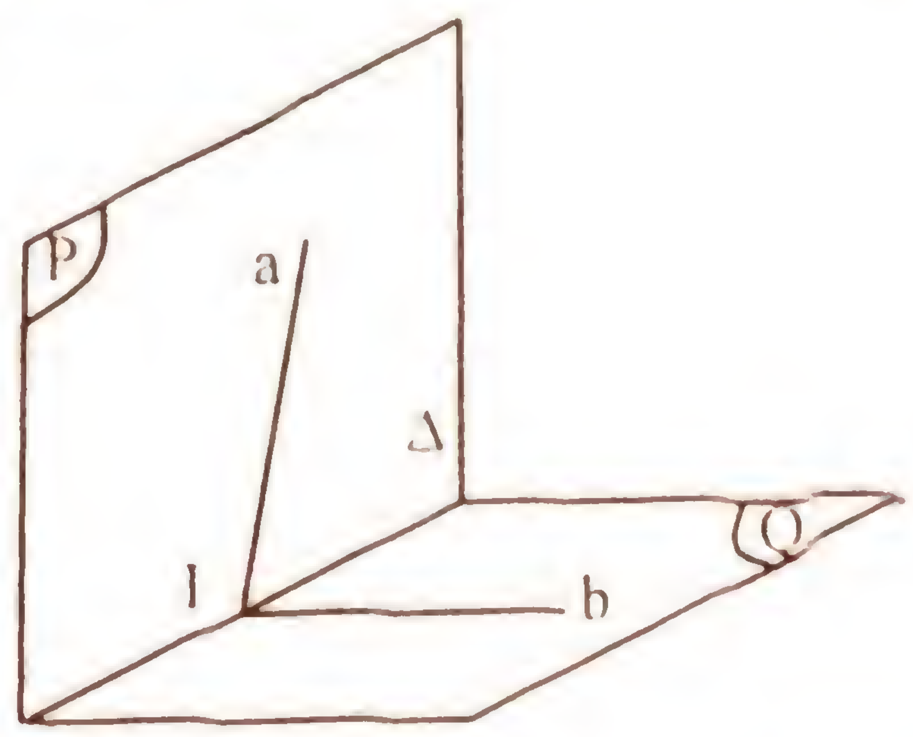



**Ví dụ 13**: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh rằng nếu a và b cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên Δ.

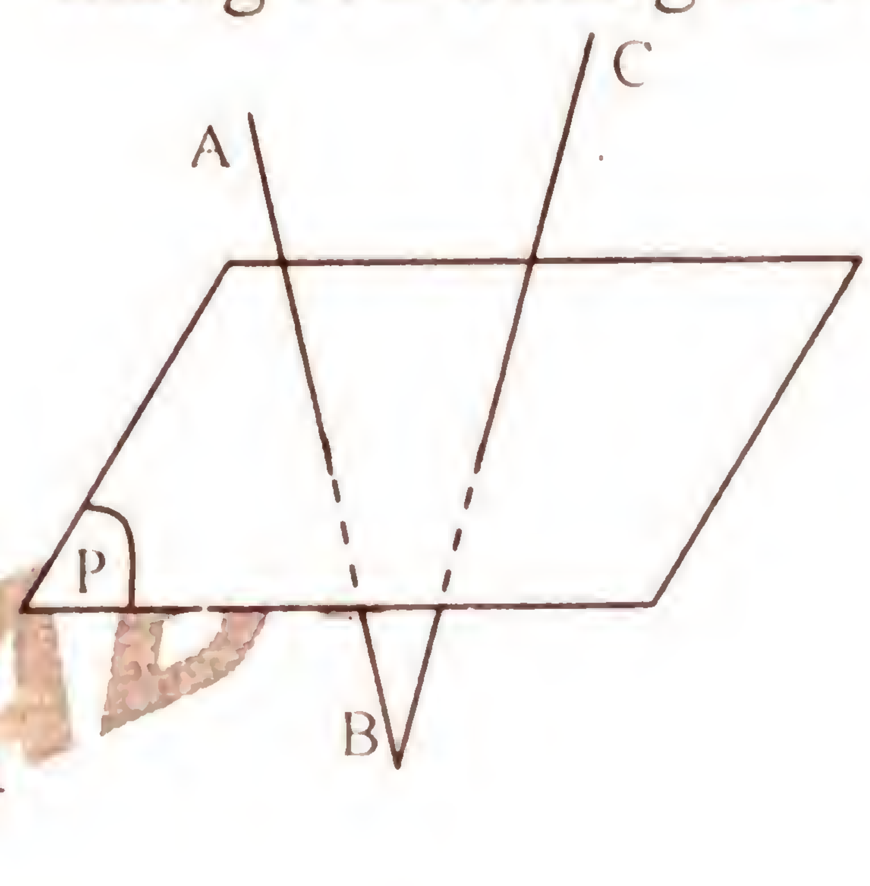
**Giải**

Giả sử a và b cắt nhau tại I. Khi đó I thuộc a, mà a lại thuộc mp(P) suy ra $I \in (P)$. Lí luận tương tự ta có $I \in (Q)$ nên I phải thuộc giao tuyến của (P) và (Q).

Vậy $I \in \Delta$.




**Ví dụ 14**: Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C không nằm trên (P). Giả sử đoạn thẳng AB và đoạn thẳng BC đều cắt mp(P). Chứng minh rằng đoạn thẳng AC không cắt mp(P).



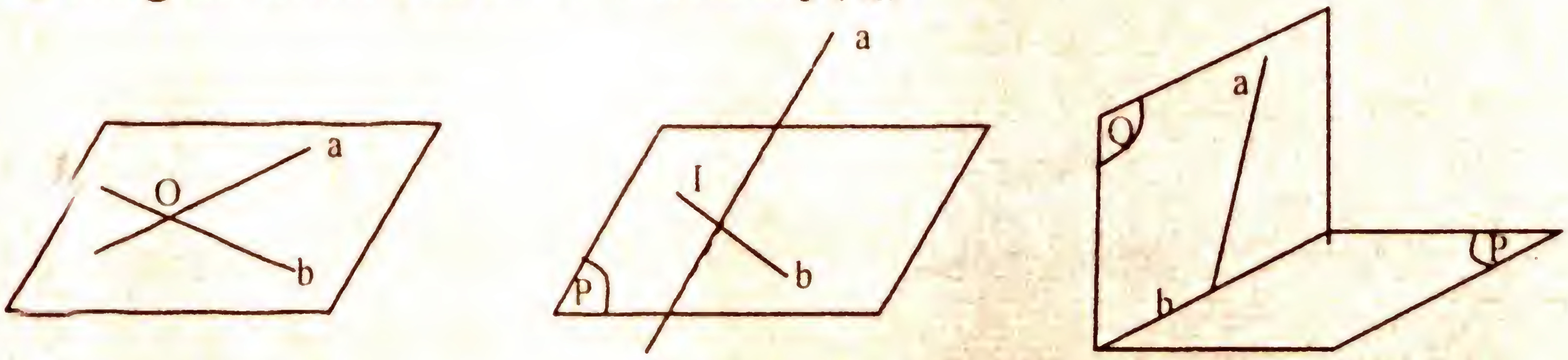

**Giải**

Vì đoạn AB cắt (P) nên A và B ở khác phía đối với (P). Tương tự BC cắt (P) nên B và C ở khác phía đối với (P). Do đó A và C ở cùng phía đối với (P) nên đoạn AC không cắt (P).

## DẠNG 2: GIAO ĐIỂM, GIAO TUYẾN, THIẾT DIỆN

- Xác định giao điểm của 2 đường thẳng a, b: trước hết 2 đường thẳng này phải thuộc 1 mặt phẳng, sau đó mới xác định giao điểm nếu có của chúng.

- Xác định giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P): Nếu trong (P) tìm được đường thẳng b cắt a tại I thì I là giao điểm cần tìm. Tổng quát, chọn mặt phẳng phụ (Q) thuận lợi chứa a, tìm giao tuyến b của (P) và (Q), bài toán đưa về tìm giao điểm của a với b trên mp(Q).




Chú ý: -Hai đường thẳng đồng phẳng mới hy vọng cắt nhau.

- Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q): Tìm hai điểm chung phân biệt M, N của 2 mặt phẳng, giao điểm là đường thẳng MN: (P) $\cap$ (Q) = MN.

Chú ý: Nếu 2 mặt phẳng đã có một điểm chung rồi thì chỉ cần tìm thêm điểm chung thứ 2, điểm này thường là giao điểm của 2 đường thẳng đặc biệt lần lượt nằm trong 2 mặt phẳng đã cho nhưng lại thuộc mặt phẳng thứ 3.

- Xác định thiết diện (mặt cắt) của mặt phẳng (P) với hình khối (H): mặt phẳng (P) cắt một số cạnh của (H) tạo thành đỉnh, cắt một số mặt của (H) tạo thành cạnh. Các đỉnh và các cạnh này tạo thành đa giác thiết diện.

Chú ý: Thiết diện là một hình "kín biên", "kín" là được nối liên tiếp và khép kín chu vi đa giác, "biên" là các cạnh thuộc các mặt ngoài của hình khối.

• Các kỹ thuật quan trọng:

- Tìm hai đường thẳng nào cắt nhau, hai đoạn thẳng nào kéo dài cắt nhau trong mặt phẳng.

- Đường gióng: Có thể gióng chiếu từ đỉnh các điểm, các đường thẳng xuống cạnh đáy, mặt đáy, rồi gióng chiếu ngược lên tìm giao điểm.

- Giao tuyến gốc: Bài toán thực hiện từng bước, có thể dùng giao tuyến của 2 mặt phẳng này làm cơ sở để tìm tiếp các giao điểm, giao tuyến còn lại.

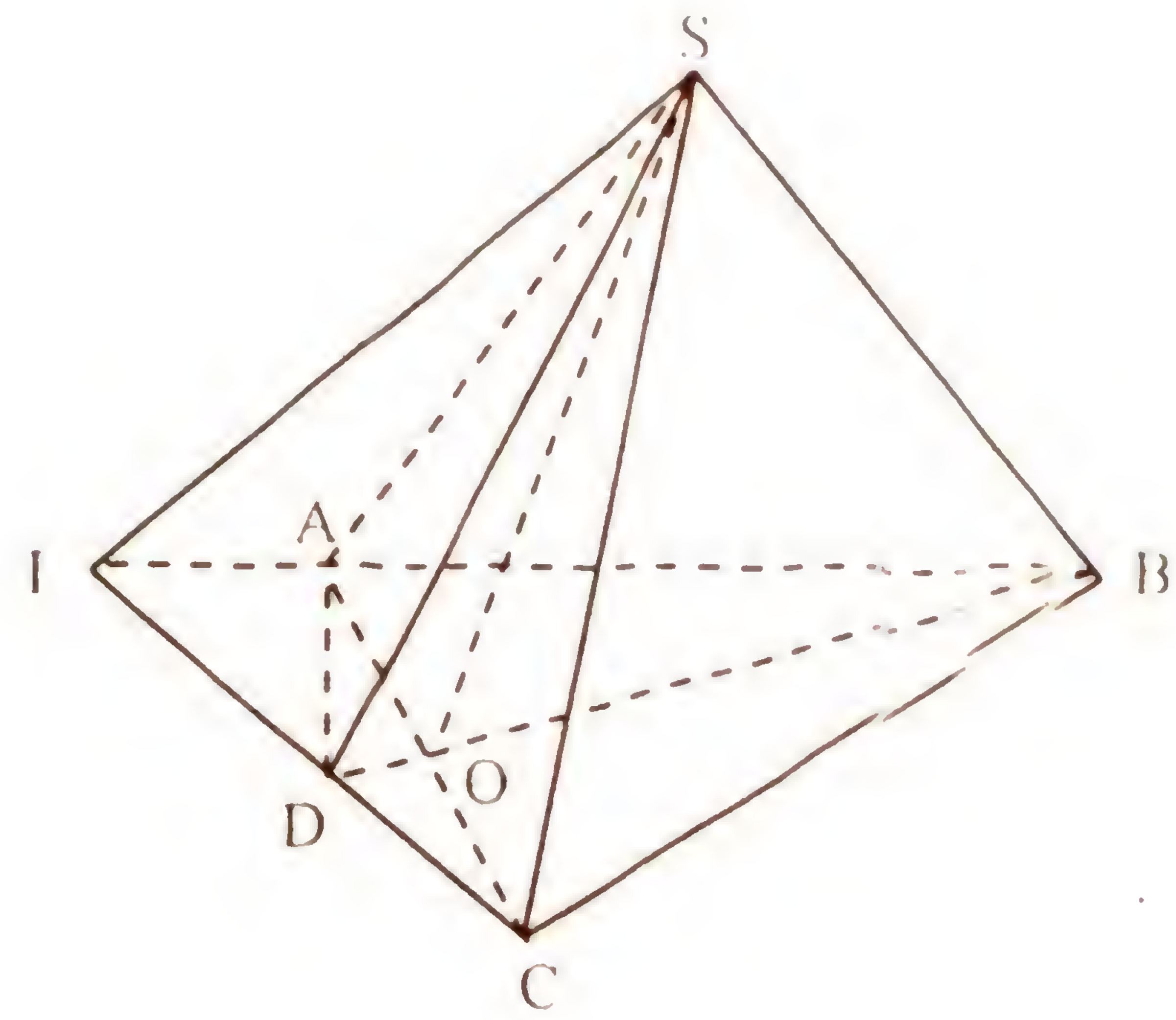
- Quan hệ cho: Lưu ý các giả thiết của đề bài về song song và không song song, về phân biệt và không phân biệt, về đồng phẳng và không đồng phẳng, ...

**Ví dụ 1**: Cho hình chóp S.ABCD, đáy có 2 cạnh AB và CD không song song. Xác định giao tuyến của:

a) Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

**Giải**

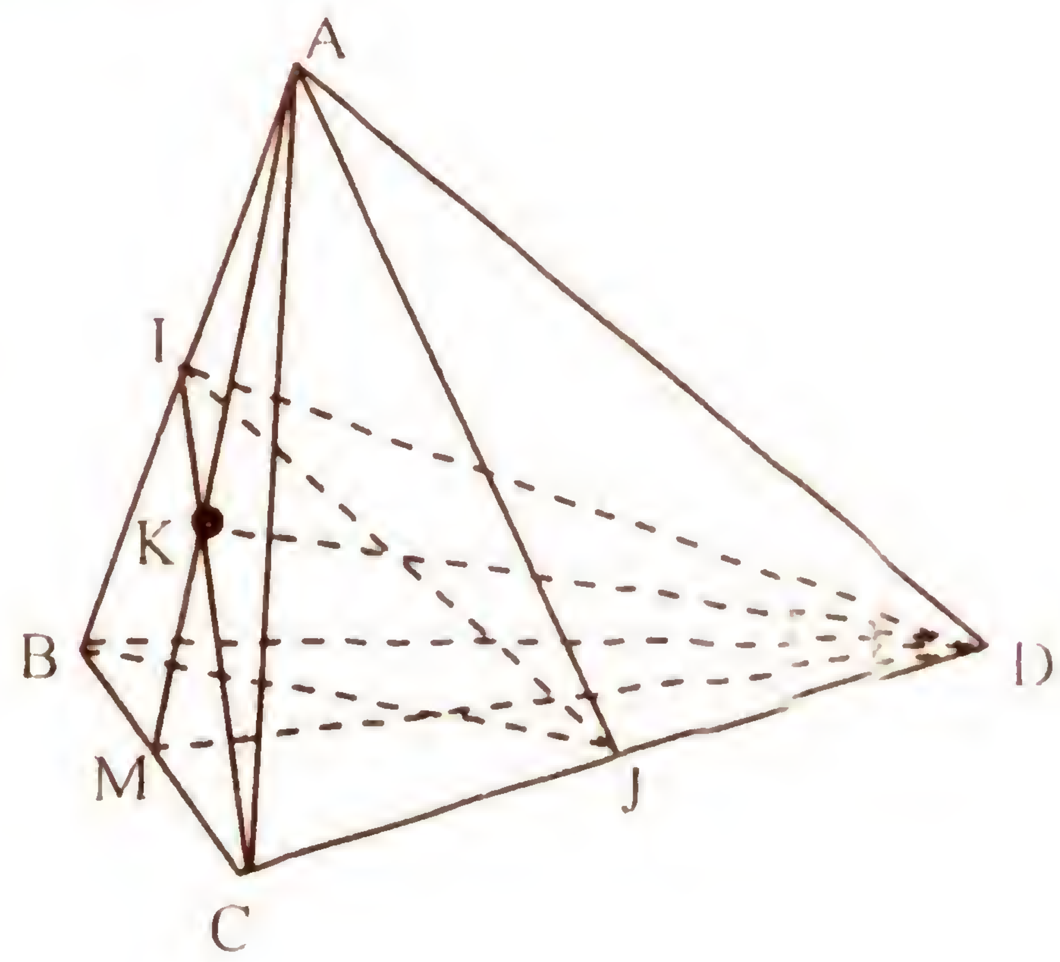



a) Ta có S là điểm chung thứ nhất của 2 mp(SAC) và mp(SBD). Gọi O là giao điểm của AC và BD thì O là điểm chung thứ hai.
Vậy giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD) là đường thẳng SO.

b) Theo giả thiết, AB và CD không song song nên kéo dài cắt nhau tại I. Ta có S và I là 2 điểm chung của 2 mp(SAB) và (SCD) nên giao tuyến là đường thẳng SI.

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi K là trung điểm của CI. Xác định giao tuyến của:
a) (ABJ) và (CDI)
b) (AKD) và (BCD).

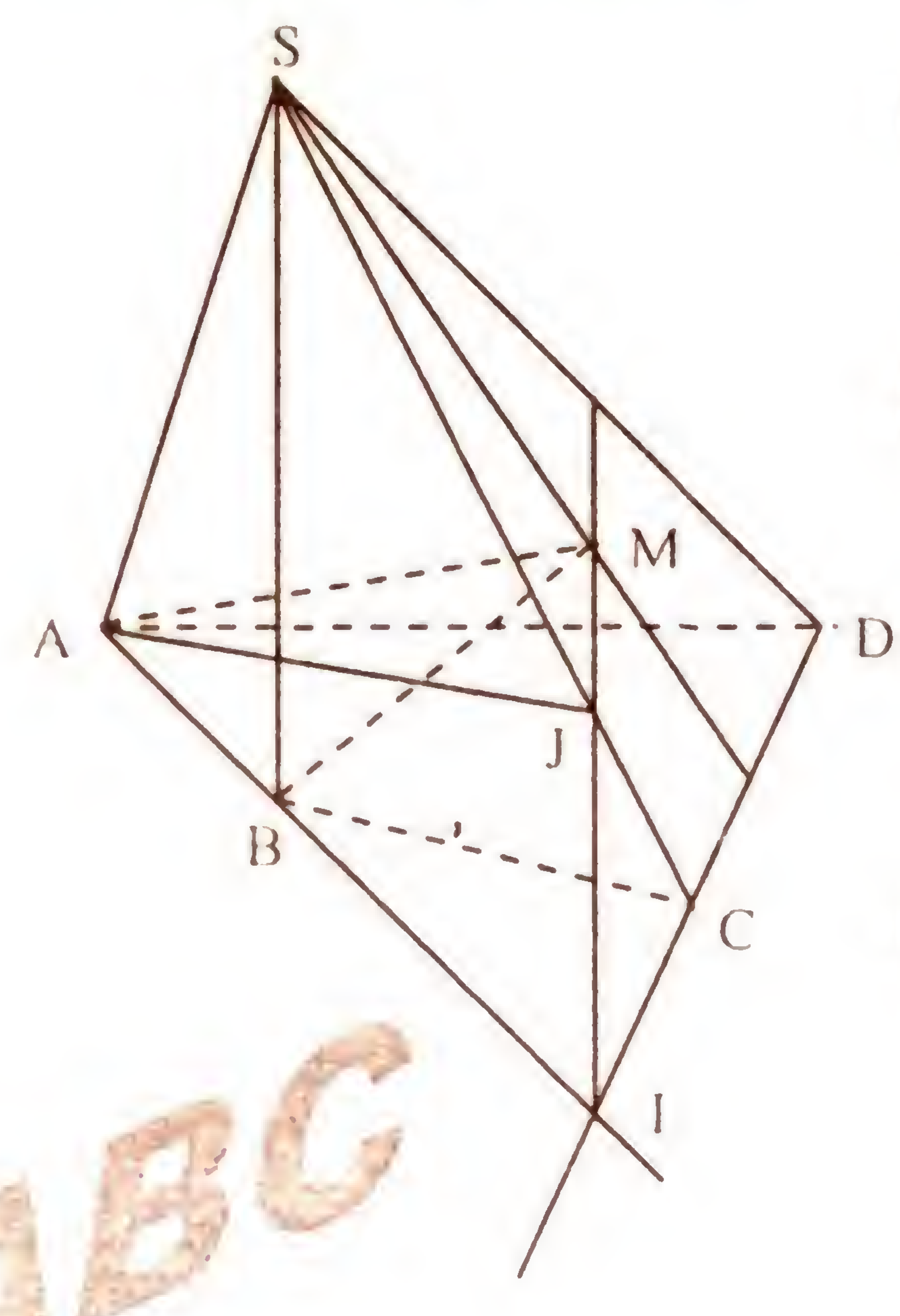
**Giải**




a) Ta có I thuộc AB, J thuộc CD nên I và J là hai điểm chung của 2 mp(ABJ), mp(CDI) nên giao tuyến của chúng là IJ.

b) Trong mp(ABC), kéo dài AK cắt BC tại M thì D và M là hai điểm chung của 2 mp(AKD) và (BCD).
Do đó giao tuyến của chúng là đường thẳng MD.

**Ví dụ 3**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác ABCD có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:
a) (SBM) và (SCD)
b) (ABM) và (SCD)
c) (ABM) và (SAC).




**Giải**

a) Ta có S và M là hai điểm chung của 2 mp(SBM) và (SCD) nên giao tuyến là đường thẳng SM.

b) Từ giả thiết, trong mp(ABCD) kéo dài AB, CD cắt nhau tại I.
Vì I ∈ AB, I ∈ CD nên I và M là 2 điểm chung của 2 mp(ABM) và mp(SCD) nên giao tuyến của chúng là đường thẳng IM.

c) Trong mp(SCD), IM cắt SC tại J thì giao tuyến của mp(ABM) và (SAC) là đường thẳng AJ.

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD với hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi A' là một điểm nằm giữa hai điểm S và A. Hãy tìm các giao tuyến của mp(A'CD) với các mặt phẳng

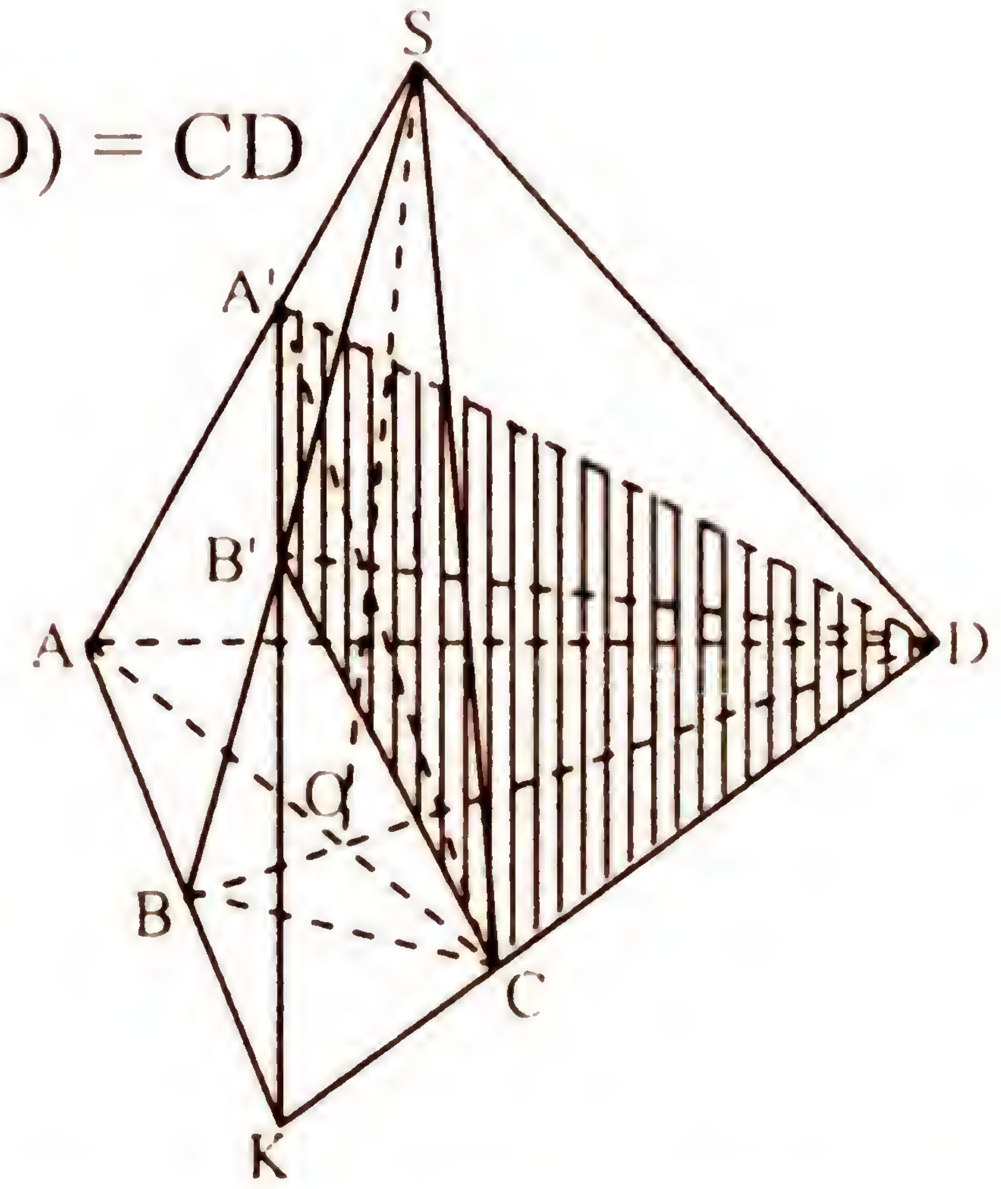
a) (ABCD), (SCD), (SDA) b) (SBC), (SAB).

**Giải**

a) Theo giả thiết ta có:

$(ABCD) \cap (A'CD) = CD$ ; $(SCD) \cap (A'CD) = CD$

$(SDA) \cap (A'CD) = DA'$.




b) Trong mp(ABCD), kéo dài AB cắt CD tại K

Trong mp(SAB), A'K cắt SB tại B' thì

$(SAB) \cap (A'CD) = A'B'$

$(SBC) \cap (A'CD) = CB'$

Cách khác:

Trong mp(ABCD), AC cắt BD tại O.

Trong mp(SAC), SO cắt A'C tại I.

Trong mp(SBD), DI cắt SB tại B'.

**Ví dụ 5:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC.

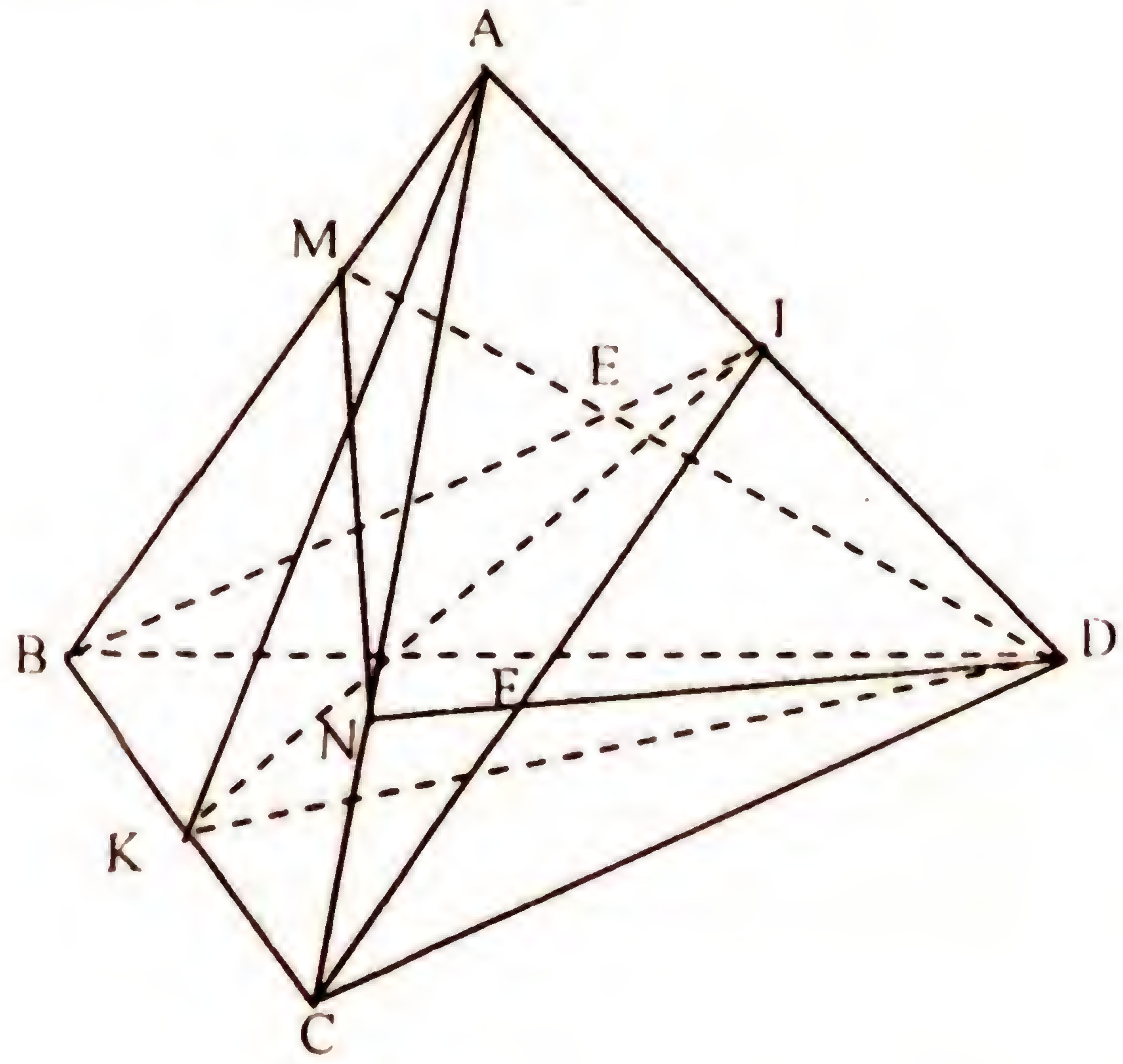
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi M và N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

**Giải**

a) Hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) có hai điểm chung là I và K. Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng IK.

b) Gọi E là giao điểm của BI và MD, F là giao điểm của CI và DN. Hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) có hai điểm chung là E và F. Vậy đường thẳng EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).




**Ví dụ 6:** Cho tứ diện ABCD và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

b) Lấy N là điểm thuộc miền trong của tam giác ABD sao cho JN cắt đoạn AB tại H. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNJ) và (ABC).

**Giải**

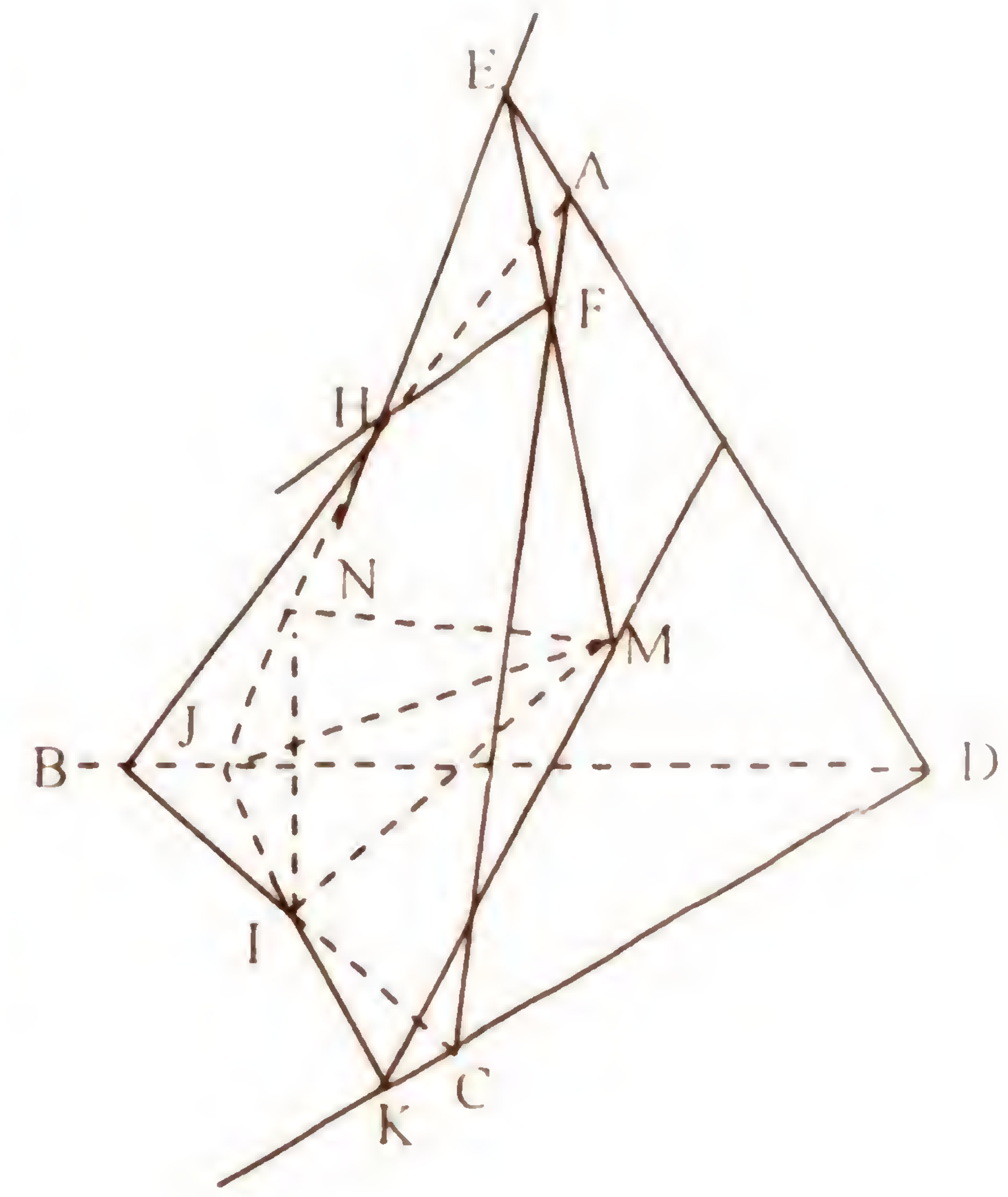
a) Theo giả thiết, kéo dài IJ cắt CD tại K. Ta có M và K là hai điểm chung của 2 mp(IJM) và (ACD) nên giao tuyến của chúng là đường thẳng KM.

b) Vì $JN \cap AB = H$ nên H là điểm chung của 2 mp(MNJ), (ABC).

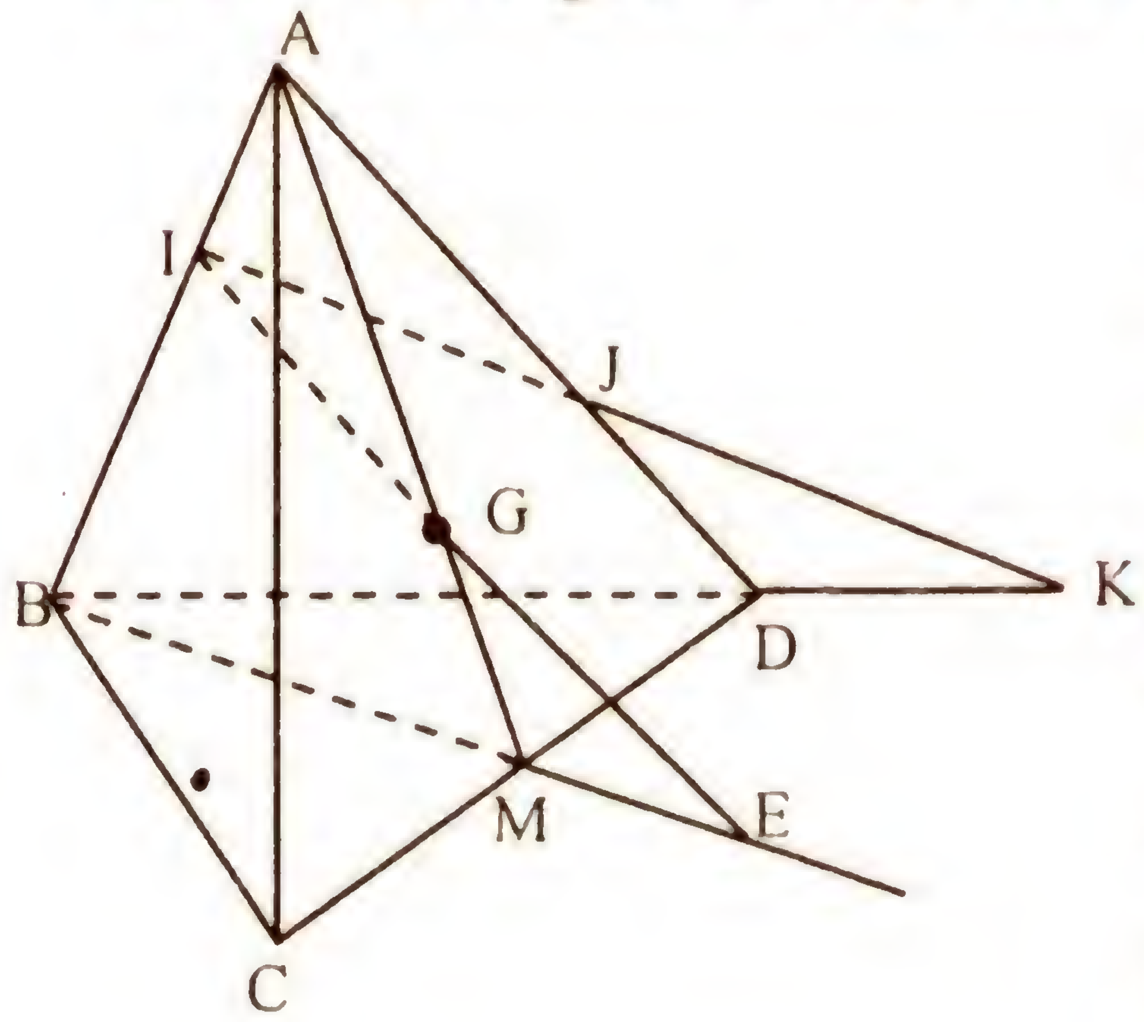
Trong mp(ABD), $JH \cap AD = E$.

Trong mp(ACD), $EM \cap AC = F$ thì F là điểm chung thứ hai.

Vậy $(ABC) \cap (MNJ) = HF$.




**Ví dụ 7**: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với $AI = \frac{1}{3}AB$ và $AJ = \frac{3}{4}AD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ, IG với mp(BCD).




**Giải**

Trong mp(ABD), theo giả thiết IJ, BD không song song nên kéo dài cắt nhau tại K.

Ta có $K \in IJ, K \in BD$

$\Rightarrow K \in IJ, K \in (BCD)$.

Vậy $IJ \cap (BCD) = K$.

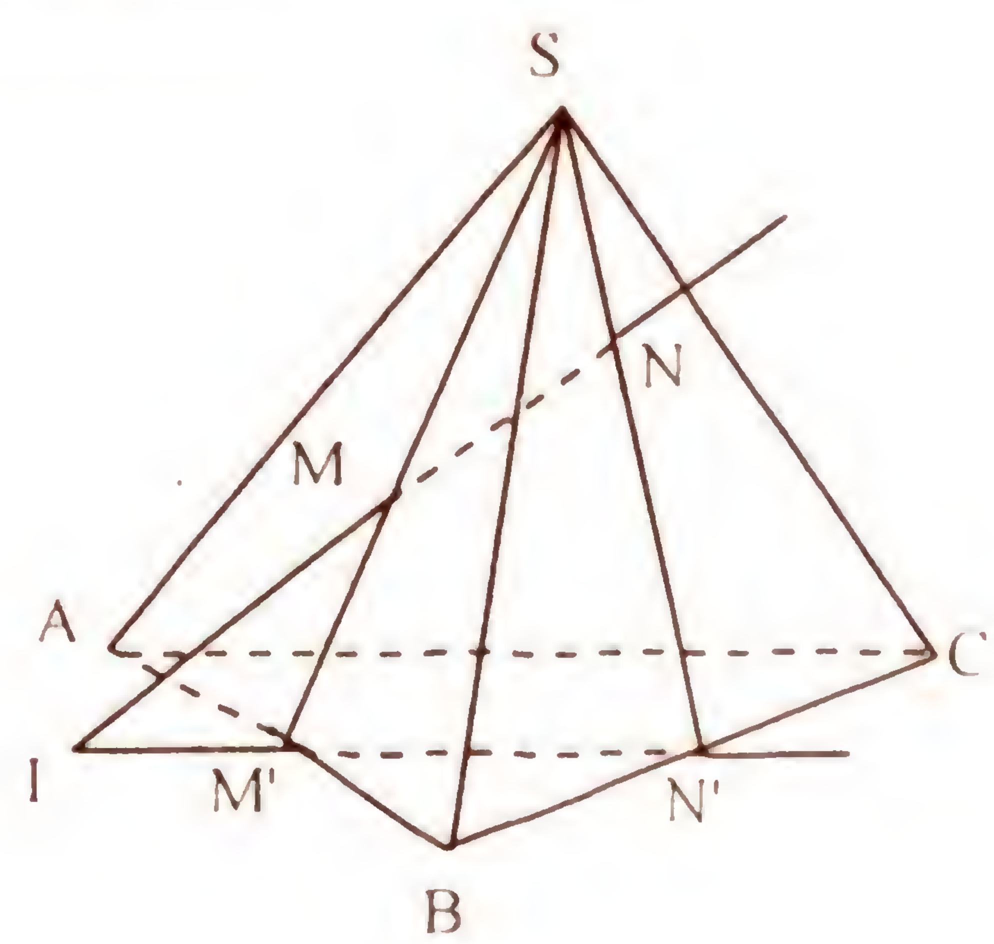
Gọi M là trung điểm của CD, trong mp(ABM) kéo dài IG cắt BM tại E thì E chính là giao điểm của IG với mp(BCD).

**Ví dụ 8**: Cho hình chóp tam giác S.ABC. Một điểm M nằm trong miền tam giác SAB, một điểm N nằm trong miền tam giác SBC. Xác định giao điểm của đường thẳng MN và mp(ABC) nếu có.

**Giải**

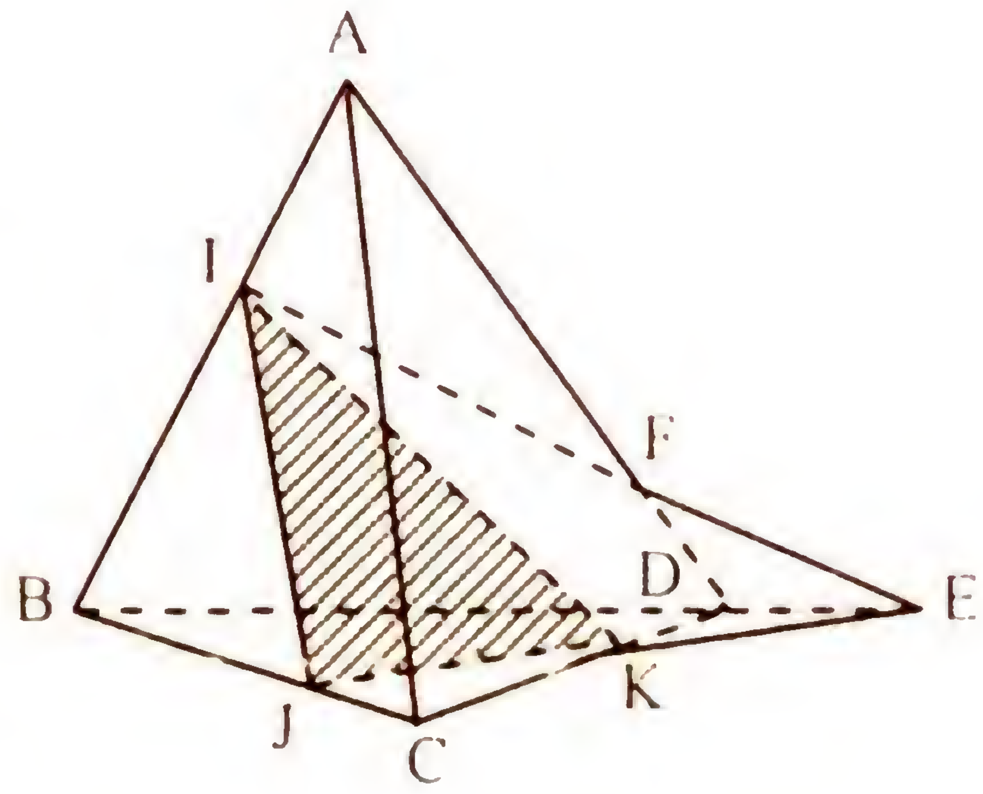
Kéo dài SM cắt AB tại M', SN cắt BC tại N'.

Trong mp(SM'N') nếu MN cắt M'N' tại I thì I chính là giao điểm của đường thẳng MN và mp(ABC). Đặc biệt, nếu MN // M'N', thì MN không cắt mp(ABC).



**Ví dụ 9**: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, BC và CD sao cho JB = 2JC, KC = 3KD. Tìm giao điểm của đường thẳng BD, đường thẳng AD với mp(IJK).

**Giải**




Trong mp(BCD), theo giả thiết đường thẳng JK không song song với BD nên kéo dài JK cắt BD tại E.

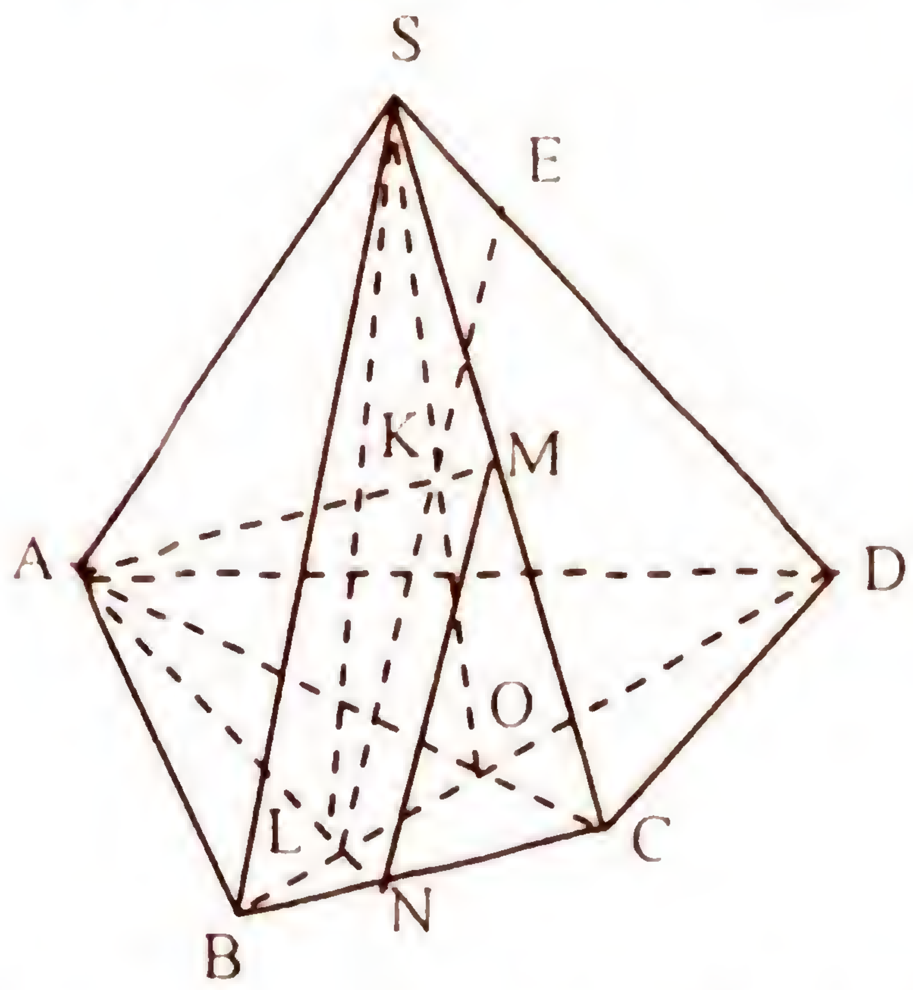
Ta có: BD ∩ (IJK) = E.

Trong mp(ABD), IE cắt AD tại F thì F chính là chính là giao điểm của đường thẳng AD với mp(IJK).

**Ví dụ 10:** Cho hình chóp S.ABCD, M và N tương ứng là các điểm thuộc các cạnh SC và BC.

a) Tìm giao tuyến của mp(SBD) và (AMN).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).




**Giải**

a) Trong mp(ABCD), AC ∩ BD = O, AN ∩ BD = L. Trong mp(SAC), SO ∩ AM = K thì (SBD) ∩ (AMN) = LK.

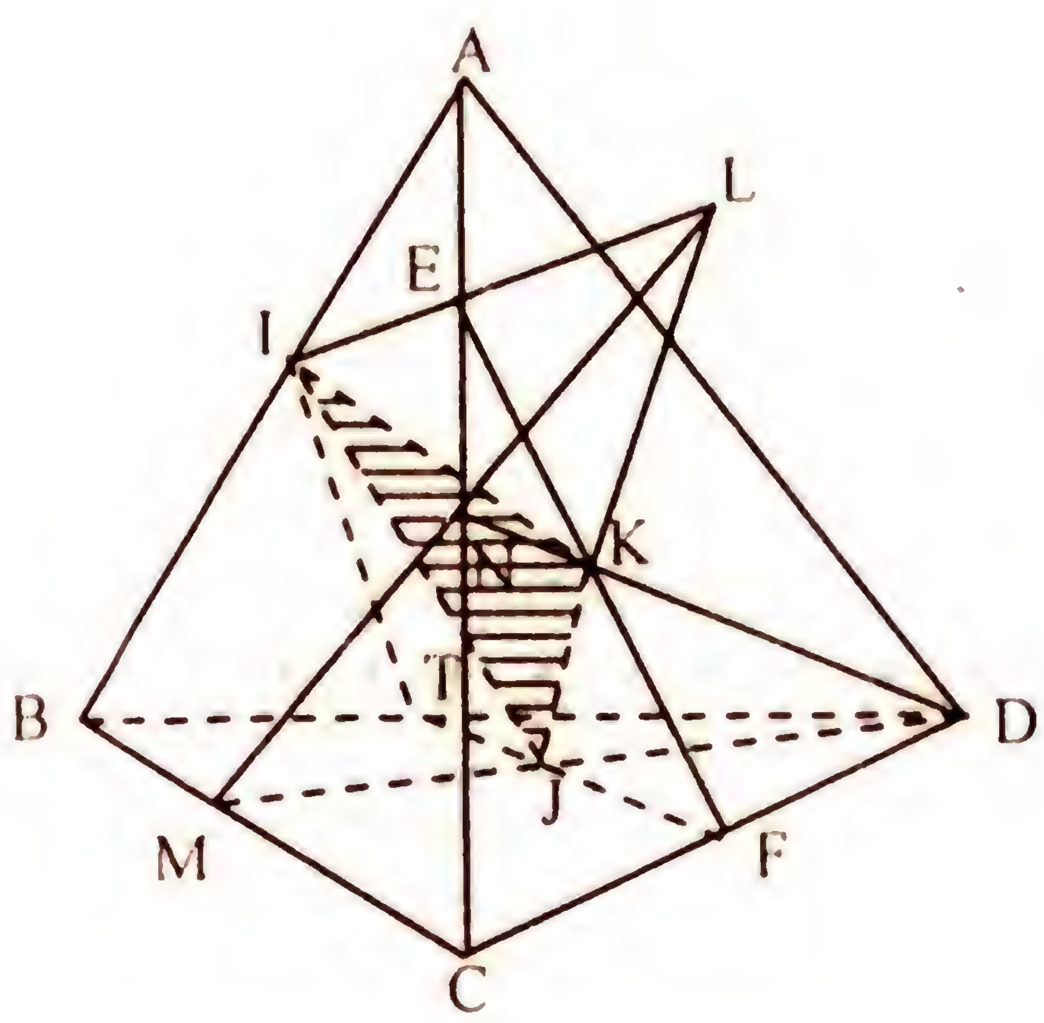
b) Dựa vào giao tuyến LK của câu trên thì trong mp(SBD), LK ∩ SD = E. Ta có L, K thuộc mp(AMN) nên E thuộc mp (AMN). Vậy E chính là giao điểm của SD với mp(AMN).

**Ví dụ 11:** Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm I và lấy các điểm J, K lần lượt là điểm thuộc miền trong các tam giác BCD và ACD.

a) Hãy xác định giao điểm L của IK với mp(ABC).

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện ABCD.

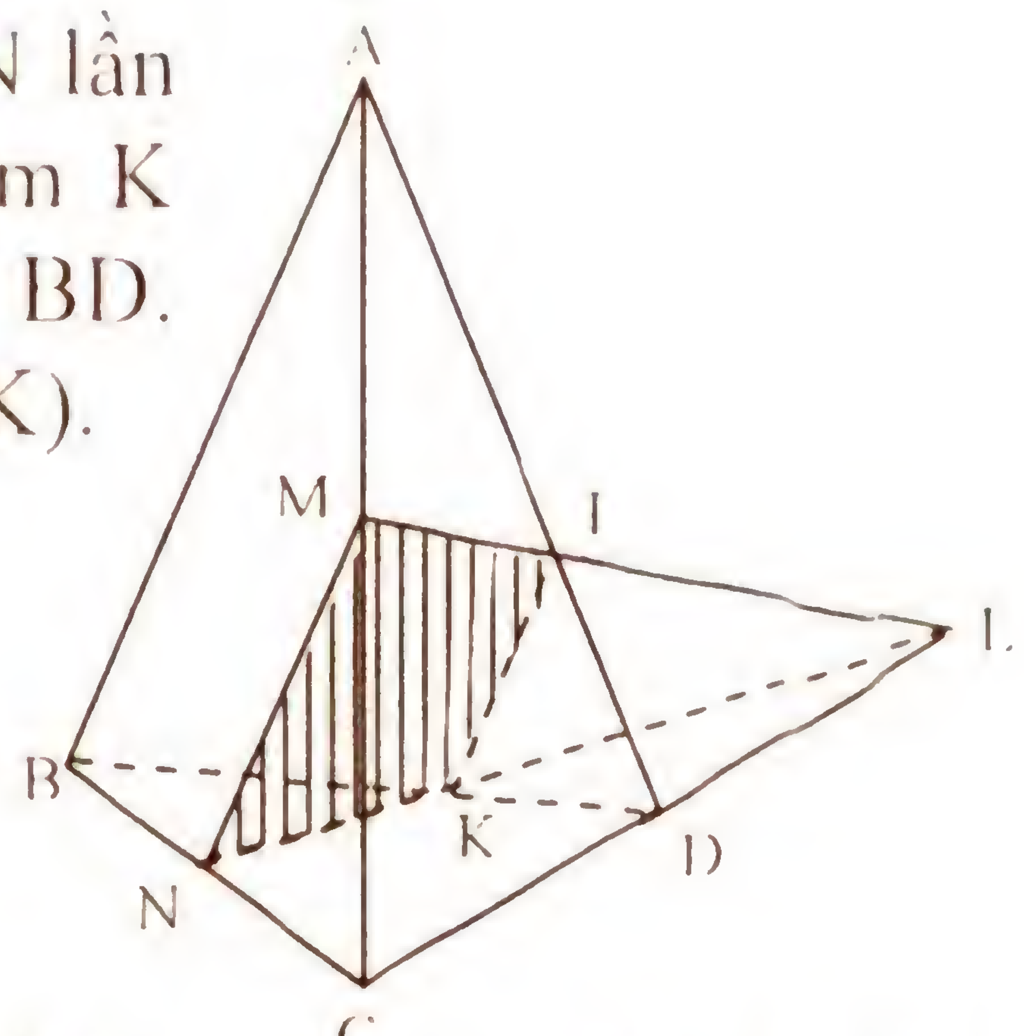
**Giải**




a) Trong mp(BCD), DJ ∩ BC = M
Trong mp(ACD), DK ∩ AC = N
Do đó (ABC) ∩ (KJD) = MN.
Trong mp(MND), JK ∩ MN = L
thì L = JK ∩ (ABC).

b) Theo câu a) thì (IJK) ∩ (ABC) = IL
Trong mp(ABC), IL ∩ AC = E,
trong mp(ACD), EK ∩ CD = F,
trong mp(BCD), FJ ∩ BD = T.
Ta có: (IJK) ∩ (ACD) = EF, (IJK) ∩ (BCD) = FT, (IJK) ∩ (ABD) = IT.

**Ví dụ 12:** Cho tứ diện ABCD, các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm K thuộc đoạn BD mà không là trung điểm của BD. Tìm thiết diện của tứ diện và mặt phẳng (MNK).



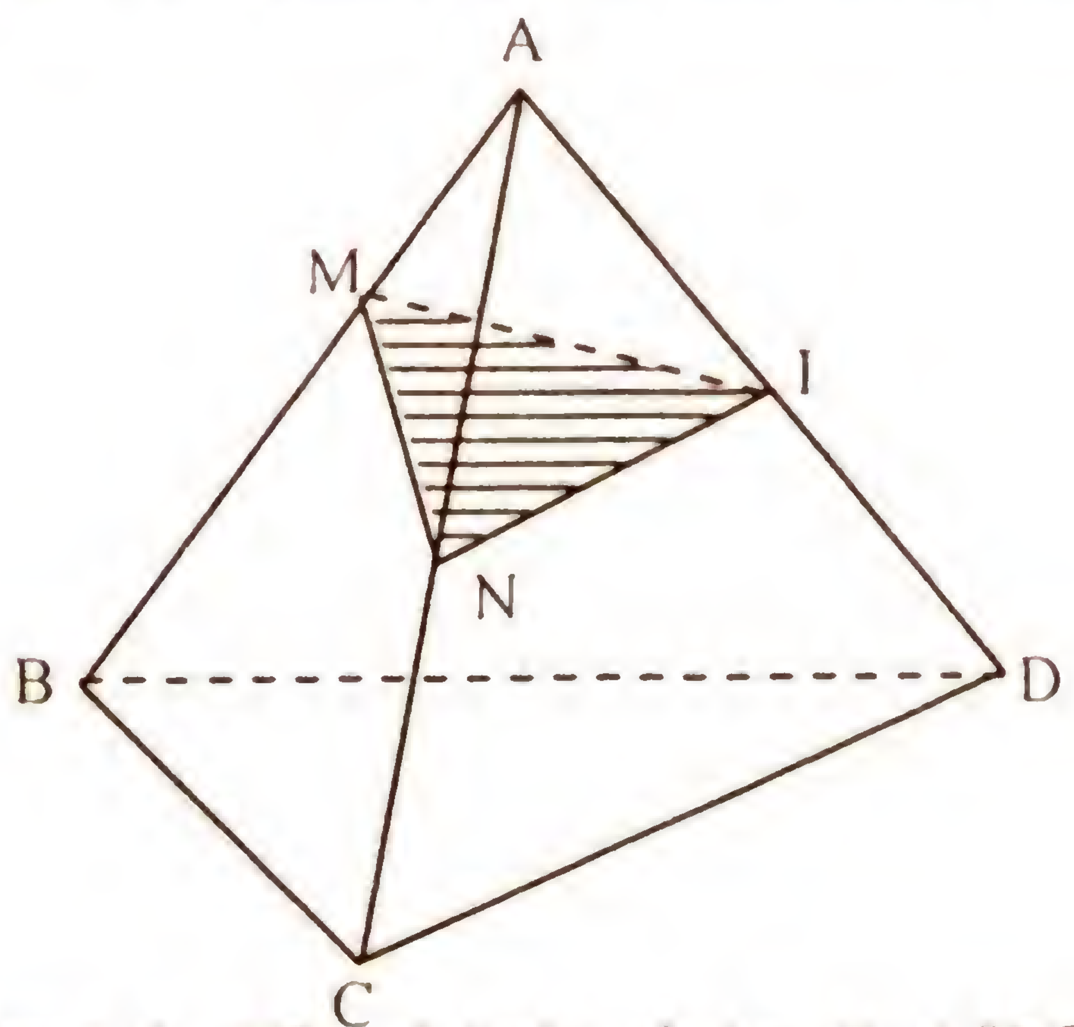

**Giải**

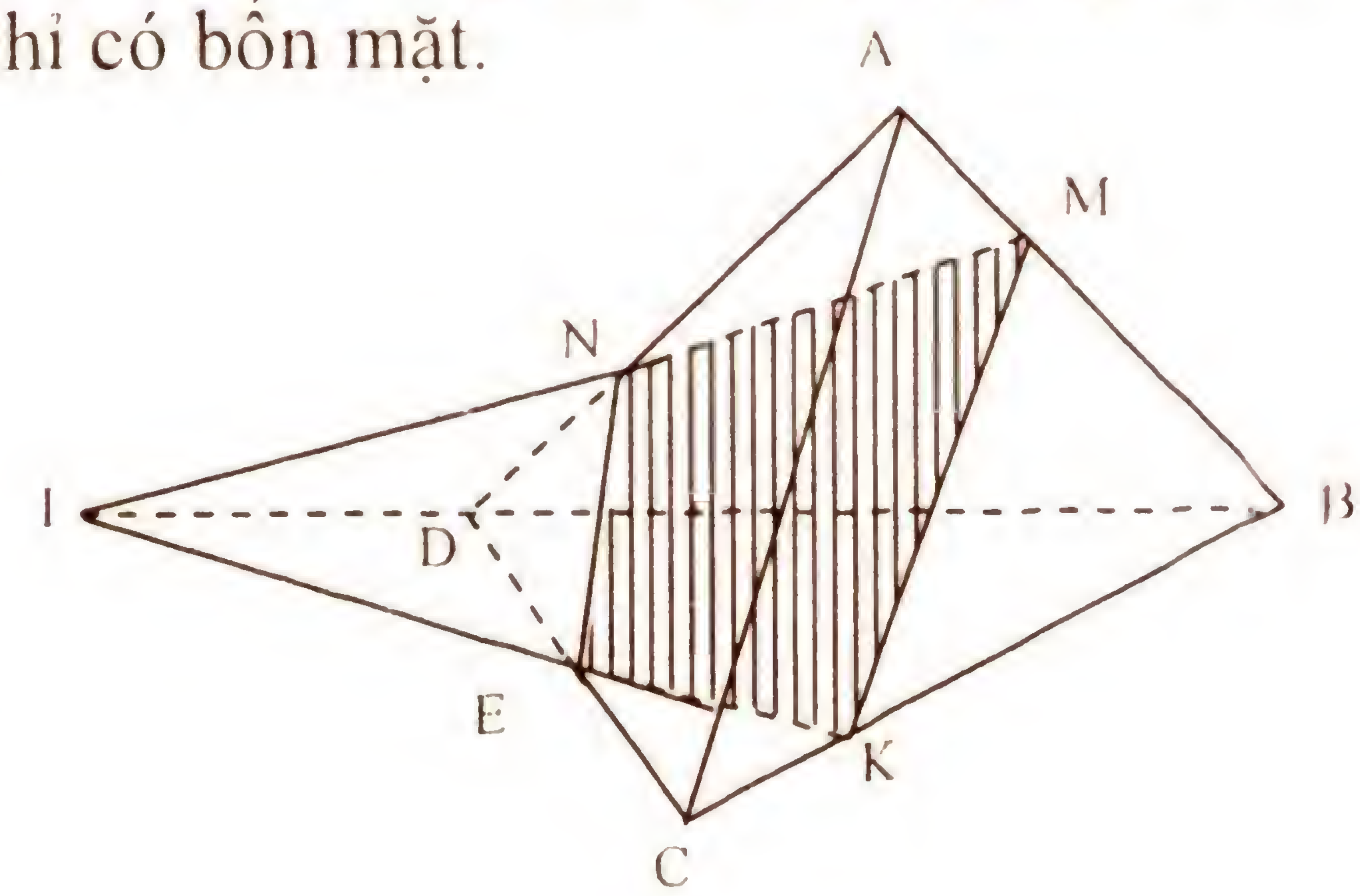
Trong mp(BCD), NK ∩ CD = L.
Trong mp(ACD), ML ∩ AD = I.
Nối IK thì thiết diện là tứ giác MNKI.

**Ví dụ 13:** Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không?

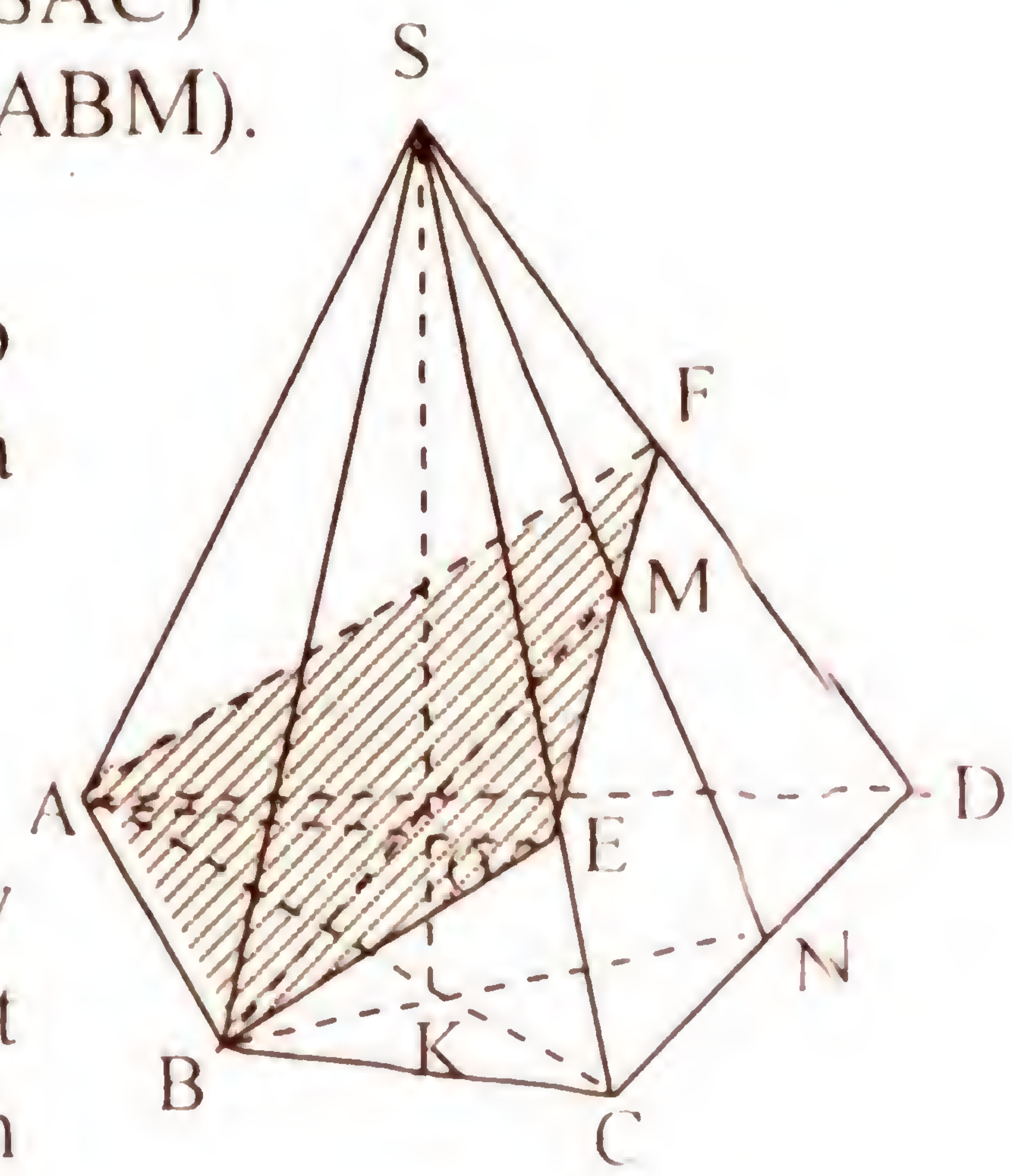
**Giải**

Thiết diện của một hình tứ diện là tam giác khi mặt phẳng cắt ba mặt của tứ diện. Thiết diện là tứ giác khi mặt phẳng cắt cả bốn mặt của hình tứ diện. Thiết diện của một hình tứ diện không thể là một ngũ giác vì ngũ giác có năm cạnh mà tứ diện chỉ có bốn mặt.




**Ví dụ 14**: Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SCD, ta lấy một điểm M.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và SAC)
b) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ABM).



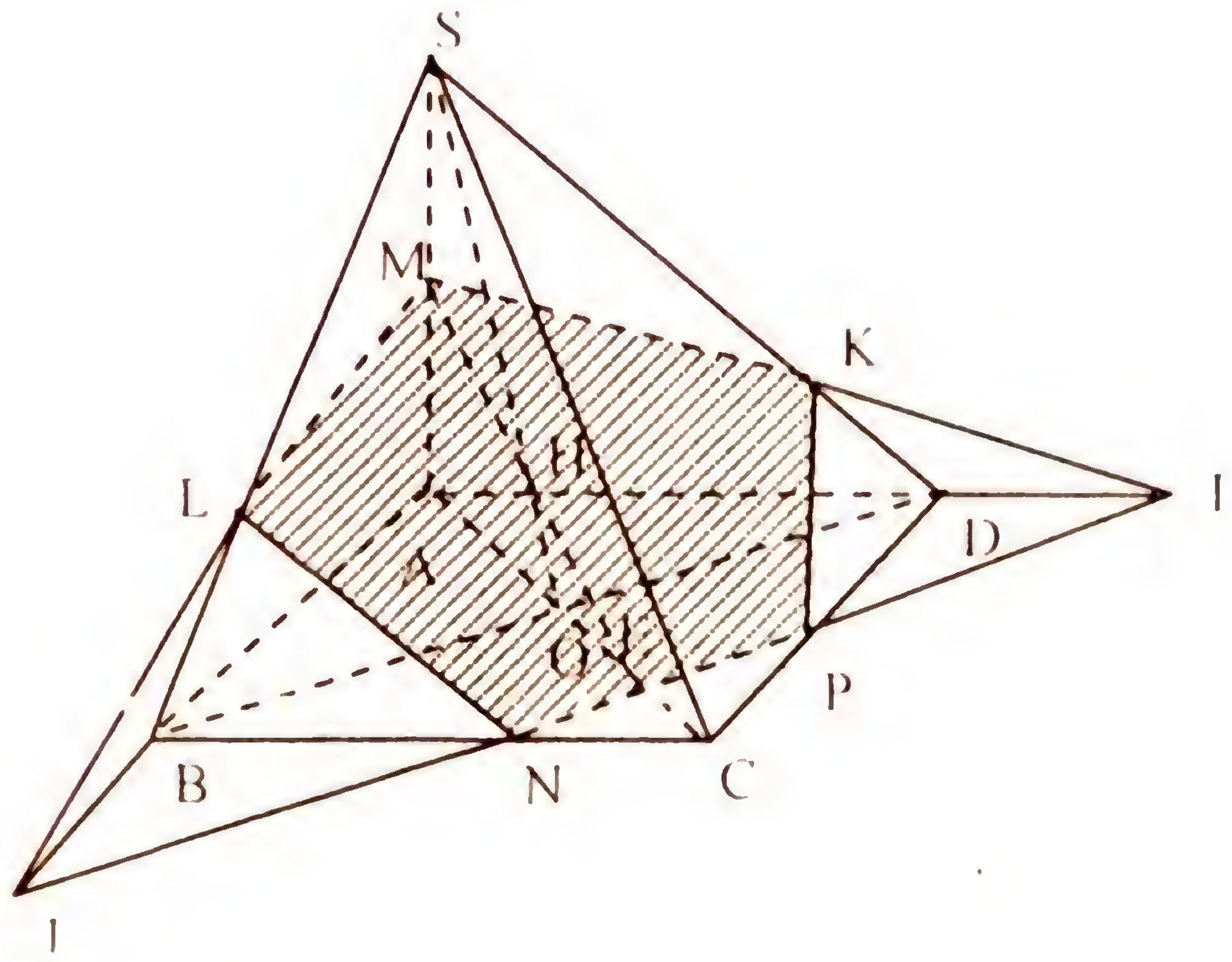

**Giải**

a) Gọi N là giao điểm của SM và CD, K là giao điểm của BN và AC. Giao tuyến cần tìm là đường thẳng SK.
b) Trong mặt phẳng (SBN), BM cắt SK tại O.
Ta suy ra O là giao điểm của BM với (SAC).
Trong mặt phẳng (SAC), AO cắt SC tại E, đây là giao điểm của (ABM) với cạnh SC, EM cắt SD tại F, đây là giao điểm của (ABM) với cạnh SD. Thiết diện cần tìm là tứ giác ABEF.
Cách 2: Trong mp(ABCD), kéo dài đường thẳng AB cắt BC tại I.

**Ví dụ 15**: Cho một hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

a) Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNP).

b) Gọi O là tâm của đáy. Tìm giao điểm của SO và (MNP).




**Giải**

a) Đường thẳng NP cắt AD tại I và cắt AB tại J, MI cắt SD tại K; MJ cắt SB tại L. Nối NL, PK thì thiết diện là ngũ giác MLNPK.

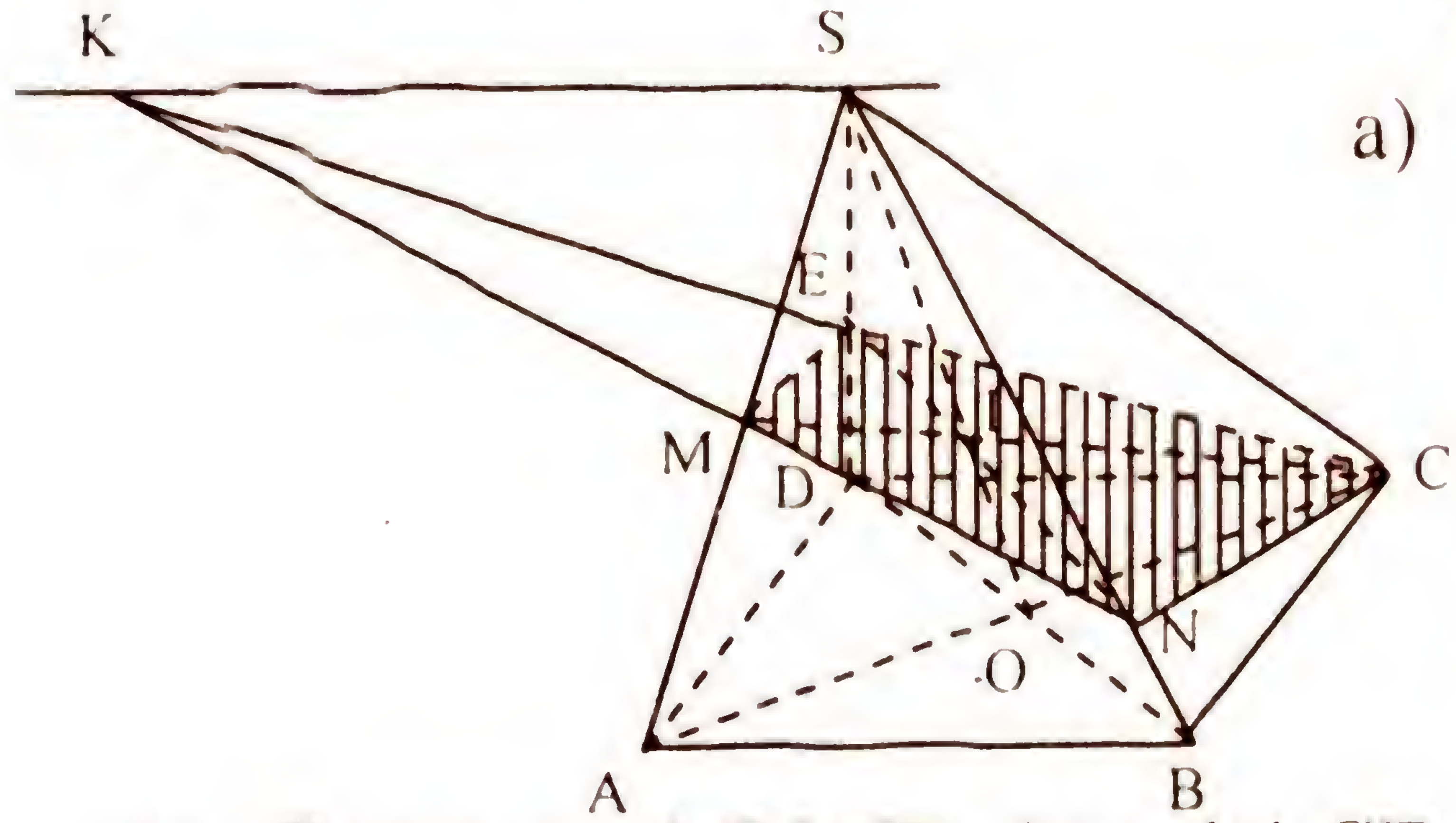
b) Trong mp(ABCD), AC cắt NP tại E.

Trong mp(SAC), SO cắt ME tại H thì H là giao điểm của SO với mp(MNP).

**Ví dụ 16**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là điểm nằm giữa S và A; N là điểm nằm giữa S và B.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mp(CMN).

b) Tìm giao tuyến của 2 mp(SAB) và (SCD).




**Giải**

a) Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD.

Trong mp(SAC), SO ∩ CM = I.

Trong mp(SBD), NI ∩ SD = E.

Nối NM, NC, EC, EM thì thiết diện là tứ giác MNCE.

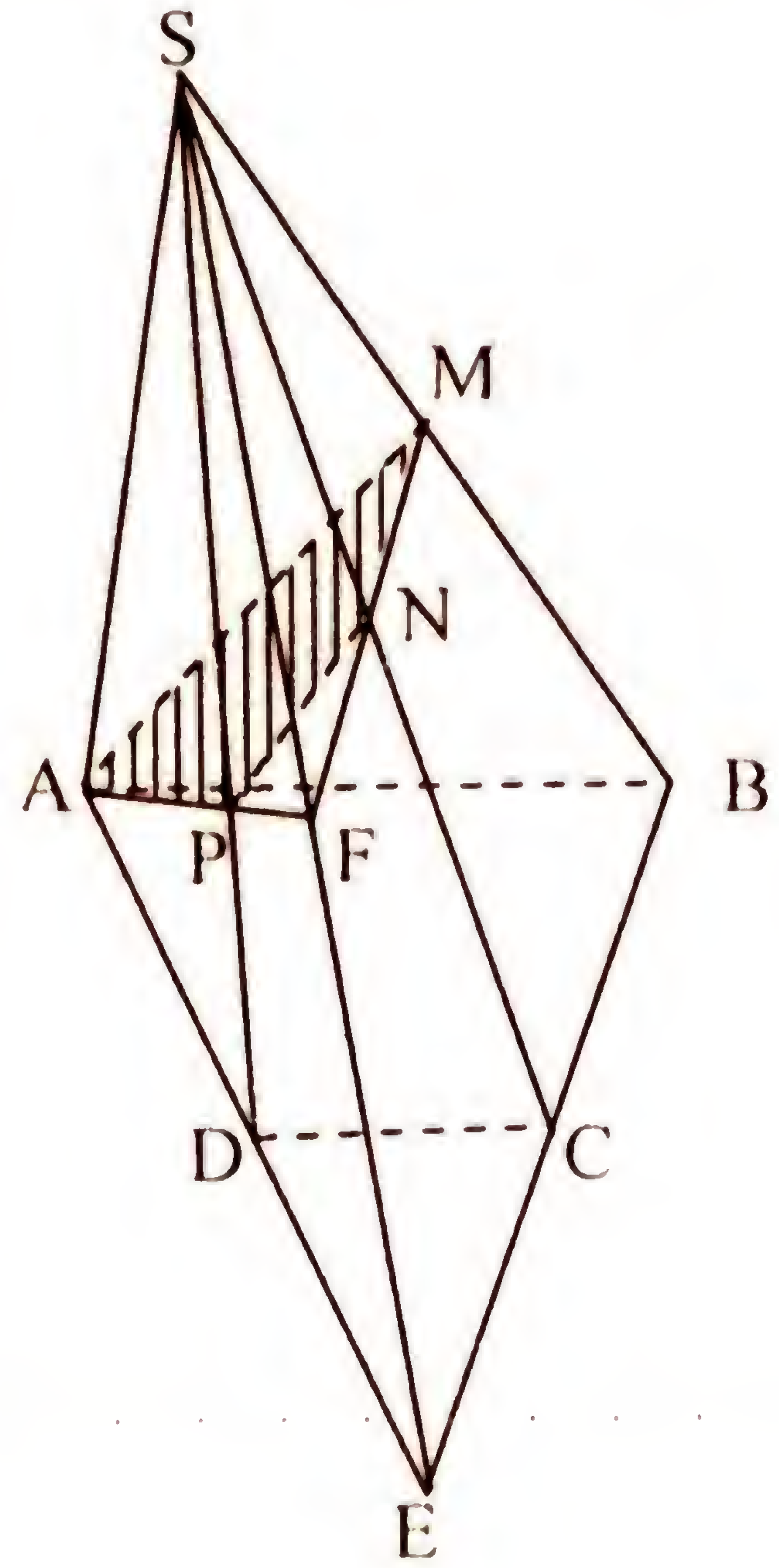
b) Trong mp(MNCE), kéo dài CE và NM cắt nhau tại K, ta có S và K là 2 điểm chung của 2 mp(SAB), (SCD).

Vậy (SAB) ∩ (SCD) = SK.

**Ví dụ 17**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (AMN)




**Giải**

a) Trong (ABCD), gọi E là giao điểm của hai cạnh bên AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng SE.

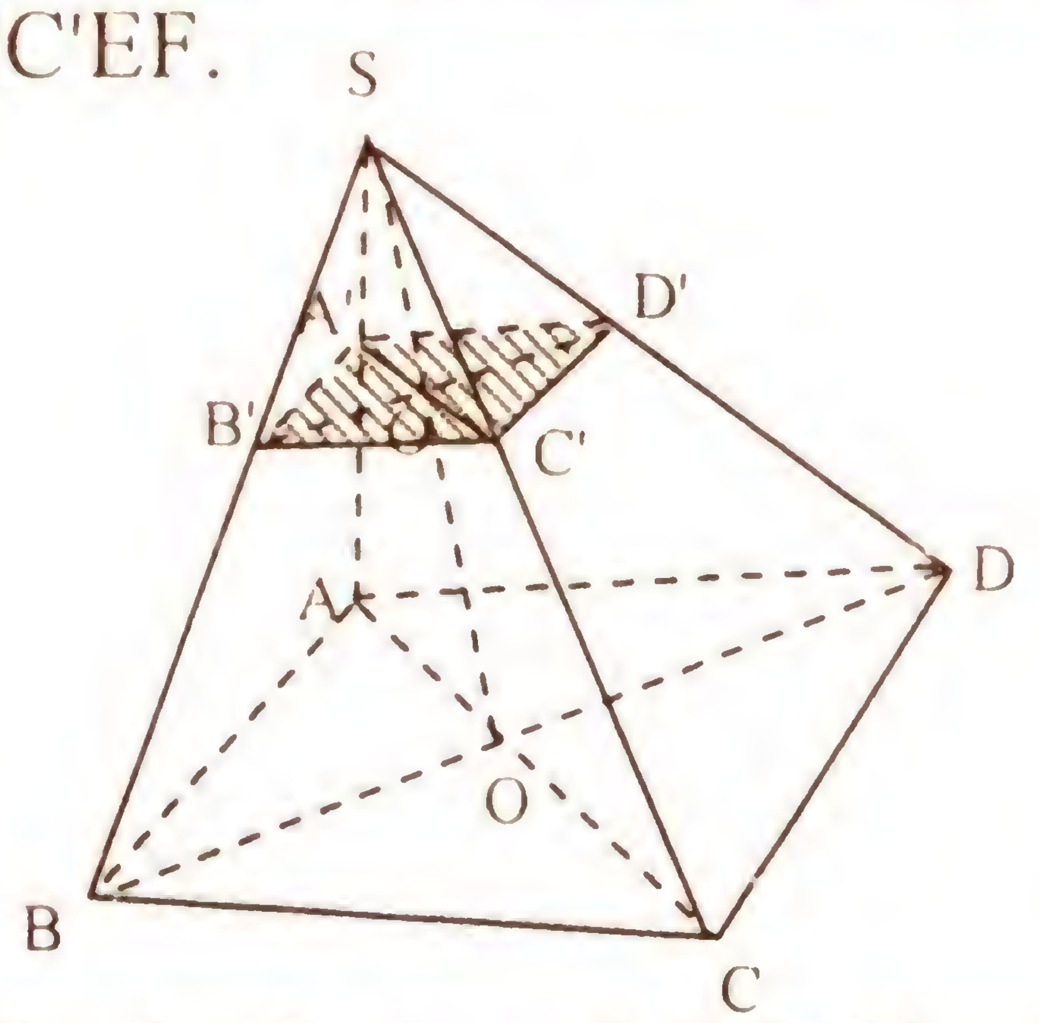
b) Mặt phẳng phụ (SAD) chứa SD cắt mặt phẳng (AMN) theo giao tuyến là đường thẳng AF với F là giao điểm của hai đường thẳng MN và SE. Gọi P là giao điểm của SD và AF thì P là giao điểm của SD và (AMN).
Thiết diện cần tìm là tứ giác AMNP

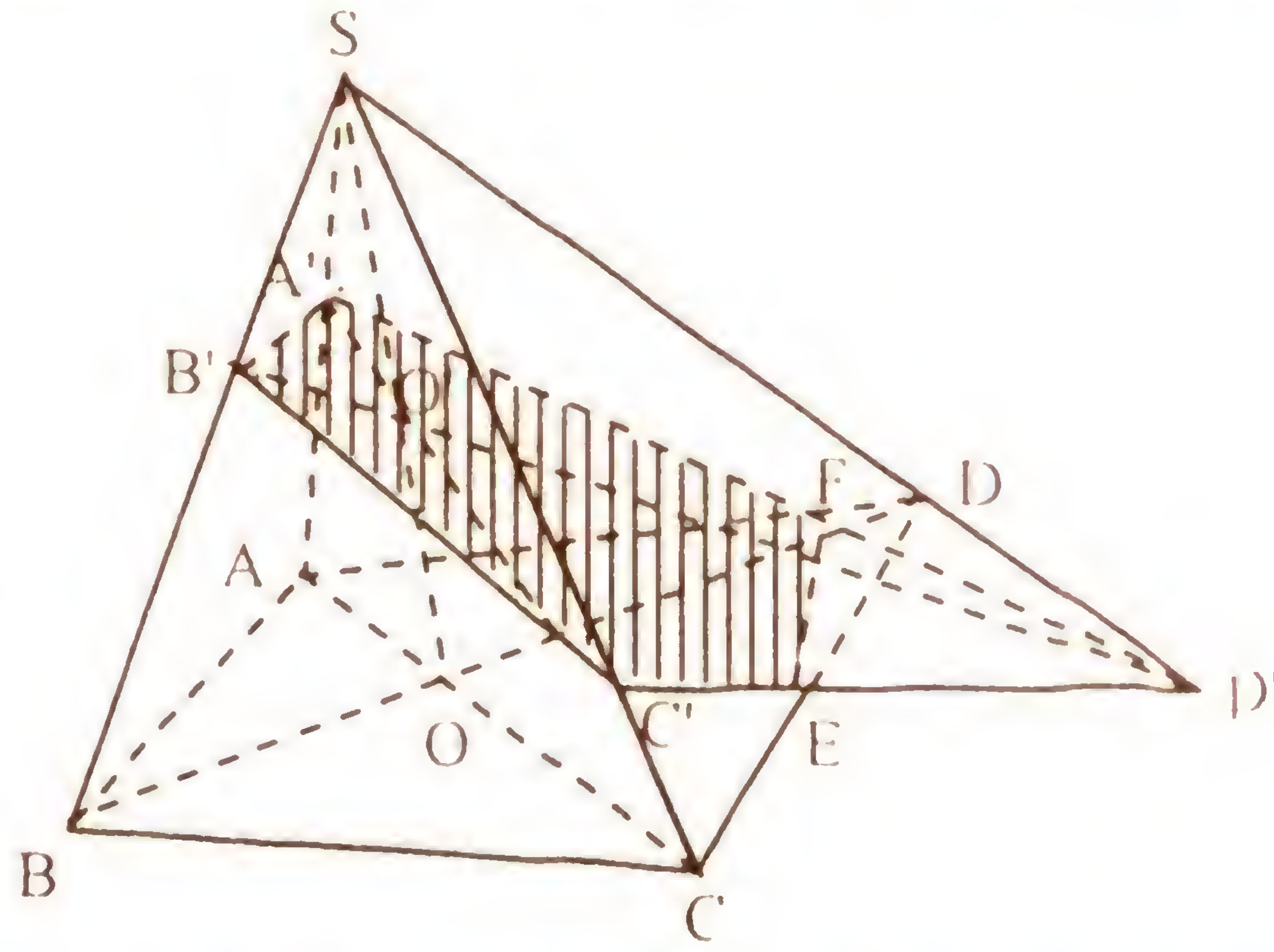
**Ví dụ 18**: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(A'B'C').

**Giải**

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi O' là giao điểm của A'C' và SO; D' là giao điểm của hai đường thẳng B'O' và SD.

- Nếu D' thuộc đoạn SD thì thiết diện là tứ giác A'B'C'D'.
- Nếu D' nằm trên phần kéo dài của cạnh SD, gọi E là giao điểm của CD và C'D', F là giao điểm của AD và A'D'. Nối EC', EF thì thiết diện là ngũ giác A'B'C'EF.



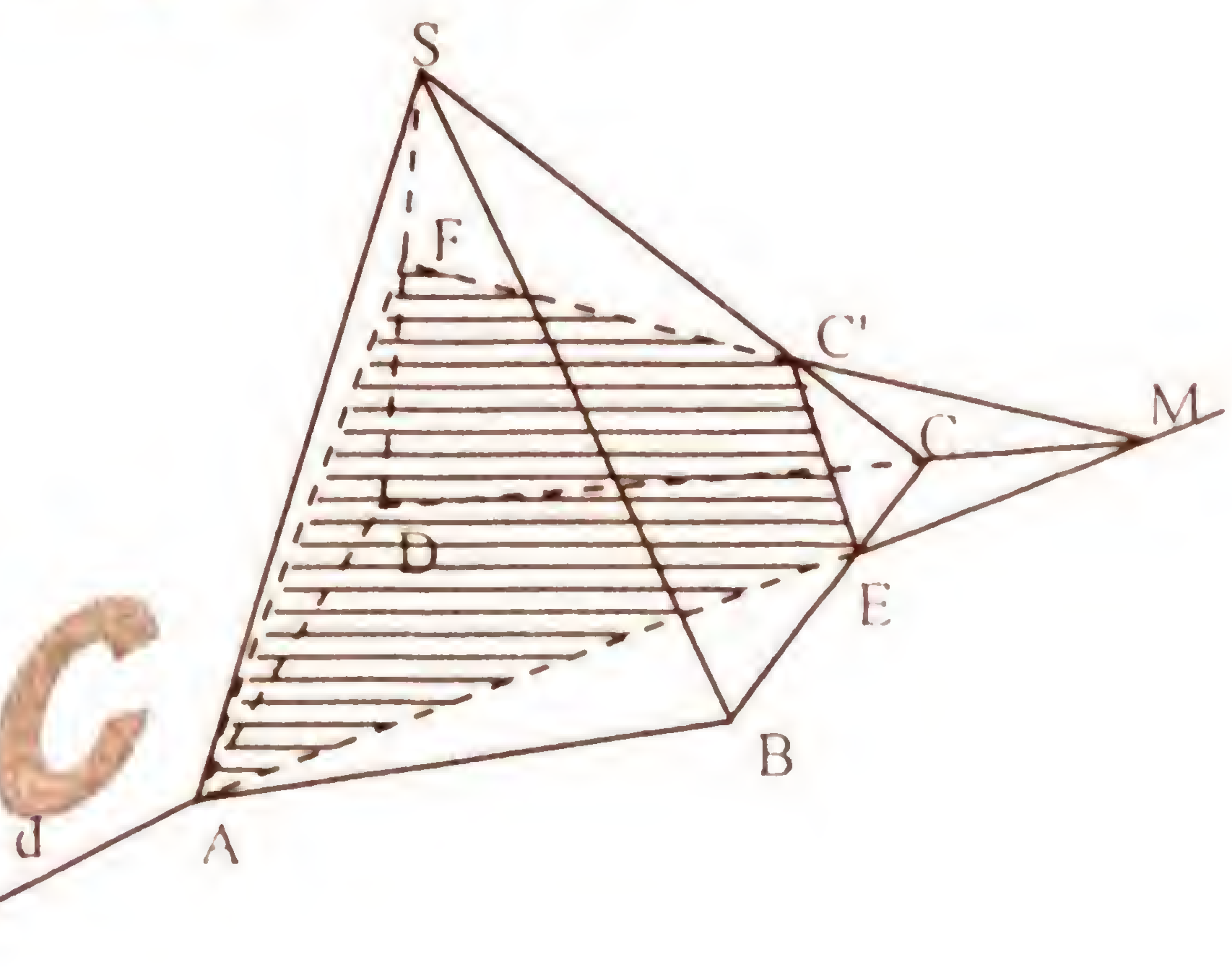

**Ví dụ 19:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Trong mặt phẳng (ABCD) vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (d; C).

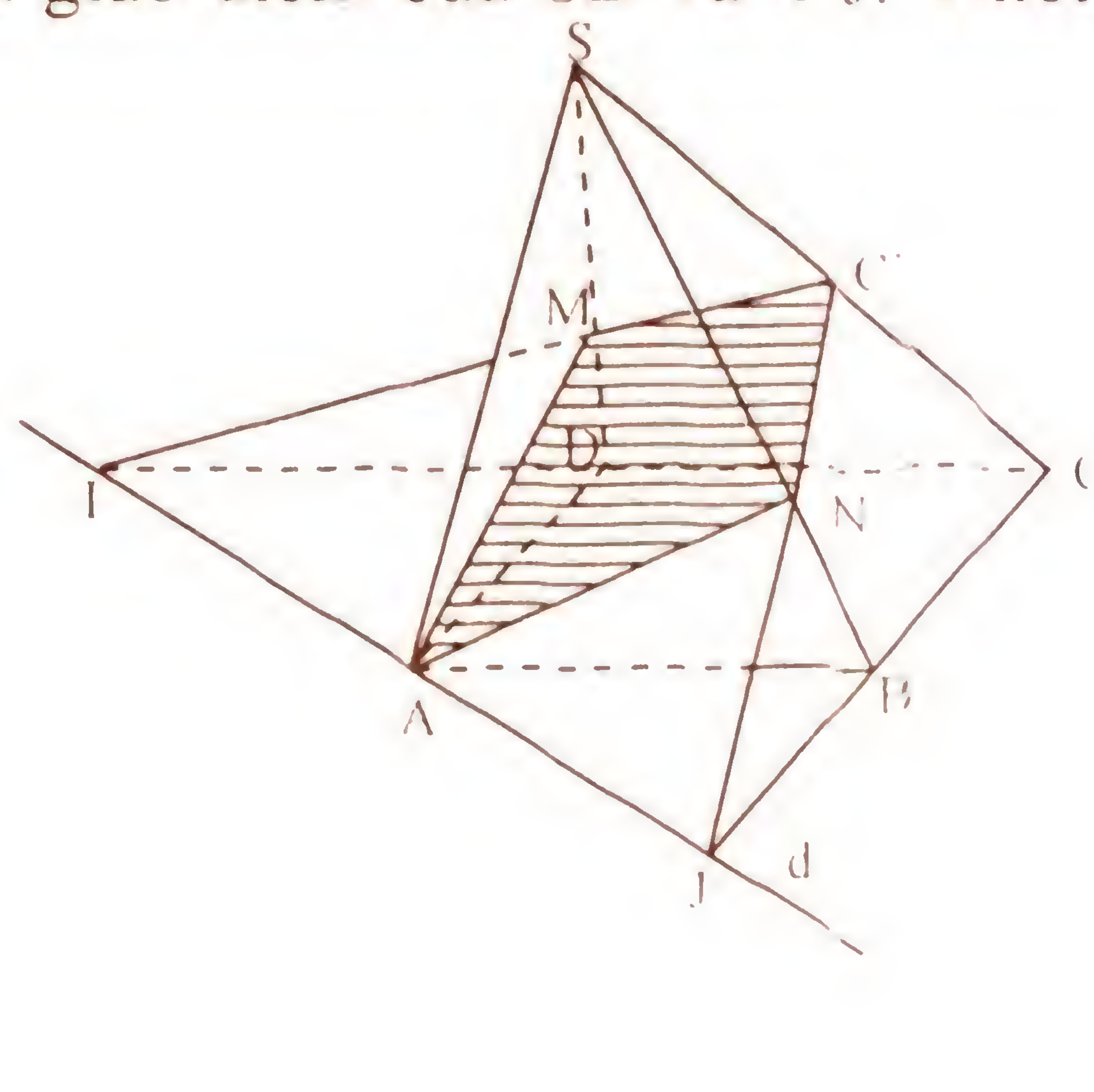
**Giải**

- Nếu đường thẳng d cắt cạnh BC tại E và cắt DC kéo dài tại M. Nối MC' cắt SD tại F. Thiết diện cần tìm là tứ giác AEC'F.

Tương tự, nếu d cắt cạnh DC và cắt cạnh BC kéo dài, thiết diện là tứ giác.

- Nếu đường thẳng d đi qua điểm C thì được thiết diện là tam giác SAC.
- Nếu đường thẳng d cắt hai cạnh CD và CB kéo dài lần lượt tại I và J. Gọi M là giao điểm của SD và C'I, N là giao điểm của SB và C'J. Thiết diện là tứ giác AMC'N.



## DẠNG 3: ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

• Chứng minh ba điểm thẳng hàng:

Để chứng minh ba điểm nào đó thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm ấy cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt, lúc đó ba điểm này sẽ thẳng hàng trên giao tuyến.

Tổng quát, với nhiều điểm hơn cũng sử dụng phương pháp này.

• Chứng minh các đoạn đồng quy, các đường thẳng đồng quy:

Để chứng minh, ta sử dụng các định hướng:

- Đồng quy liên tiếp: hai đường thẳng đầu tiên cắt nhau, tiếp tục chứng minh đường thẳng thứ 3 đi qua giao điểm này, ...

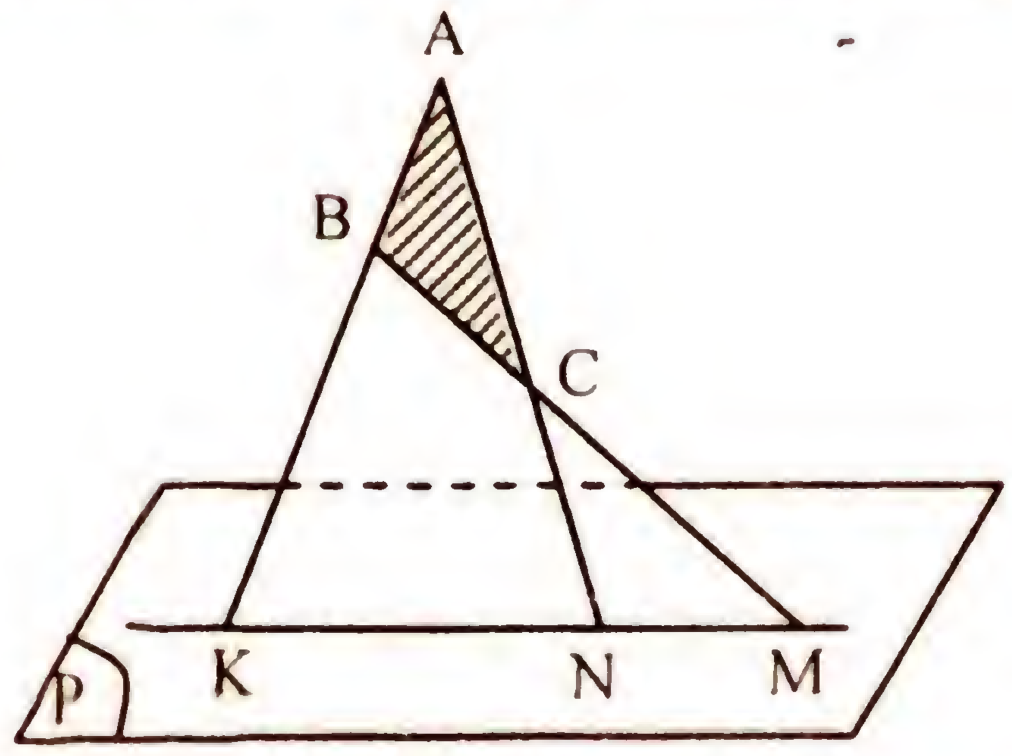
- Chuyển thẳng hàng: Nếu hai đường thẳng cắt nhau tại O và đường thẳng thứ 3 đi qua A, B. Ta chứng minh ba điểm O, A, B thẳng hàng tức là O thuộc đường thẳng thứ 3, ...

- Đồng quy có tỉ lệ: Sử dụng các tính chất hình phẳng như hai đường chéo hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, các trung tuyến trong tam giác cắt nhau theo tỉ lệ 1: 2, ...

- Đồng quy và đồng phẳng: Ba đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.

Chú ý: Nếu cần thì sử dụng phương pháp phản chứng.

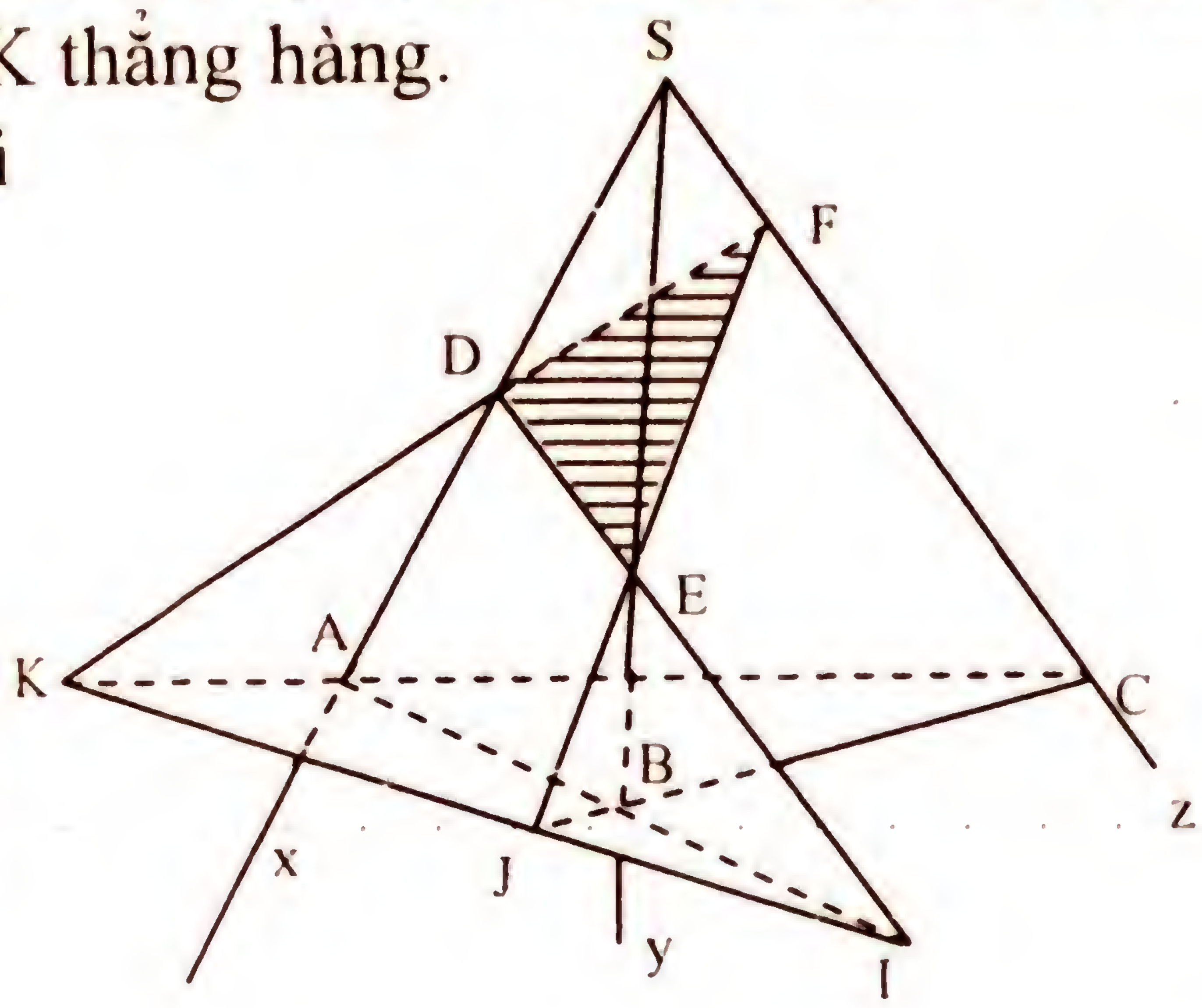
**Ví dụ 1**: Cho ba điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (P) và các đường thẳng BC, CA, AB cắt (P) lần lượt tại M, N, K. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.




**Giải**

Ta có M, N, K lần lượt thuộc về hai mặt phẳng (P) và (ABC) nên M, N, K thuộc giao tuyến của (P) và (ABC). Vậy M, N, K thẳng hàng.

**Ví dụ 2**: Trên 3 tia Sx, Sy, Sz không đồng phẳng lần lượt lấy các điểm A và D, B và E, C và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.




**Giải**

Ta có $I = DE \cap AB$

$DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$.

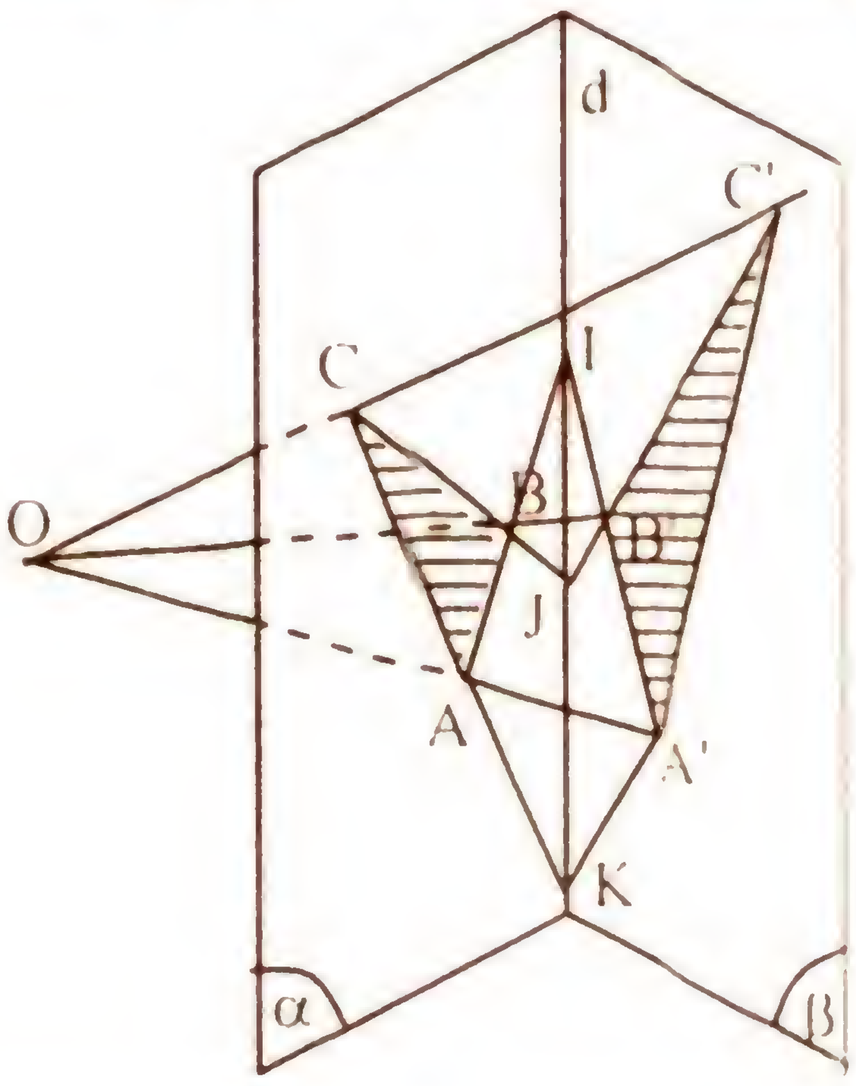
Lí luận tương tự thì J, K cũng lần lượt thuộc về hai mặt phẳng trên nên I, J, K thuộc về giao tuyến của (ABC) và (DEF) phân biệt. Vậy 3 điểm I, J, K thẳng hàng.

**Ví dụ 3**: Cho hai mặt phẳng ($\alpha$) và ($\beta$) cắt nhau theo giao tuyến d. Trong ($\alpha$) lấy hai điểm A và B sao cho AB cắt d tại I. Điểm O là một điểm nằm ngoài ($\alpha$) và ($\beta$) sao cho OA và OB lần lượt cắt ($\beta$) tại A' và B'.

a) Chứng minh ba điểm I, A', B' thẳng hàng và O, A, B không thẳng hàng.

b) Trong ($\alpha$) lấy các điểm C sao cho A, B, C không thẳng hàng. Giả sử OC cắt ($\beta$) tại C', BC cắt B'C' tại J, CA cắt C'A' tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

**Giải**




a) I, A', B' là ba điểm chung của hai mặt phẳng (OAB) và ($\beta$) nên chúng thẳng hàng.

Giả sử O, A, B thẳng hàng thì O thuộc đường thẳng AB.

Mà A, B $\in$ ($\alpha$) $\Rightarrow$ O $\in$ ($\alpha$): vô lí.

Vậy O, A, B không thẳng hàng.

b) I, J, K là ba điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi E và N là trung điểm của SB, SC và M thuộc SA sao cho MA = 2MS.

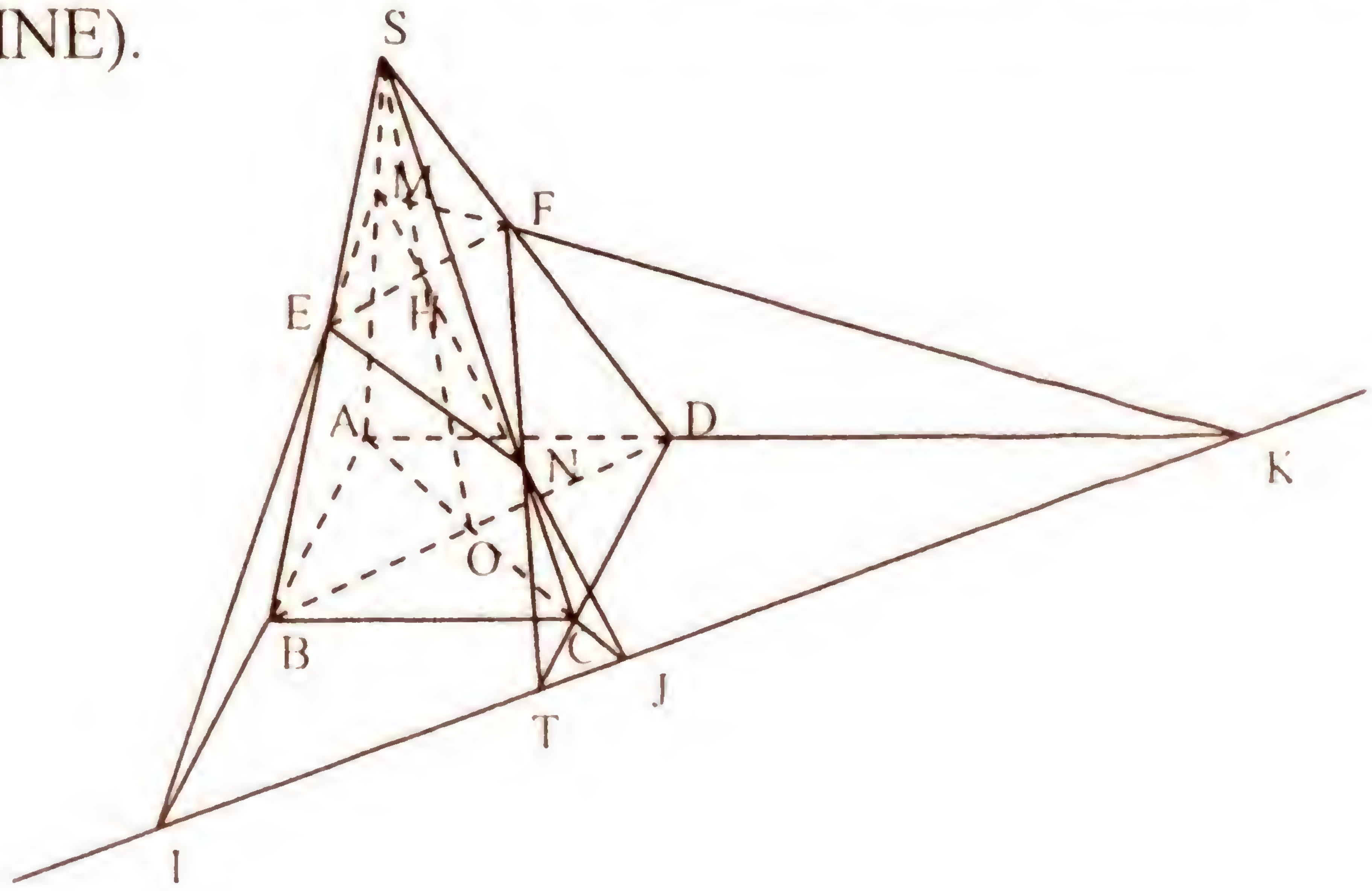
a) Tìm giao điểm F của SD với mp(MNE).

b) Chứng minh 4 giao điểm I, J, K, T của 4 đường thẳng ME, MN, MF, NF với đáy thẳng hàng.

**Giải**

a) Trong mp(ABCD), AC $\cap$ BD = O

Trong mp(SAC), MN $\cap$ SO = H, trong mặt phẳng (SBD), EH $\cap$ SD = F thì F = SD $\cap$ (MNE).




b) Theo giả thiết thì:

- (SAB): ME $\cap$ AB = I ; (SAC): MN $\cap$ AC = J
- (SAD): MF $\cap$ AD = K; (SCD): NF $\cap$ CD = T.

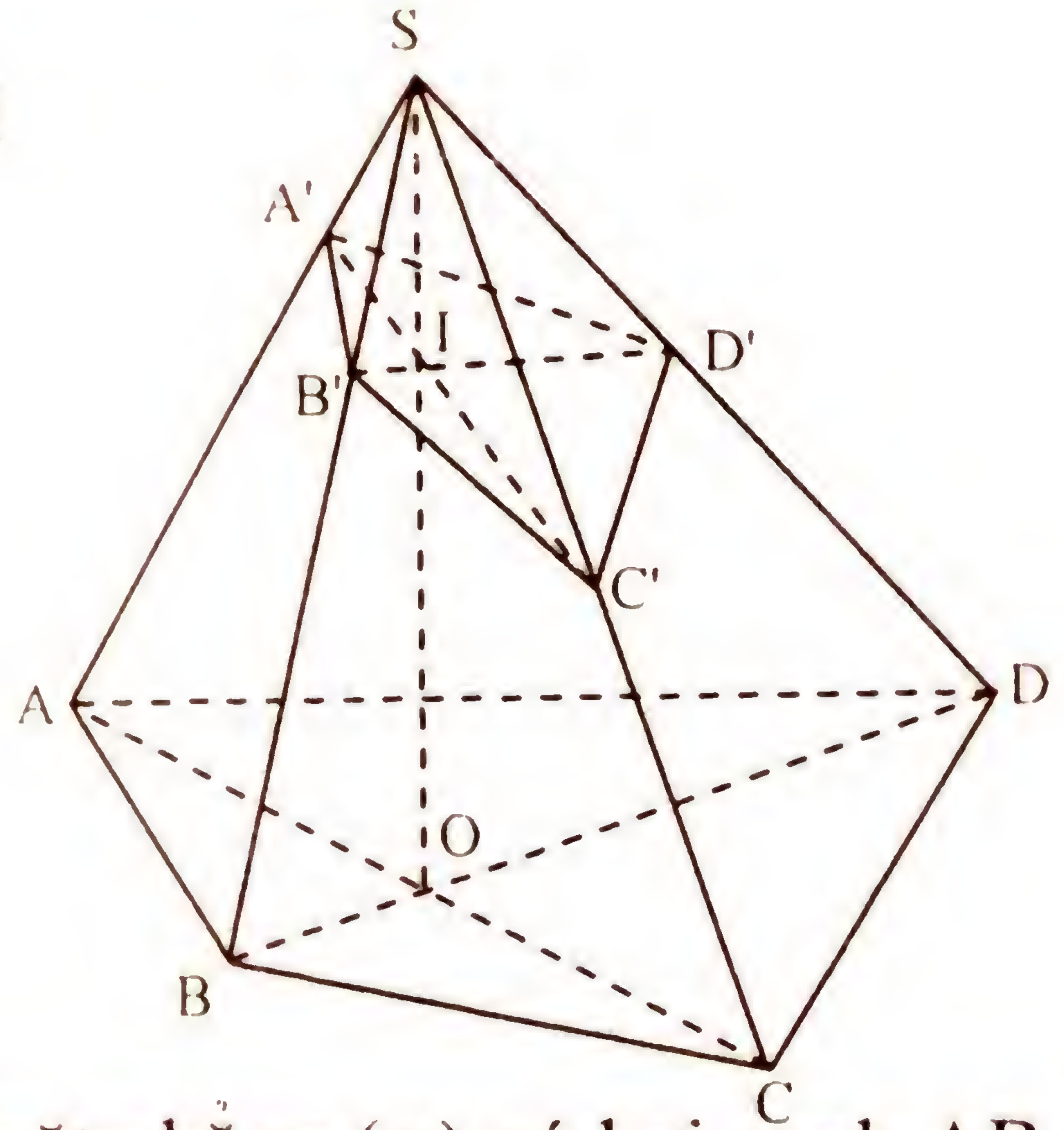
Ta có bốn điểm I, J, K, T cùng thuộc 2 mặt phẳng (ABCD) và (MENF) nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.

**Ví dụ 5**: Cho n điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng.

**Giải**

Nếu có ba điểm A, B, C trong n điểm đã cho thẳng hàng thì với một điểm D trong số điểm còn lại, phải có A, B, C, D đồng phẳng. Trái giả thiết. Vậy không có 3 điểm nào thẳng hàng.

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi O là giao 2 đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng các đường thẳng A'C', B'D' và SO đồng quy.




**Giải**

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng A'C' và B'D'. Khi đó I thuộc A'C' nên I thuộc mp(SAC); I thuộc B'D' nên I thuộc mp(SBD).

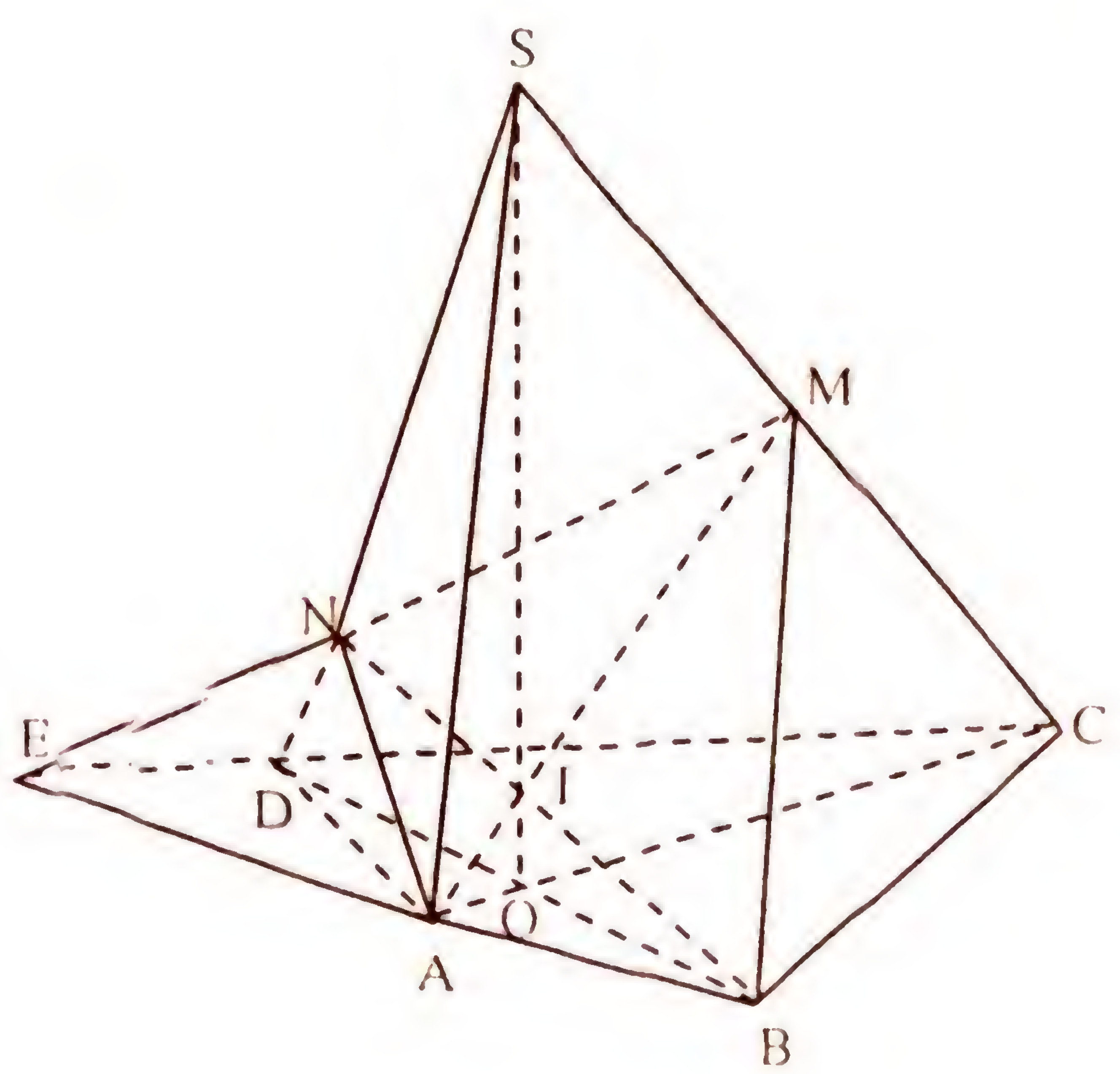
Do đó I thuộc giao tuyến SO của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Vậy ba đường thẳng SO, A'C', B'D' đồng quy tại I.

**Ví dụ 7**: Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm của đoạn thẳng SC.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM và BN đồng quy.

**Giải**



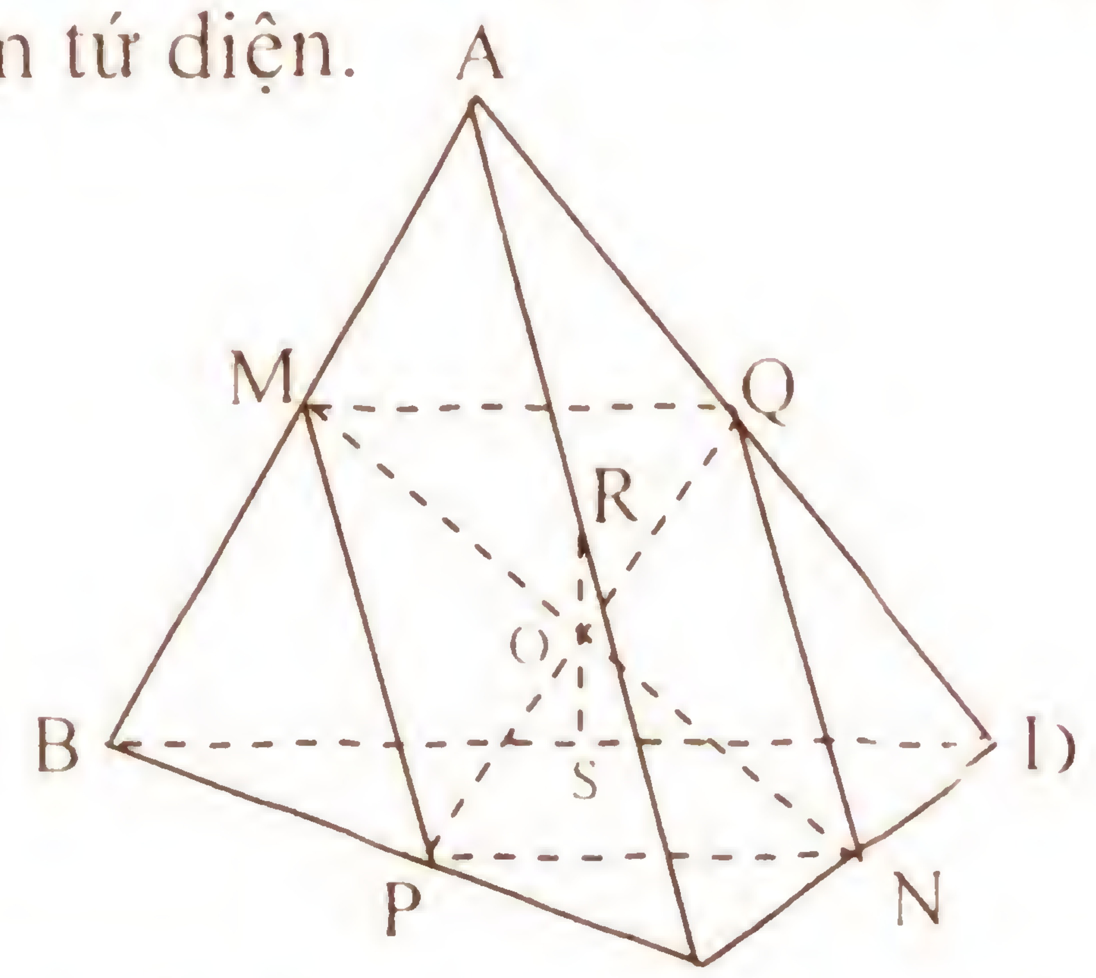

a) Gọi E là giao điểm của AB và CD. Hai mặt phẳng (MAB) và (SCD) có hai điểm chung là M và E. Do đó hai mặt phẳng này có ME là giao tuyến. Trong mặt phẳng (MCD), gọi N là giao điểm của SD và EM, ta có N là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

b) Gọi I là giao điểm của AM và BN. Như vậy điểm I vừa thuộc mặt phẳng (SAC) vừa thuộc mặt phẳng (SBD). Mặt khác SO là giao tuyến của (SAC) và (SBD). Do đó ba đường thẳng SO, AM và BN đồng quy tại I.

**Ví dụ 8:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh MPNQ là hình bình hành.

b) Chứng minh ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Điểm đồng quy gọi là trọng tâm tứ diện.




**Giải**

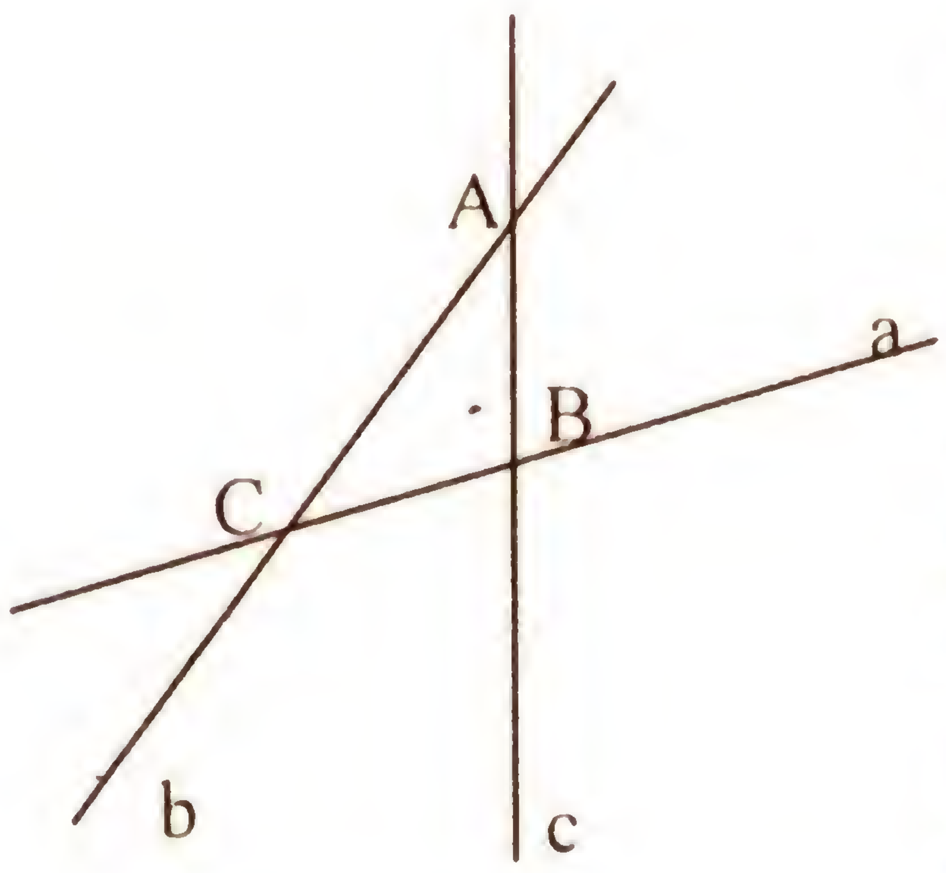
a) Ta có các đường trung bình MQ và PN đều song song với BD và bằng $\frac{BD}{2}$ nên MPNQ là hình bình hành.

b) Vì MPNQ là hình bình hành nên hai chéo MN và PQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn.

Tương tự, MRNS là hình bình hành nên MN và RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn, tức là tại O. Vậy MN, PQ và RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

**Ví dụ 9:** Chứng minh trong không gian, nếu có ba đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.

**Giải**




Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau. Gọi A là giao điểm của b và c. Ta chứng minh đường thẳng a qua giao điểm A

Giả sử a không qua điểm A thì a cắt b, c tại B, C khác điểm A.

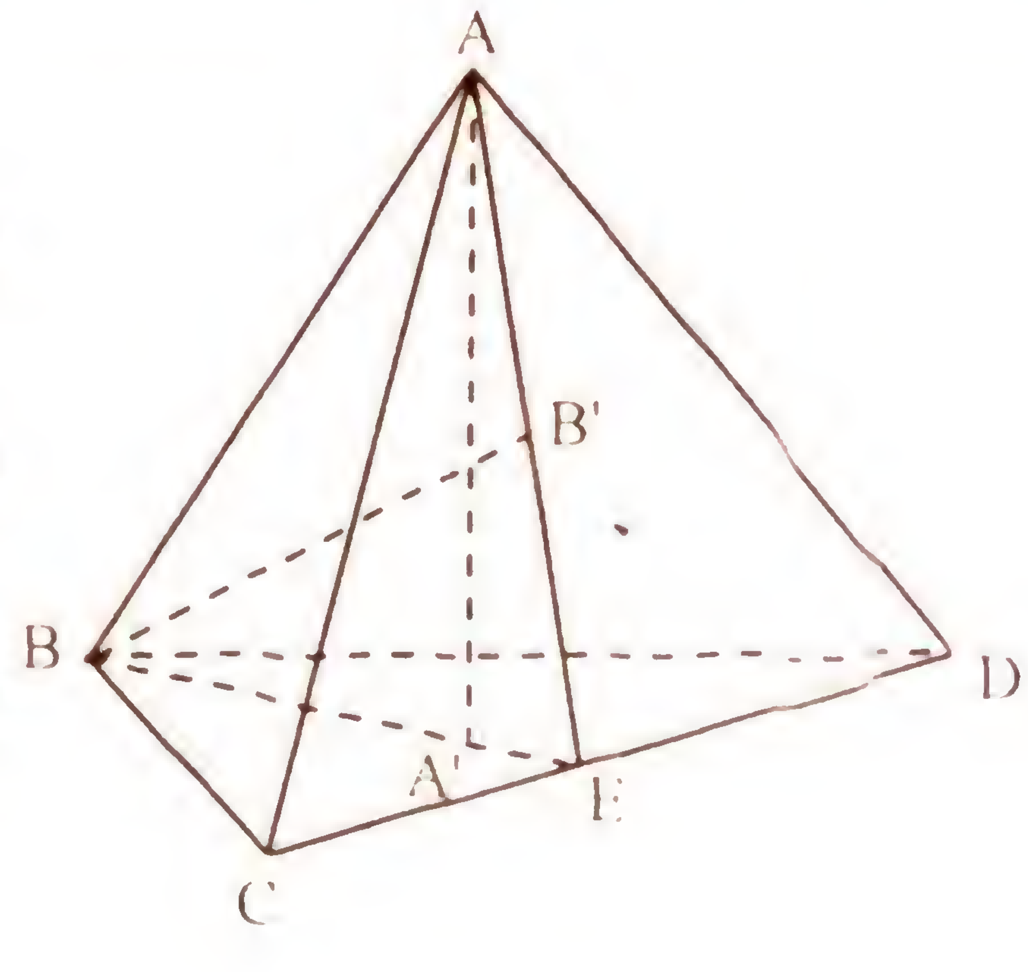
Do đó, ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trên mặt phẳng (ABC): vô lý.

Vậy chúng đồng quy.

Mở rộng: Nếu có n đường thẳng đôi một cắt nhau và không cùng nằm trên một mặt phẳng thì n đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

**Ví dụ 10**: Cho tứ diện ABCD có các cạnh thoả mãn AB.CD = AC.BD = AD.BC. Chứng minh các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp các mặt đối diện đồng quy tại 1 điểm.

**Giải**




Gọi A', B', C', D' là tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện các đỉnh A, B, C, D.

Vì AA', BB', CC', DD' không đồng phẳng nên ta chứng minh chúng đôi một cắt nhau.

Gọi E = BA' $\cap$ CD. Vì BE là phân giác trong của tam giác BCD nên $\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{BD}$.

Ta có AC.BD = AD.BC nên $\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$ suy ra $\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD}$, do đó AE là phân giác trong của tam giác ACD nên B' thuộc AE. Vậy AA' cắt BB' trong mp(ABE).

Chứng minh tương tự thì chúng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng nên 4 đường thẳng đó đồng quy.

## DẠNG 4: TOÁN TỔNG HỢP

• Yếu tố cố định:

- Đường thẳng cố định khi nó đi qua 2 điểm cố định phân biệt, hoặc nó là giao tuyến của 2 mặt phẳng cố định cắt nhau.
- Mặt phẳng cố định khi nó đi qua 3 điểm cố định không thẳng hàng, hoặc nó đi qua 1 đường thẳng cố định và một điểm cố định ở ngoài nó, hoặc nó đi qua 2 đường thẳng cố định cắt nhau.

Chú ý: Giả thiết yếu tố cố định, yếu tố di động.

• Quỹ tích (tập hợp) các giao điểm của 2 đường thẳng lưu động:

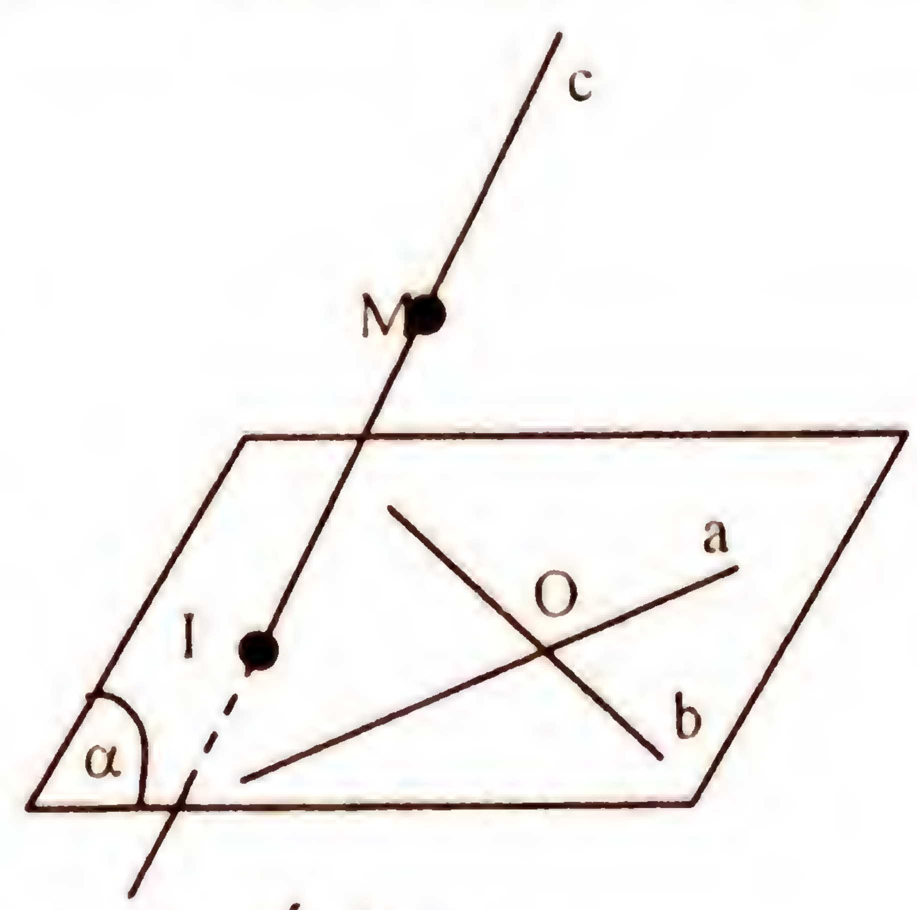
- Tìm 2 mặt phẳng phân biệt, cố định lần lượt chứa 2 đường thẳng, giao điểm thuộc giao tuyến cố định của 2 mặt phẳng đó.
- Giới hạn và phần đảo.

**Ví dụ 1**: Trên mặt phẳng $(\alpha)$ cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O. Gọi c là một đường thẳng cắt $(\alpha)$ tại điểm I khác với O.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (O; c) và $(\alpha)$.

b) Gọi M là một điểm lấy trên c nhưng không trùng với I. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (M; a) và (M; b). Chứng minh khi M di động trên c thì giao tuyến của hai mặt phẳng trên luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

**Giải**




a) Hai mặt phẳng (O; c) và $(\alpha)$ có hai điểm chung là O và I nên giao tuyến của chúng là đường thẳng OI.

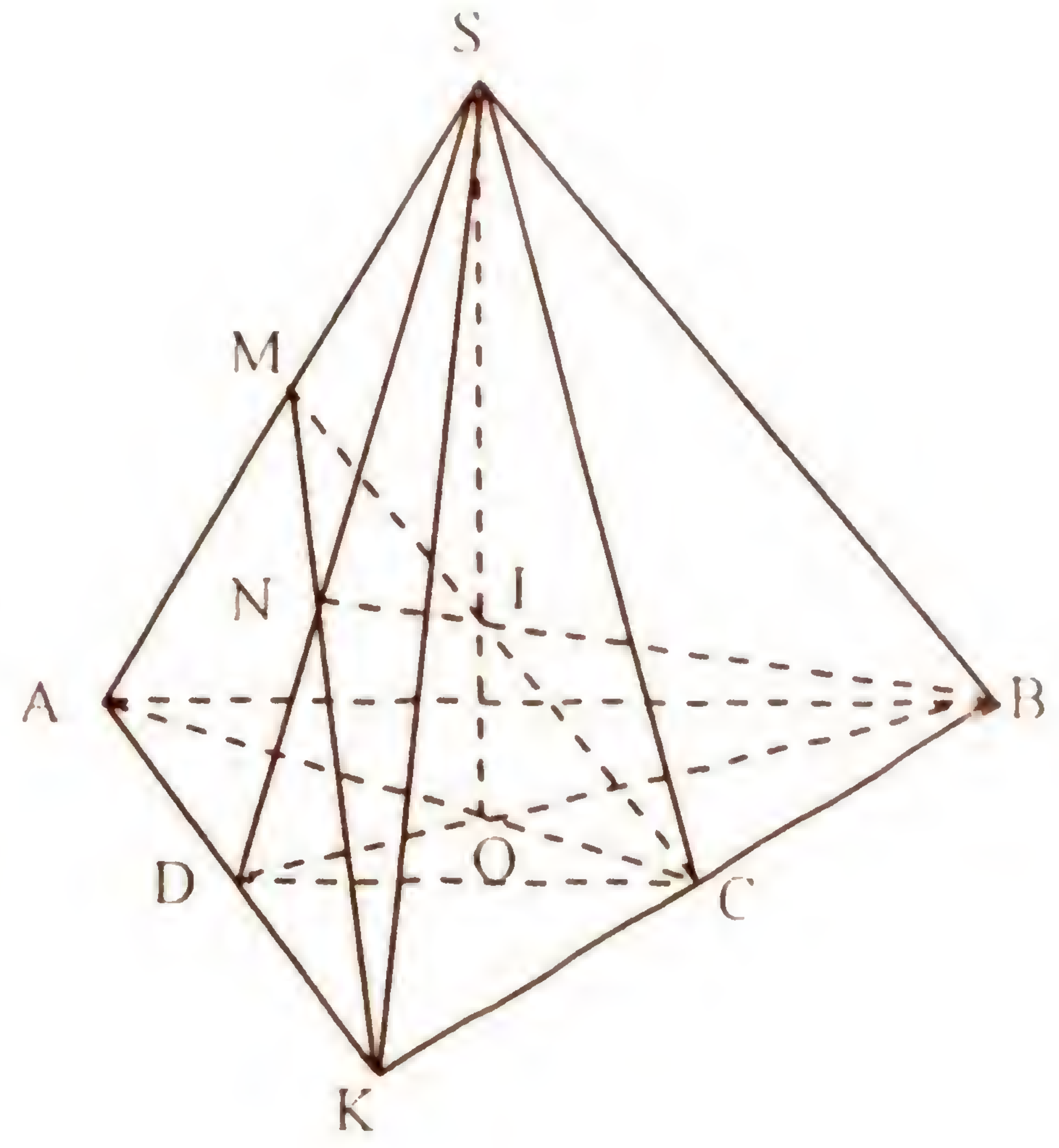
b) Hai mặt phẳng (M; a) và (M; b) có hai điểm chung là M và O nên giao tuyến của chúng là đường thẳng MO. Khi M di động trên c, giao tuyến MO này luôn luôn nằm trong mặt phẳng (O; c) cố định.

**Ví dụ 2**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình thang, AB là đáy lớn. Điểm M lưu động trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm N của SD với mp(MBC).

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

**Giải**




a) Trong mp(ABCD), AC cắt BD tại O.
Trong mp(SAC), SO cắt MC tại I.
Trong mp(SBD), BI cắt SD tại N thì $N = SD \cap (MBC)$.

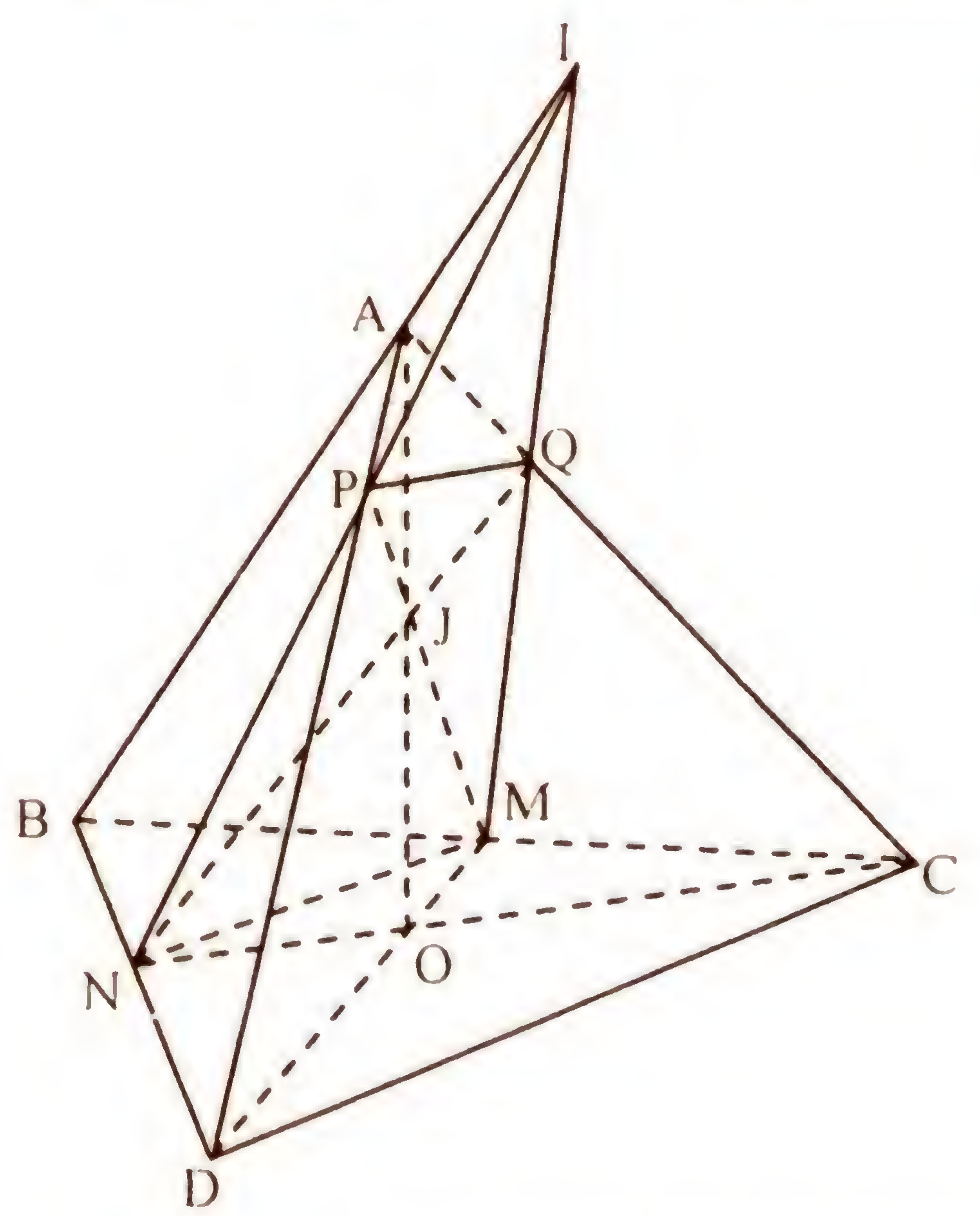
b) Trong mp(ABCD), $AD \cap BC = K$ cố định.
Ta có M, N, K thuộc 2 mặt phẳng phân biệt (SAD), (MBC) nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.
Vậy MN đi qua K cố định.

__Ví dụ 3__: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD; P là một điểm thay đổi trên đoạn thẳng AD.

a) Xác định giao điểm Q của mp(MNP) và cạnh AC. Chứng minh thiết diện MNPQ là hình thang khi P khác A và D.

b) Tìm quỹ tích giao điểm I của QM và PN.

c) Tìm quỹ tích giao điểm J của QN và PM.




**Giải**

a) Vẽ đường thẳng qua P song song với CD cắt AC tại Q thì Q là giao điểm của AC và mp(MNP). Ta có PQ // MN nên thiết diện MNPQ là hình thang.

b) Giả sử I là giao điểm của QM và PN.
Ta có: $QM \subset mp(ABC)$ cố định.
$PN \subset mp(ABD)$ cố định nên giao điểm I thuộc giao tuyến AB cố định.
Vì P thay đổi trên đoạn thẳng AD nên I chỉ nằm trên phần của đường thẳng AB trừ đi các điểm trong của đoạn AB.

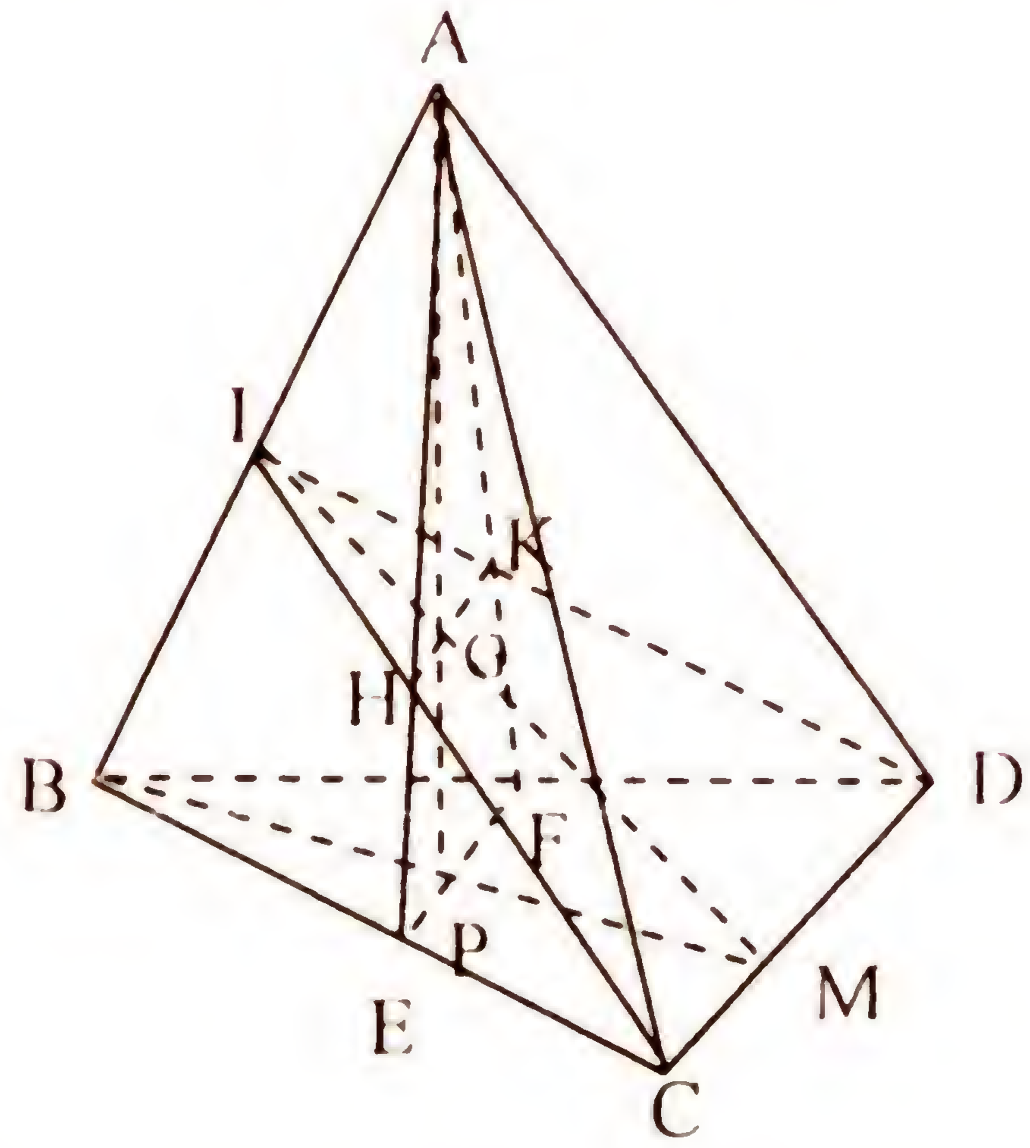
Đảo lại, lấy một điểm I bất kì thuộc đường thẳng AB nhưng không nằm giữa A và B. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của IN với AD, của IM với AC. Khi đó mp(MNP) cắt AC tại Q và giao điểm của QM và PN là I. Vậy quỹ tích giao điểm I của QM và PN là phần đường thẳng AB trừ đi các điểm trong của đoạn AB.

c) Ta có $QN \subset mp(NAC)$ cố định
$PM \subset mp(MAD)$ cố định nên giao điểm J thuộc giao tuyến AO cố định với $O = CN \cap DM$. Từ đó thì quỹ tích giao điểm I của QN và PM là đoạn thẳng AO.

**Ví dụ 4**: Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. M là một điểm di động trên cạnh CD. P là trung điểm của đoạn BM.

a) Chứng minh rằng IM và AP mỗi đường nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên cạnh CD.

b) Tìm tập hợp các giao điểm G của IM và AP.




**Giải**

a) Vì I, C, D cố định nên IM nằm trong mặt phẳng cố định (ICD). Vì P là trung điểm của đoạn BM nên khi M di động trên đoạn CD thì P di động trên đường trung bình EF của tam giác BCD, trong đó E, F lần lượt là trung điểm của BC và BD. Từ đó suy ra AP nằm trong mặt phẳng cố định (AEF).

b) (ABC): $H = AE \cap IC$ và (ABD): $K = AF \cap ID$

Thì H, K là điểm chung của hai mặt phẳng (ICD), (AEF) nên giao tuyến là đường thẳng HK.

Vì G thuộc 2 mặt phẳng đó nên G thuộc đường thẳng HK là giao tuyến của mặt phẳng cố định nói trên.

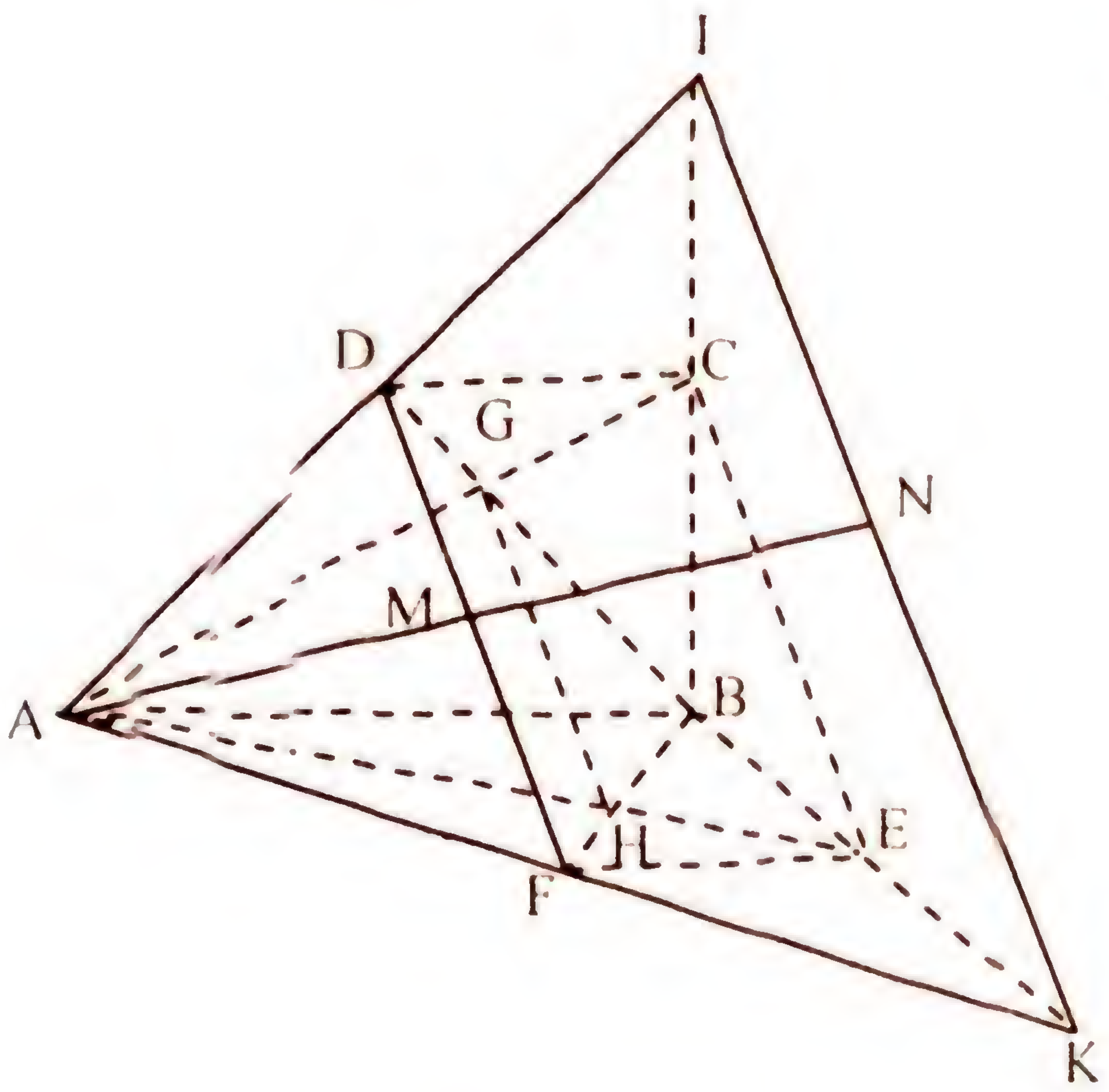
**Ví dụ 5**: Cho hai hình thang (không bình hành) ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây: (AEC) và (BFD); (BCE) và (ADF).

b) Lấy một điểm M trên đoạn DF. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (BCE).

c) Chứng minh hai đường thẳng AC và BF là hai đường thẳng không cắt nhau.

**Giải**




a) Gọi $G = AC \cap BD$

$H = AE \cap BF$.

Hai mặt phẳng (AEC) và (BFD) có hai điểm chung là G và H. Vậy GH là giao tuyến của hai mặt phẳng trên.

Gọi $I = AD \cap BC$

$K = AF \cap BE$ thì suy ra IK là giao tuyến của hai mặt phẳng (BCE) và (ADF).

b) Trong mặt phẳng (AIK), AM cắt IK tại N. Ta có N là giao điểm của AM với mặt phẳng (BCE).

c) Giả sử nếu AC và BF cắt nhau, ta suy ra hai hình thang đã cho nằm trong cùng một mặt phẳng là trái với giả thiết.

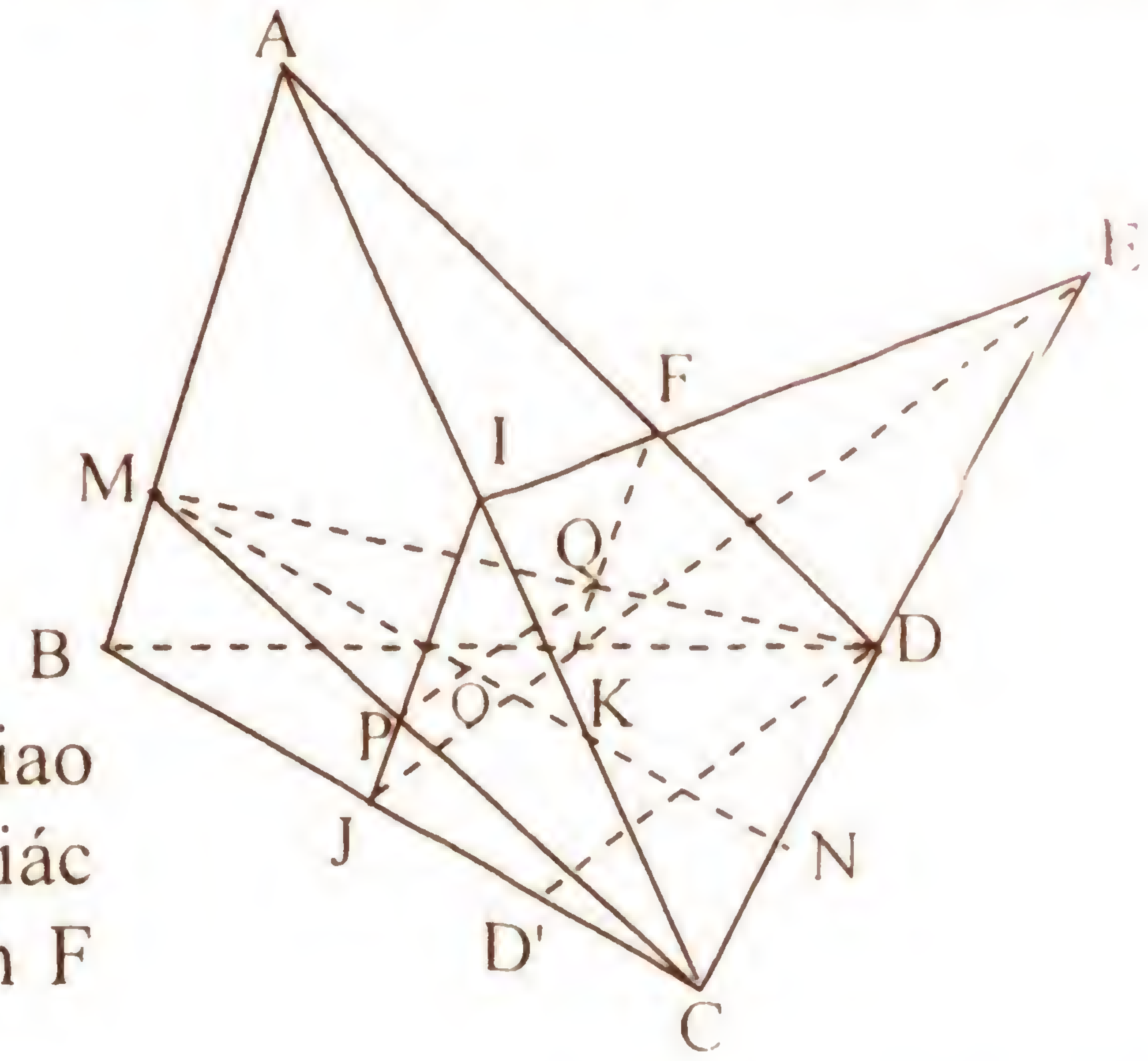
**Ví dụ 6:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD, lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm E và F của đường thẳng CD và AD với mặt phẳng (IJK). Chứng minh DE = DC, FA = 2FD và FK// IJ

b) Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (IJK).

**Giải**

a) Trong (BCD), CD cắt JK tại E nên E là giao điểm của CD với (IJK).
Trong tam giác BCD, dựng DD' // JK.




Vì KD = $\dfrac{1}{2}$KB nên JD' = $\dfrac{1}{2}$JB.

Vì JB = JC nên JD' = $\dfrac{1}{2}$JC.

Suy ra: D'J = D'C.
Do đó: DE = DC
Trong (ACD), AD cắt IE tại F. Đây là giao điểm của AD với (IJK). Trong tam giác ACE, AD và EI là hai trung tuyến, nên F là trọng tâm.
Do đó FA = 2 FD.Vì K và F là trọng tâm các tam giác BCE và ACE nên ta có: $\dfrac{KE}{KJ} = \dfrac{FE}{FI} = 2$
Trong tam giác IJE, hệ thức trên suy ra FK // IJ

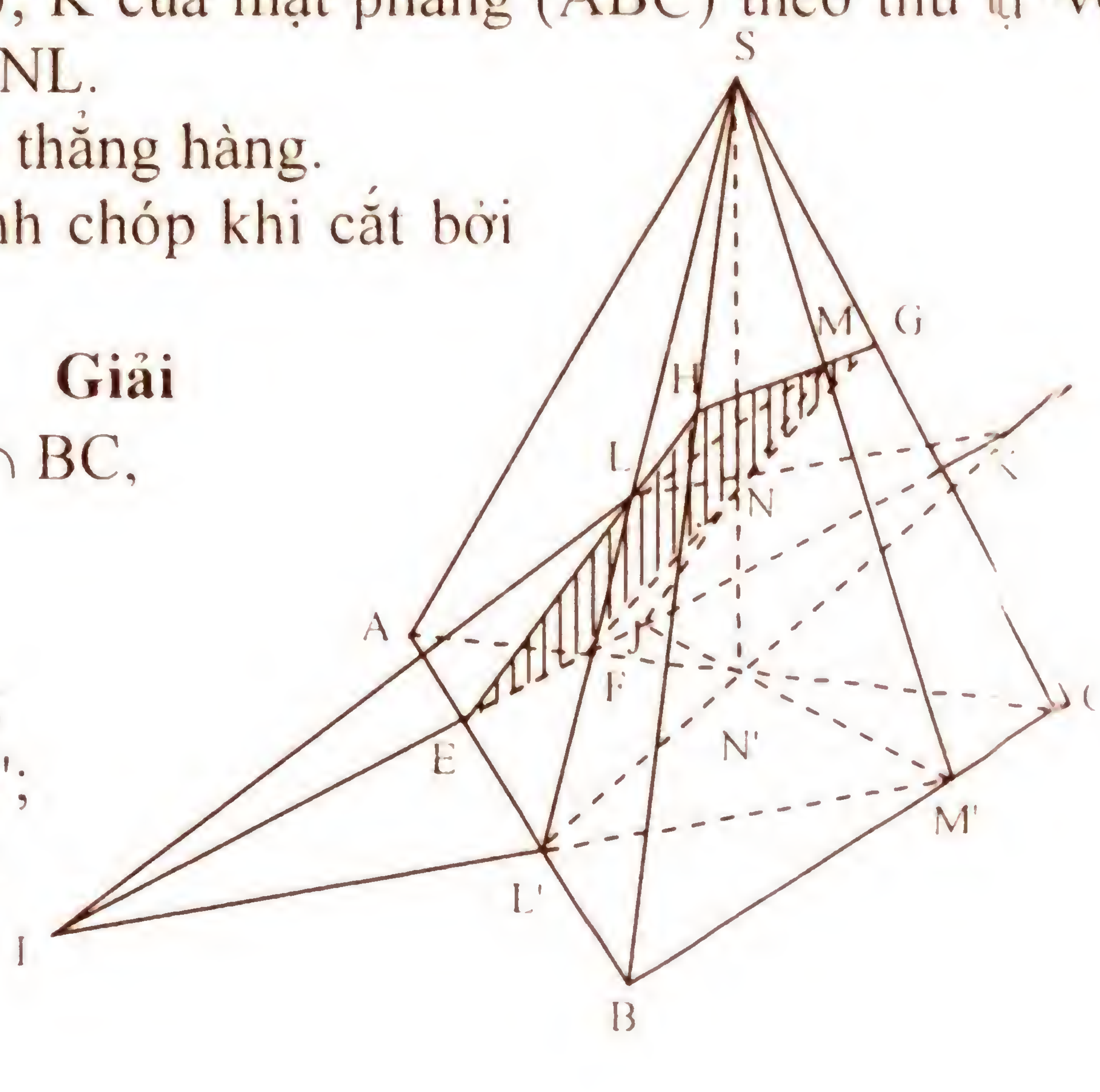
b) MC cắt IJ tại P, MD cắt FK tại Q thì PQ là giao tuyến của mp(MCD) và mp(IJK)
Trong (MCD), MN cắt PQ tại O, đây là giao điểm của MN với (IJK).

**Ví dụ 7**: Cho hình chóp tam giác S.ABC. Trong các miền tam giác SAB, SBC, SCA lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho các đường thẳng LM, MN, NL đều cắt mp(ABC).

a) Xác định các giao điểm I, J, K của mặt phẳng (ABC) theo thứ tự với các đường thẳng LM, MN, NL.

b) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(LMN).




**Giải**

a) Gọi L' = SL ∩ AB, M' = SM ∩ BC,
N' = SN ∩ CA.
Trong các mặt phẳng:
mp(SLM): I = ML ∩ M'L';
mp(SNM): J = NM ∩ N'M';
mp(SNL): K = LN ∩ L'N'.

Đó là các giao điểm I, J, K cần tìm.

b) Các điểm I, J, K đều cùng thuộc hai mặt phẳng (MNL) và (M'N'L') nên chúng thẳng hàng trên giao tuyến.

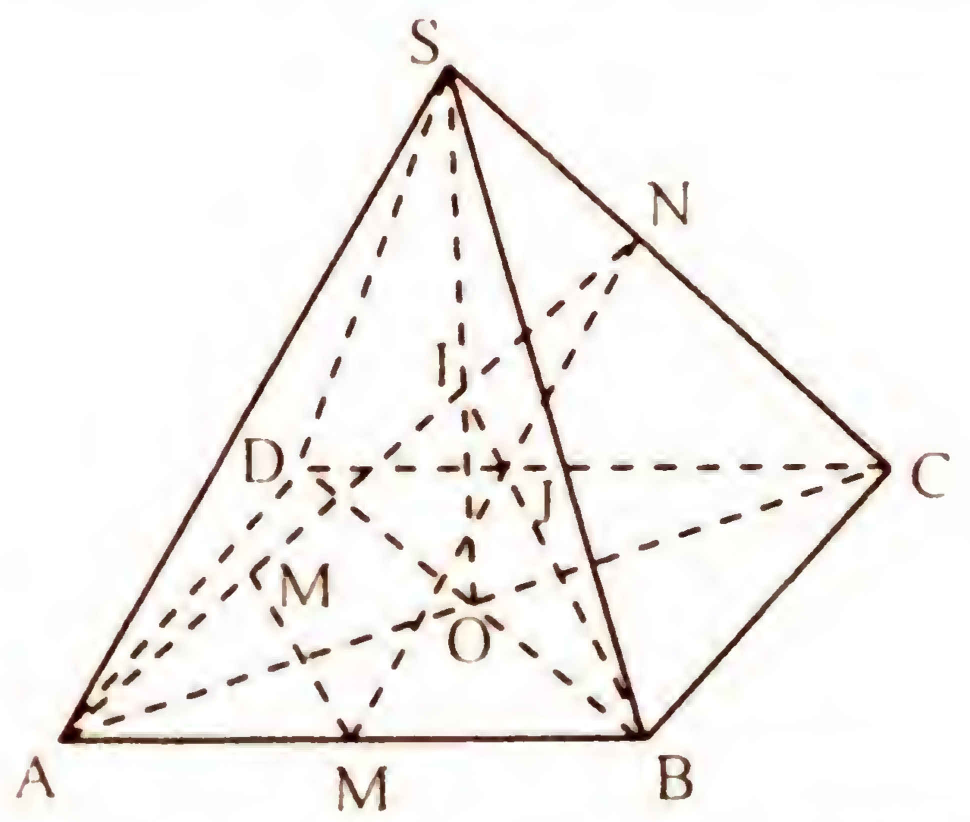
c) Giả sử đường thẳng IK cắt AB, AC theo thứ tự tại E, F. Khi đó $G = FN \cap SC$, $H = GM \cap SB$ và do E, L, H thẳng hàng nên tứ giác EFGH là thiết diện cần dựng. Thiết diện có thể là tứ giác hoặc tam giác phụ thuộc vào đường thẳng IK cắt hai cạnh của $\Delta ABC$ hoặc phần kéo dài của chúng.

**Ví dụ 8**: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và SC.

a) Xác định các giao điểm I và J của mp(SBD) theo thứ tự với các đường thẳng AN và MN.

b) Chứng minh ba điểm B, I, J thẳng hàng.

c) Tính các tỉnh số $\frac{IA}{IN}$; $\frac{JM}{JN}$; $\frac{IB}{IK}$.




**Giải**

a) Gọi O là tâm hình bình hành ABCD. Trong $\Delta SAC$, AN cắt SO tại I. Vậy I là giao điểm của AN và mp(SBD).

Trong $\Delta NAB$, MN cắt BI tại J. Vậy J là giao điểm của MN và mp(SBD).

b) Theo cách vẽ câu a) thì B, I, J thẳng hàng.

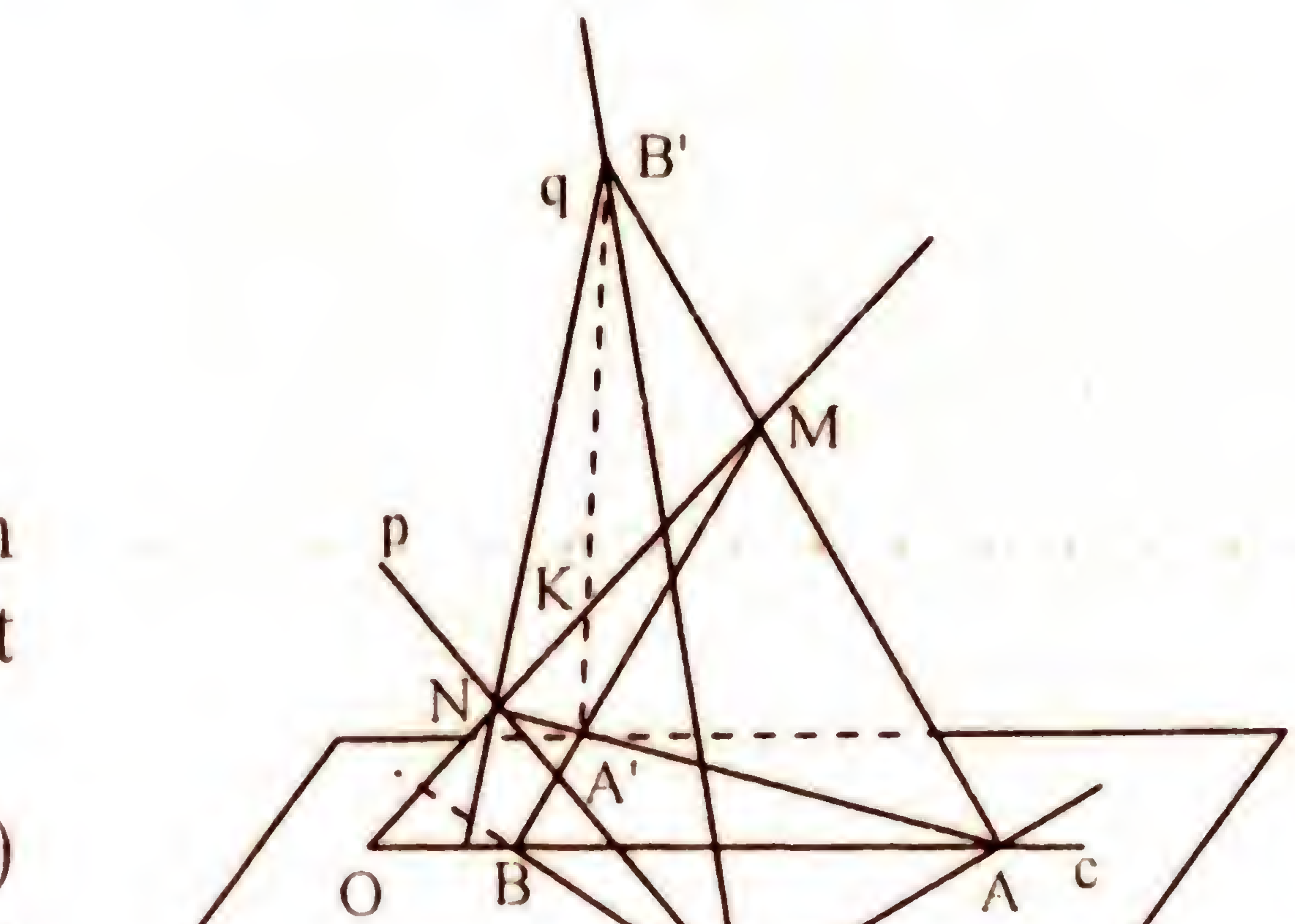
c) Vì I là trọng tâm của tam giác SAC nên $\frac{IA}{IN} = 2$. Gọi M' là trung điểm AI thì MM' // BJ, và J là trung điểm của MN nên $\frac{JM}{JN} = 1$.

Ta có: $IB = 2MM'$, $IJ = \frac{1}{2}MM'$. Vậy $\frac{JB}{IJ} = 4$.

**Ví dụ 9**: Trong mp(P) cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại I. Ngoài mp(P) cho hai điểm M, N sao cho đường thẳng MN cắt (P) tại O và O không nằm trên a và b. Một đường thẳng c thay đổi đi qua O cắt a, b lần lượt tại A và B. Gọi A' là giao điểm của AN và BM, B' là giao điểm của AM và BN.

a) Tìm quỹ tích A' và B'.

b) Chứng minh rằng đường thẳng A'B' luôn đi qua một điểm cố định.




**Giải**

a) Ta có $A' \in mp(M; b)$ và $A' \in mp(N; a)$ nên quỹ tích A' là giao tuyến p của hai mặt phẳng cố định: mp(M; b) và mp(N; a).

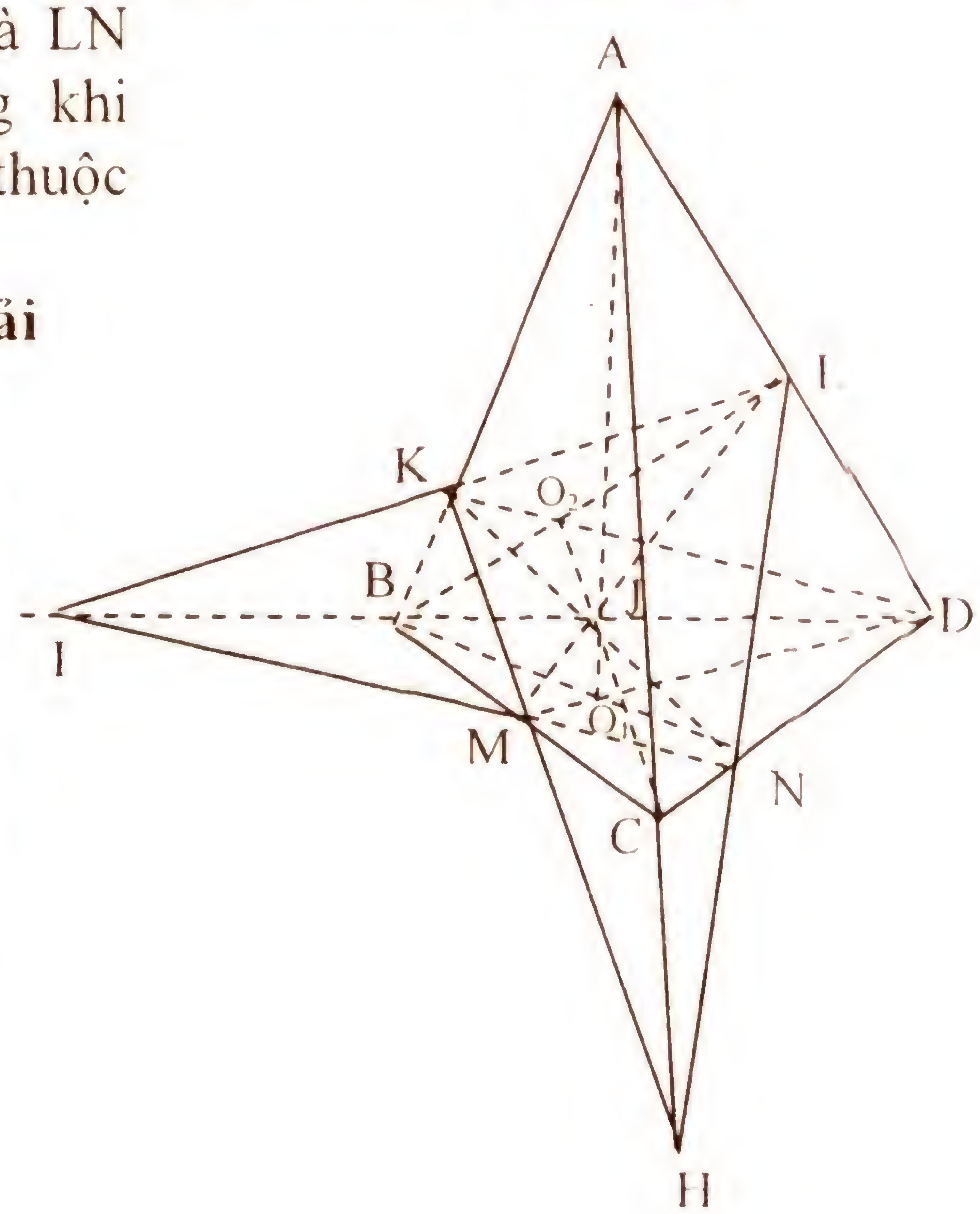
Ta có: $B' \in mp(M; a)$ và $B' \in mp(N; b)$ nên tương tự quỹ tích B' là giao tuyến q của hai mặt phẳng cố định: mp(M; a) và mp(N; b).

b) Trong mp(A'B'; MN) đường thẳng A'B' cắt MN tại K. Điểm K cũng chính là giao điểm của mp(p; q) cố định và đường thẳng MN cố định nên K cố định.
Vậy A'B' luôn luôn đi qua K cố định.

**Ví dụ 10**: Cho 4 tứ diện ABCD, gọi I là điểm nằm trên đường thẳng BD nhưng không thuộc đoạn BD. Trong mặt phẳng (ABD), vẽ đường thẳng qua I và cắt hai đoạn AB, AD lần lượt tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD), vẽ đường thẳng qua I và cắt hai đoạn CB và CD lần lượt tại M và N.

a) Gọi $O_1$ là giao điểm của hai đường thẳng BN và DM, $O_2$ là giao điểm của hai đường thẳng BL và DK, và J là giao điểm của hai đường thẳng LM và KN. Chứng minh ba điểm A, J, $O_1$ và C, J, $O_2$ thẳng hàng.

b) Giả sử hai đường thẳng KM và LN cắt nhau tại H. Chứng minh rằng khi điểm I thay đổi thì điểm H thuộc đường thẳng cố định.




**Giải**

a) Ba điểm A, J, $O_1$ thẳng hàng vì chúng cùng thuộc hai mặt phẳng (ABN) và (ADM). Tương tự ba điểm C, J, $O_2$ thẳng hàng vì chúng cùng thuộc (BCL) và (CDK).

b) A, C, H là ba điểm thẳng hàng, vì cùng thuộc hai mặt phẳng (ABC) và (ADC).
Do đó H thuộc đường thẳng AC cố định.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện ABCD.
   a) Xác định các đỉnh, cạnh, mặt.
   b) Lấy điểm M trên cạnh AD thì điểm M thuộc mặt phẳng nào ?
2. Cho hình chóp S.ABCD.
   a) Xác định các đỉnh, cạnh, mặt.
   b) Xét vị trí tương đối của SA và DC; AD và BC.
3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.
   a) Xác định các đỉnh, cạnh, mặt, đường chéo, mặt chéo.
   b) Chứng minh tam giác AB'D' đều.
4. Chứng minh 1 mặt phẳng và 1 đường thẳng không nằm trên mặt phẳng đó thì có không quá 1 điểm chung.

**HD:** dùng phản chứng

5. Mệnh đề nào đúng:

a) Ba đường thẳng mà 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau thì chúng đồng quy.

b) Hai đường thẳng nằm trên 2 mặt song song thì không có điểm chung.

c) Ba điểm nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt thì thẳng hàng.

d) Từ 4 điểm không đồng phẳng thì có 3 điểm không đồng phẳng.

**ĐS:** a) S b) Đ c) Đ d) S

**6.** Cho n điểm, n $\geq 4$ mà không có 4 điểm nào đồng phẳng. Chứng minh không có 3 điểm nào thẳng hàng.

**7.** Cho 7 điểm mà 4 điểm nào cũng đồng phẳng.Chứng minh tất cả 7 điểm đều thuộc 1 mặt phẳng.

**8.** Cho 2 đường thẳng chéo nhau a và b.Trên a lấy 2 điểm phân biệt A, B và trên b lấy 2 điểm phân biệt C, D.

a) Chứng minh AD và CB chéo nhau.

b) M trên AC, N trên BD thì MN có song song với AB ? CD?

c) Lấy O trên MN.Chứng minh AO cắt CN, BO cắt DM.

**ĐS:** b) không song song

**9.** Cho tứ diện ABCD, O là điểm trong tam giác BCD, điểm M trên AO.

a) Tìm giao tuyến của (MCD) với (ABC); (ABD).

b) I và J thuộc BC, BD. Tìm giao tuyến (IJM) và (ACD).

**HD:** dùng đường gióng từ đỉnh S

**10.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (AA', CC') và (BB', DD').

b) (BDC') với 2 đáy

**11.** Cho tứ diện ABCD. Trên AC, AD lần lượt lấy M, N sao cho MN không song song CD. Gọi O là điểm trong tam giác BCD.

a) Tìm giao điểm của MN với CD, với (BCD)

b) Tìm giao điểm của BC, BD với (OMN).

**12.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là điểm trong tam giác ABC, BCD. Tìm giao điểm của MN với (ACD).

**HD:** dùng đường gióng từ đỉnh B

**13.** Cho hình chóp S.ABCD, M trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm AM với (SBD).

b) Điểm N trên BC.Tìm giao điểm của SD với (AMN).

**14.** Cho hình bình hành ABCD nằm trong (P) và S ở ngoài (P). Lấy M thuộc đoạn SA, N thuộc đoạn SB. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O.

a) Tìm giao điểm của (CMN) với SO.

b) Tìm giao tuyến của (SAD) và (CMN).

**15.** Cho hình chóp S.ABCD đáy hình thang có đáy lớn AB. Gọi I, J, K lần lượt trên SA, AB, BC.Tìm giao điểm của:

a) đường thẳng IK với (SBD)

b) đường thẳng SD, SC với (IJK).

**16.** Cho 2 hình thang không là hình bình hành ABCD và ABEF chung đáy lớn AB và không đồng phẳng.

a) Tìm giao tuyến (AEC) và (BFD); (BCE) và (ADF)

b) Lấy M thuộc DF. Tìm giao điểm AM với (BCE).

c) Chứng minh AC và BF không cắt nhau.

**HD:** a) giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 giao điểm của các cặp đường thẳng

**17.** Cho hình chóp S.ABCD. Lấy D' trên SD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ABD') bằng 3 cách.

**18.** Cho hình chóp S.ABCD. Lấy M trong tam giác SAB. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MCD).

**19.** Cho hình chóp S.ABCD, M thuộc miền trong tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của (SBM) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MB với (SAC).

c) Tìm thiết diện cắt hình chóp bởi (ABM).

**HD:** dùng đường gióng

**20.** Cho hình chóp S.ABCD, đường thẳng $\Delta$ song song với BD và thuộc mặt đáy. Gọi M là trung điểm SA. Tìm thiết diện cắt bởi mp(M, $\Delta$) tùy theo các vị trí của $\Delta$.

**21.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi. Xác định thiết diện qua SA và chia đáy thành 2 phần có diện tích bằng nhau.

**HD:** gọi I là trung điểm của BD, vẽ đường thẳng qua I, song song với AC cắt CD tại J thì mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng (SAJ)

**22.** Cho tứ diện đều ABCD có 6 cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AD, J và K là điểm đối xứng với D qua C và B.

a) Xác định thiết diện cắt bởi (IJK)

b) Tính diện tích thiết diện.

**23.** Cho hình chóp S.ABCD, AC cắt BD tại O. Gọi M, N, I là 3 điểm trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện cắt bởi (MNI).

**24.** Cho tứ diện ABCD. Gọi H, K là trung điểm của CA, CB và điểm M thuộc tam giác BCD. Biện luận thiết diện cắt tứ diện bởi (MHK).

**25.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng đi qua 3 trung điểm:

a) I, J, K của 3 cạnh liên tiếp B'B, BA, AD.

b) M, N, P của 3 cạnh AB, B'C', DD'.

**HD:** b) gióng song song với cạnh AA'

**26.** Cho hình chóp S.ABCD. Một mặt phẳng cắt 4 cạnh bên tại A', B', C', D'. Gọi O, O' là giao điểm 2 đường chéo tứ giác ABCD, A'B'C'D'. Chứng minh S, O, O' thẳng hàng.

**HD:** 3 điểm cùng nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt

**27.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.Trên 4 cạnh bên lấy 4 điểm M, N, P, Q sao cho chúng đồng phẳng. Gọi E, F, G, H là giao điểm của các đường thẳng MN, NP, PQ, QM với mặt phẳng (A'B'C'D').

a) Chứng minh E, F, G, H thẳng hàng.

b) Giao điểm của MP với (A'B'C'D') có thuộc đường này không ?

**28.** Cho hình chóp S.ABCD.Điểm M trên BC, N trên SD.

a) Tìm giao điểm I của BN, J của MN với (SAC).

b) DM cắt AC tại K.Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c) Xác định thiết diện cắt bởi (BCN).

**29.** Cho tứ diện ABCD, gọi G là trọng tâm tam giác ACD.Lấy M, N, P thuộc các đoạn AB, CA, DA sao cho $\frac{MA}{MB}=\frac{NC}{NA}=\frac{PD}{PA}=\frac{1}{2}$

Gọi I, J là giao điểm của MN với BC, MP với BD.

a) Chứng minh MG, PI, NJ đồng phẳng

b) Gọi E, F là trung điểm của CD, NI; H là giao điểm của MG với BE, K là giao điểm của GF với (BCD). Chứng minh H, K, I, J thẳng hàng.

**30.** Cho 4 đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng. Chứng minh chúng đồng quy.

**HD:** dùng cách chứng minh đồng quy liên tiếp, kết hợp với phản chứng

**31.** Cho n đường thẳng, $n \geq 4$ đôi một cắt nhau và không đồng phẳng.Chứng minh chúng đồng quy.

**32.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy không là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm E.

a) Tìm giao điểm F của SD với (ABE).

b) Chứng minh 3 đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.

**HD:** b) chuyển qua thẳng hàng

**33.** Cho tứ diện ABCD.Gọi E, F, G lần lượt là 3 điểm trên AB, AC, BD sao cho đường thẳng EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng quy.

**HD:** Chứng minh các đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng.

**34.** Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I, J là 2 điểm trên AD, SB.

a) Tìm các giao điểm K, L của I J, D J với (SAC).

b) Cho AD cắt BC tại O, O J cắt SC tại M.Chứng minh 4 điểm A, K, L, M thẳng hàng.

**HD:** 4 điểm cùng nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt

**35.** Cho A, B nằm ngoài mặt phẳng (P) sao cho AB không song song (P). Điểm M lưu động trong không gian sao cho MA, MB cắt (P) tại A', B'. Chứng minh đường thẳng A'B' đi qua 1 điểm cố định.

**ĐS:** qua giao điểm của đường thẳng AB với mp(P)

**36**. Trên mặt phẳng (Q) cho 2 tia song song Ax, By. Hai điểm lưu động M trên Ax, N trên By khác A, B. Điểm O cố định không thuộc (Q).

a) Chứng minh OA, MN chéo nhau.

b) Gọi I trung điểm MN.Chứng minh OI nằm trên 1 mặt phẳng cố định.

**HD:** b) dùng đường thẳng song song và cách đều Ax, By

**37**. Cho hình chóp S.ABCD.Một mặt phẳng lưu động qua 2 trung điểm I, J của SA, SC.Mặt phẳng này cắt SB, SD tại M, N. Chứng minh MN đi qua 1 điểm cố định.

**ĐS:** giao điểm của IJ với mp(SBD)

**38.** Cho hình chóp S.ABCD đáy không có cặp cạnh song song. M lưu động trên cạnh SB.

a) Tìm giao điểm N của SC với mp(ADM).

b) Tìm tập hợp giao điểm E của AN và DM.

**39.** Cho tứ diện ABCD.I, J trên AB, AC mà IJ không song song với BC. Mặt phẳng lưu động qua IJ cắt CD, DB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh MN đi qua 1 điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM; IM và JN.

**40**. Cho hình chóp S.ABC.Một mặt phẳng ($\alpha$) lưu động qua A cắt cạnh SB, SC tại B', C'. Chứng minh nếu $\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 4$ thì mặt phẳng ($\alpha$) chứa 1 đường thẳng cố định.

**HD:** gọi I là trung điểm của BC và I' là trung điểm của B'C'

**41.** Cho hình chóp S.ABCD, AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC kéo dài cắt nhau tại F với AD < DF.Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Mặt phẳng lưu động qua I J cắt SC, SD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh I J, MN, SE đồng quy.

b) Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

c) Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.

**HD:** b) c) quỹ tích là các giao tuyến

**42.** Cho hình chóp S.ABC gọi G là trọng tâm đáy.Một mặt phẳng (L) lưu động cắt 3 cạnh bên tại A', B', C'. Chứng minh nếu $\frac{SA}{SA'} + 2\frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 8$ thì mp(L) chứa 1 đường thẳng cố định.

**43** Cho hình chóp S.ABC. Trên 3 cạnh bên lấy A', B', C' lưu động. Chứng minh nếu: $SA = n.SA'$, $SB = (n + 1)SB'$, $SC = (n + 2)SC'$ thì mặt phẳng (A'B'C') chứa 1 đường thẳng cố định.

**HD:** vẽ hình bình hành SABI thì AB' qua I cố định

**44** Cho lục giác ghềnh ABCDEF có 3 cặp cạnh đối song song. Chứng minh 3 đường chéo đồng quy.

**45** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh 4 đường chéo đồng quy.

b) Tìm điểm G trong tam giác A'DB mà A, G, C' thẳng hàng.

**ĐS:** b) G là trọng tâm của tam giác A'DB

**46** Cho tứ diện SABC.Qua C dựng mặt phẳng (P) cắt AB SB tại B', B''.Qua B dựng mặt phẳng (Q) cắt AC, SC tại C', C''. Đường thẳng BC'' cắt CB'' tại O', BC' cắt CB' tại O''. Giả sử O'O'' cắt SA tại I.

a) Chứng minh AO'', SO', BC đồng quy.

b) Chứng minh I, B', B'' và I, C', C'' thẳng hàng.

**47.** Cho tứ diện ABCD.Gọi P, L, M, N, R, S lần lượt là trung điểm cạnh AB, CD, BC, DA, BD, CA. Từ điểm O bất kỳ trong không gian vẽ 6 đường thẳng: qua P, // OL; qua L, // OP; qua M, // ON; qua N, // OM; qua R, // OS; qua S, // OR. Chứng minh 6 đường thẳng này đồng quy.

**ĐS:** điểm đối xứng của O qua trọng tâm G

**48.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Ba điểm lưu động M, N, P trên 3 cạnh bên AA', BB', CC'.

a) Xác định thiết diện MNPQ cắt bởi (MNP).

b) Tìm quỹ tích giao điểm T của đường thẳng MP với (ABCD)

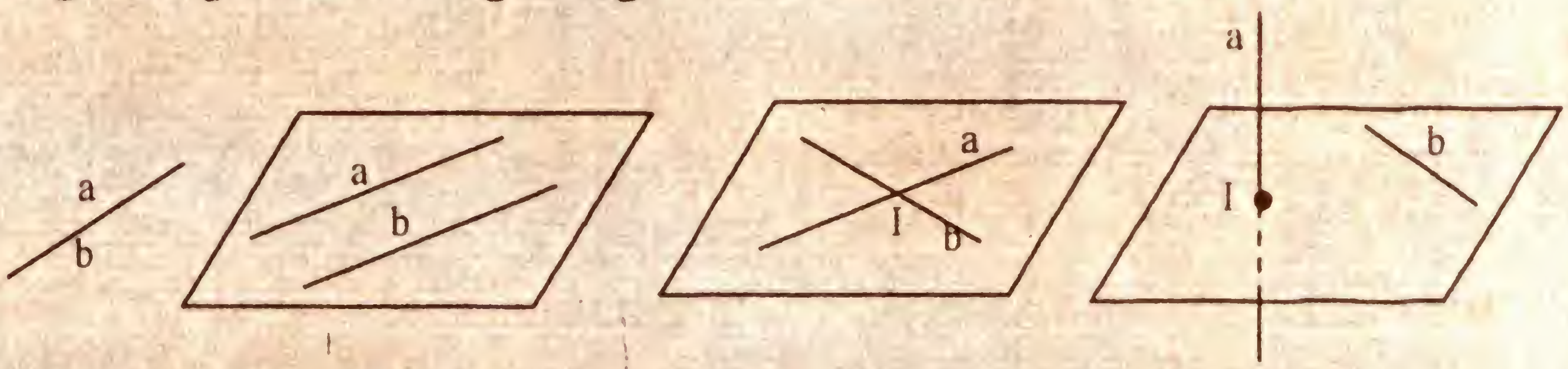
**HD:** b) c) tìm 2 mặt phẳng cố định lần lượt chứa 2 đường thẳng lưu động thì giao điểm thuộc giao tuyến cố định.

# §2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**• HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG**

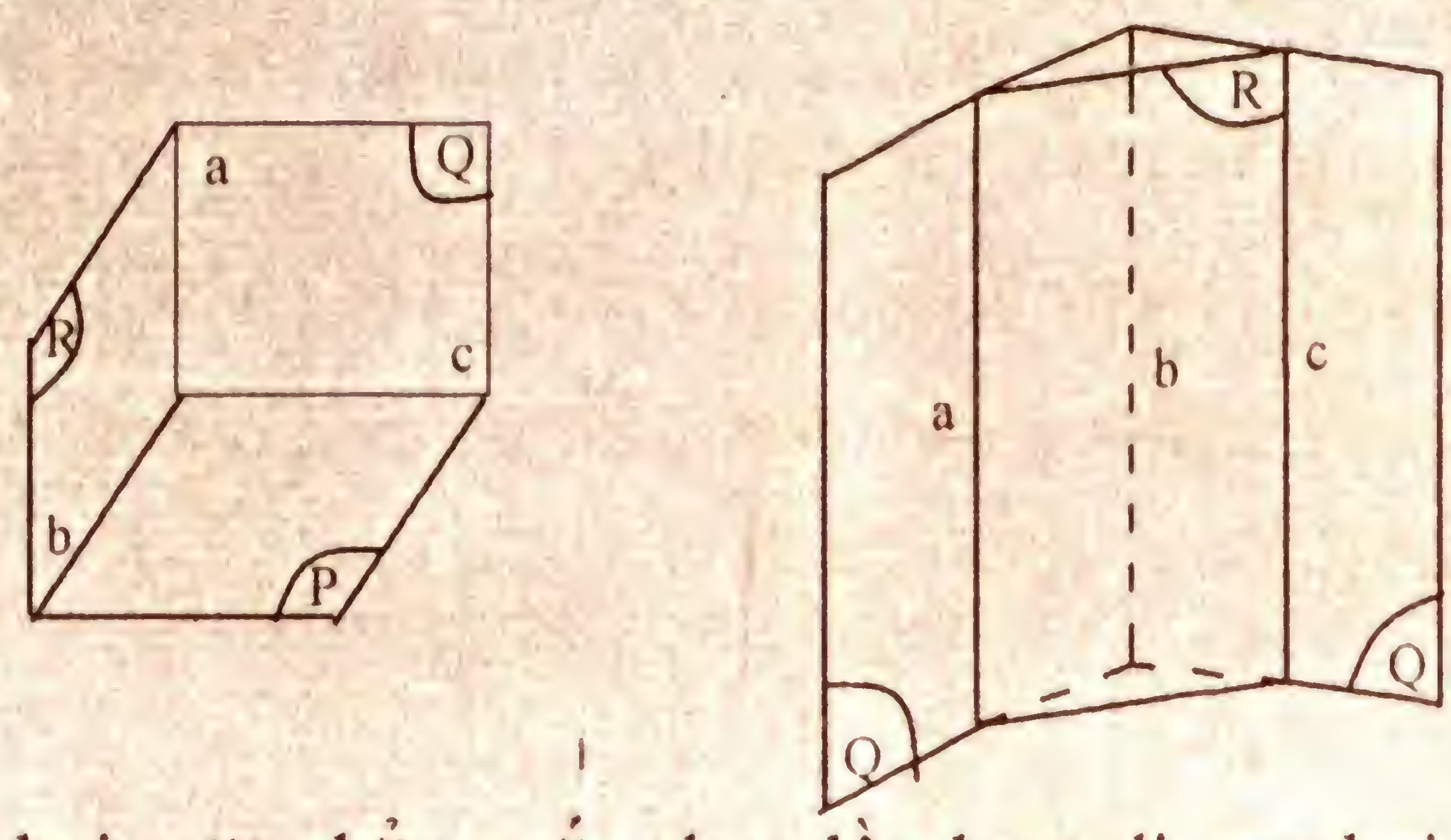
- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng: có 4 vị trí tương đối là 2 đường thẳng trùng nhau, song song, cắt nhau và chéo nhau.




$a \equiv b$ $\quad$ $a \,//\, b$ $\quad$ $a \cap b = I$ $\quad$ a chéo b

- Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

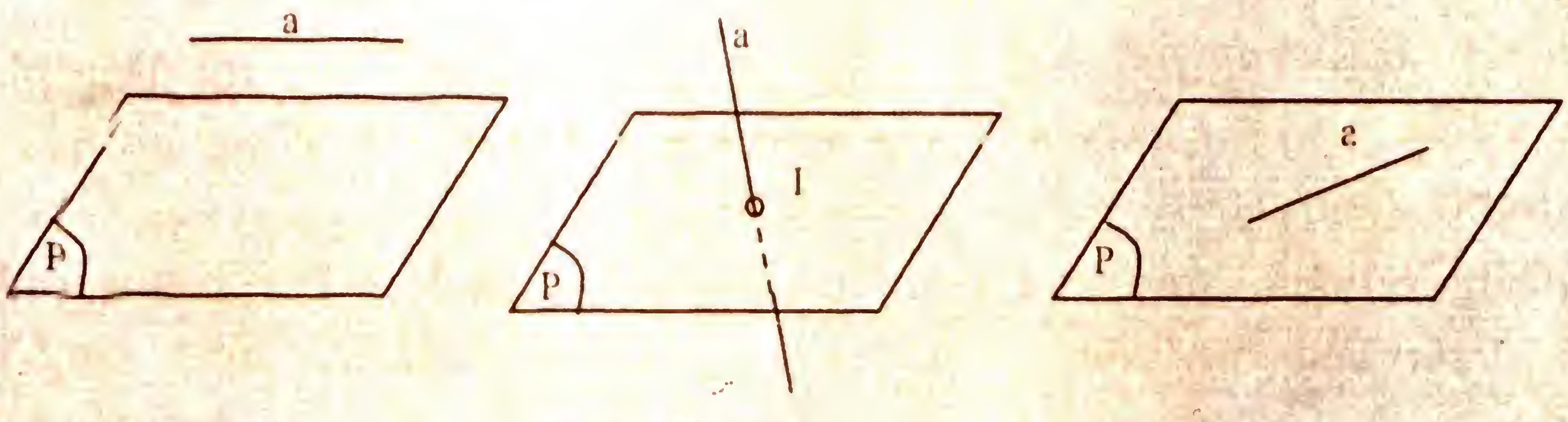



- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện.

• **ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG**

- Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

- Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng: Có 3 vị trí tương đối là đường thẳng song song mặt phẳng, đường thẳng cắt mặt phẳng và đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

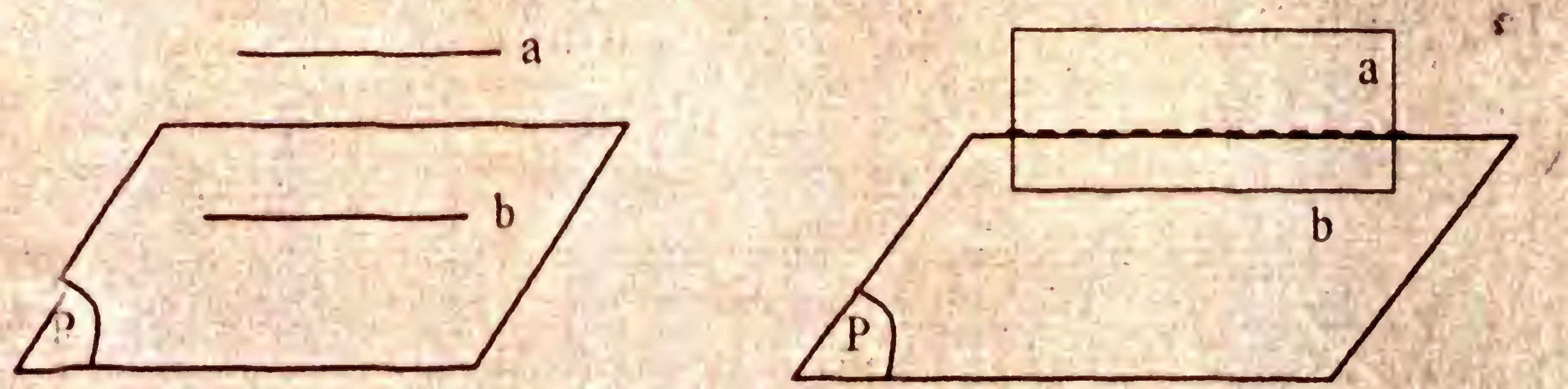



a // (P) a ∩ (P) = I a ⊂ (P)

- Định lí cơ bản:

Nếu đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên (P) thì a song song với (P).

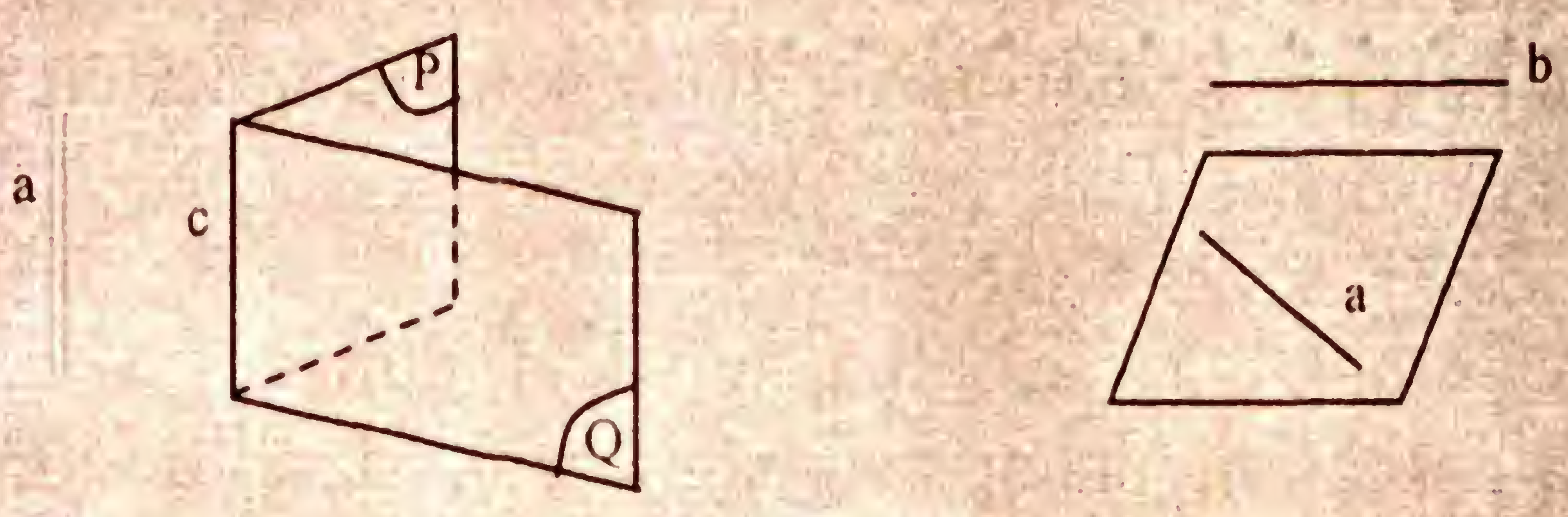
- Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.




- Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

- Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b.



## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

• Hai đường thẳng có 4 vị trí tương đối:
- Đồng phẳng: Trùng nhau, cắt nhau, song song.
- Không đồng phẳng: Chéo nhau.

Để chứng minh 2 đường chéo nhau ta thường sử dụng phương pháp phản chứng: Giả sử 2 đường thẳng không chéo nhau nên chúng đồng phẳng. Từ đó đưa về điều vô lý.

• Một đường thẳng và một mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng nằm trên mặt phẳng, đường thẳng cắt mặt phẳng và đường thẳng song song với mặt phẳng.

Để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ngoài cách dựa vào định lý cơ bản, ta có thể giả sử đường thẳng cắt mặt phẳng cho trước, từ đó suy ra điều vô lý. Hơn nữa nếu đường thẳng không thuộc mặt phẳng thì đường thẳng song song với mặt phẳng đó.

**Ví dụ 1:** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung;

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau;

c) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau;

d) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

**Giải**

Dựa vào các định nghĩa về 2 đường thẳng thì mệnh đề:

a) đúng và d) đúng.

**Ví dụ 2**: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau;

b) Nếu đường thẳng song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng thì đường thẳng song song với mặt phẳng đó;

c) Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại;

d) Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại.

**Giải**

Dựa vào định nghĩa và định lý cơ bản thì mệnh đề d) đúng.

**Ví dụ 3**: Cho mp(P) và hai đường thẳng song song a, b. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây:

a) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b;

b) Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b;

c) Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b;

d) Nếu (P) chứa a thì (P) có thể song song với b.

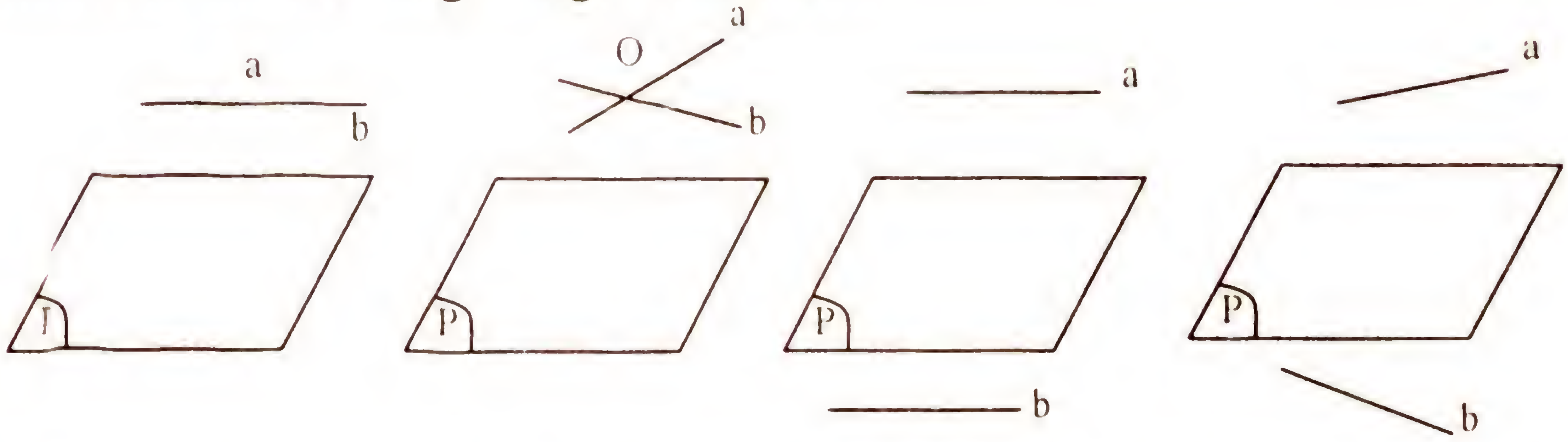
**Giải**

Dựa vào định nghĩa và định lý cơ bản thì mệnh đề b) đúng và d) đúng.

**Ví dụ 4**: Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với mp(P). Vị trí tương đối của a và b thế nào?

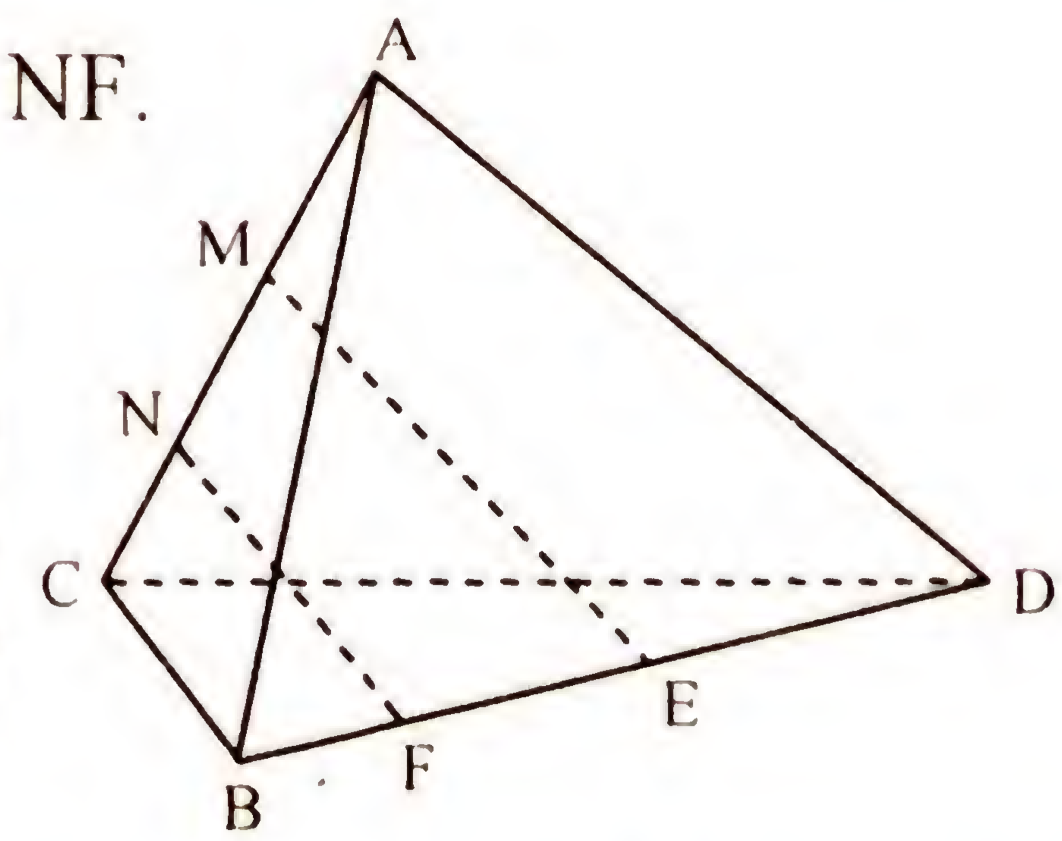
**Giải**

Hai đường thẳng a và b có thể xảy ra một trong bốn trường hợp: trùng nhau, cắt nhau, song song, chéo nhau:




**Ví dụ 5**: Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AC lấy 2 điểm phân biệt M và N, trên cạnh BD lấy 2 điểm phân biệt E và F. Chứng minh 2 đường thẳng chéo nhau:

a) AB và CD. b) MF và NF.




**Giải**

a) Giả sử 2 đường thẳng AB và CD không chéo nhau thì AB và CD đồng phẳng nên có mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng AB và CD. Từ đó thì 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng: vô lý.
Vậy AB và CD không đồng phẳng.

b) Giả sử ME và NF đồng phẳng thì có một mặt phẳng chứa 2 đường thẳng này. Vì M, N thuộc AC và E, F thuộc BD nên 4 điểm A, B, C, D cũng đồng phẳng: vô lý. Vậy 2 đường thẳng ME và NF chéo nhau.

**Ví dụ 6**: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có hay không hai đường thẳng p, q song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả a và b?.

**Giải**

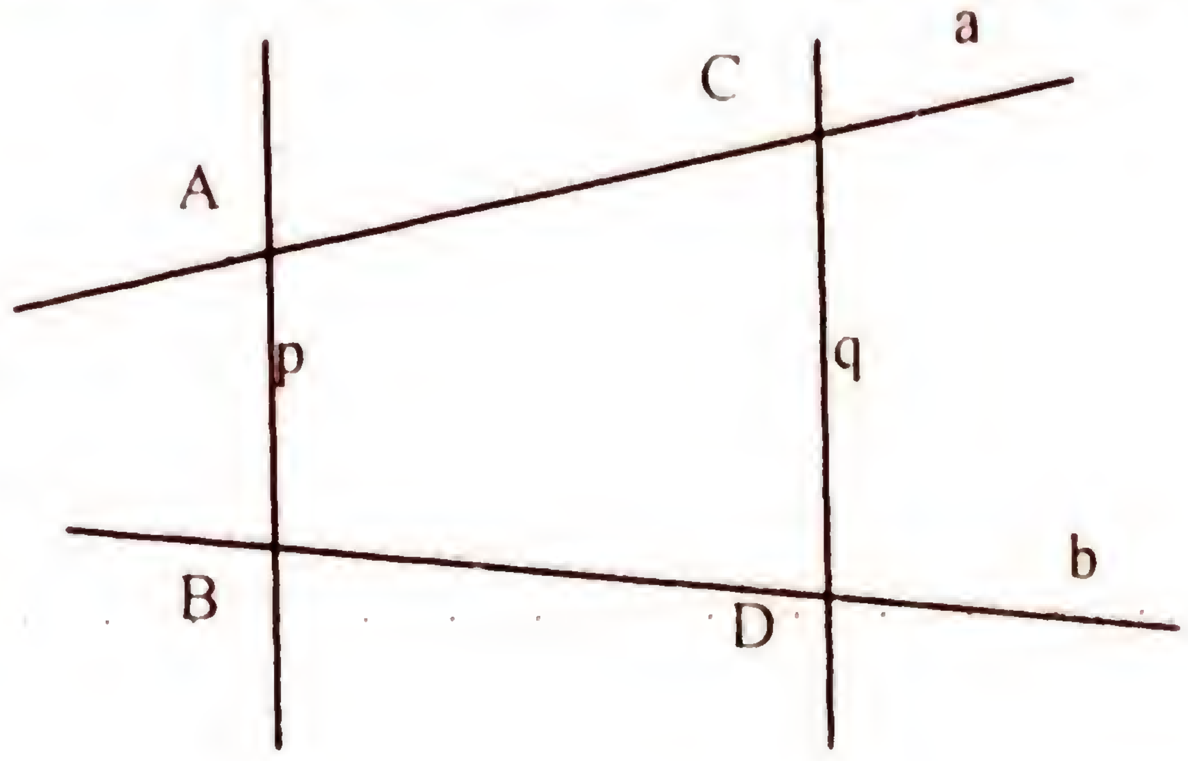
Giả sử tồn tại 2 đường thẳng p và q thoả đề bài.

Đường thẳng p cắt a và b tại A và B; q cắt a và b tại C và D. Vì p // q nên có mp(p; q) chứa bốn điểm A, C, B, D .

Ta có A và C đều thuộc mp(p, q) nên đường thẳng a thuộc mp(p; q).

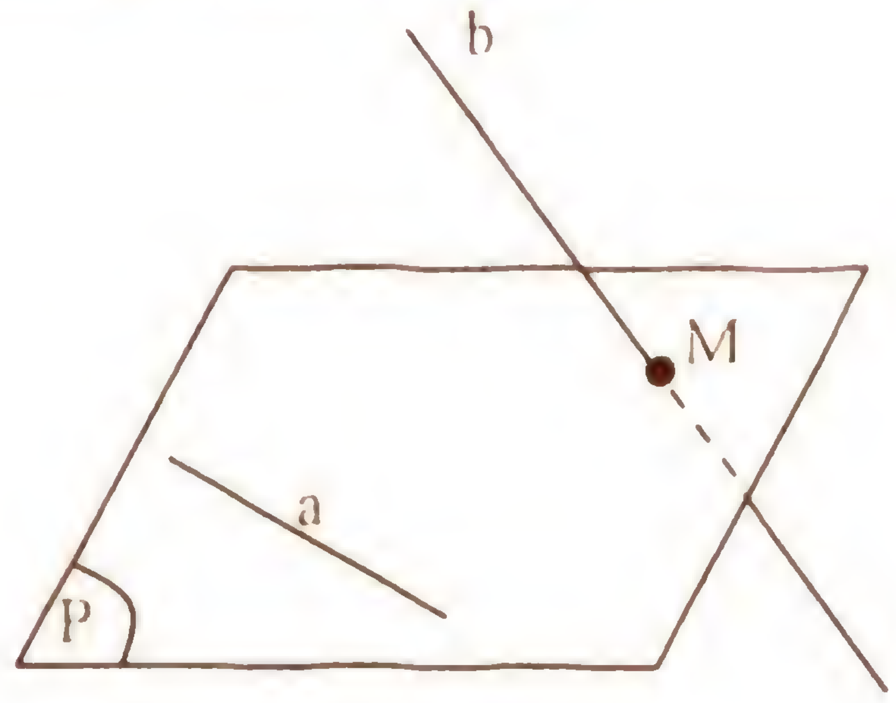
Tương tự b cũng thuộc mp(p; q). Từ đó suy ra a và b đồng phẳng (trái giả thiết).

Vậy không có hai đường thẳng p, q song song với nhau và cắt cả a và b.



**Ví dụ 7**: Cho đường thẳng a ⊂ mp(P) và một đường thẳng b cắt (P) tại điểm M. Chứng minh rằng nếu a không đi qua M thì a và b là hai đường thẳng chéo nhau (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng chéo nhau).

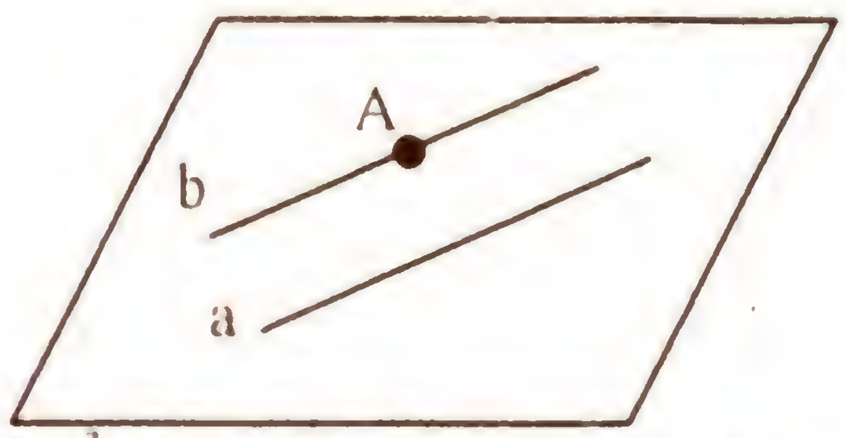
**Giải**




Giả sử a, b không chéo nhau khi đó a, b ⊂ (Q) và vì a ⊂ (Q), M ∈ (Q) và M không thuộc a, nên (Q) ≡ (P) ⇒ b ⊂ (P), trái với giả thiết b cắt (P). Vậy a, b chéo nhau.

**Ví dụ 8**: Chứng minh, trong không gian qua một điểm cho trước nằm ngoài đường thẳng thì có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

**Giải**




Giả sử A là một điểm nằm ngoài đường thẳng a cho trước. Theo tiên đề Ơ-clit về đường thẳng song song thì trong mp(A; a) có duy nhất đường thẳng b đi qua A và song song với a.

Hiển nhiên nếu một đường thẳng đi qua A và không nằm trên mp(A; a) thì không thể song song với a. Vậy đường thẳng b là duy nhất.

**Ví dụ 9**: Chứng minh, hai đường thẳng phân biệt cũng song song với đường thẳng thứ ba thì 2 đường thẳng đó song song với nhau.

**Giải**

Cho ba đường thẳng a, b, c trong đó b và c phân biệt , đường thẳng b // a và đường thẳng c // a.

- Nếu mp(a; b) trùng với mp(a; c) thì theo hình học phẳng ta có đường thẳng b // c.

- Nếu mp(a; b) khác mp(a; c), lấy một điểm C trên c và gọi c' là giao tuyến của mp(C; b) và mp(a; c).

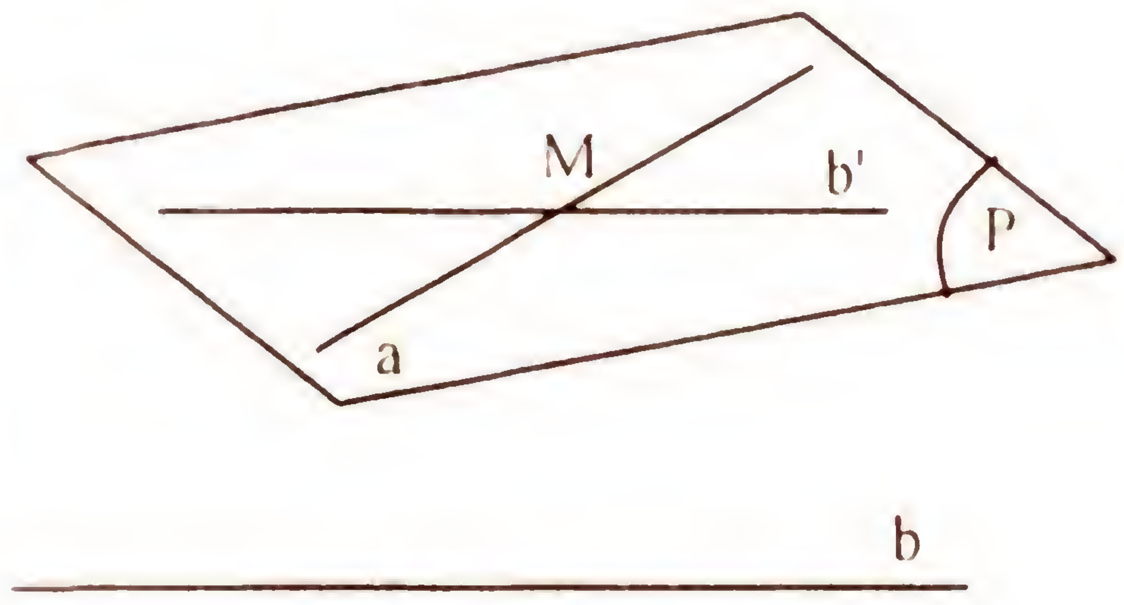
Giả sử c' // a thì c' phải trùng với c. Khi đó c // b, vì nếu c cắt b tại điểm I thì I ∈ mp(a; c) và I ∈ mp(a; b), suy ra I phải thuộc đường thẳng a là giao tuyến của mp(a; c) và mp(a; b). Vậy a và b cắt nhau tại I: vô lý.

Giả sử c' cắt a tại một điểm J thì khi đó J vừa thuộc mp(C; b) lại vừa thuộc mp(a; b) suy ra J thuộc giao tuyến b của mp(C; b) và mp(a; b), tức a và b cắt nhau tại J: vô lý.

Tóm lại ta có b // c.

**Ví dụ 10**: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

**Giải**

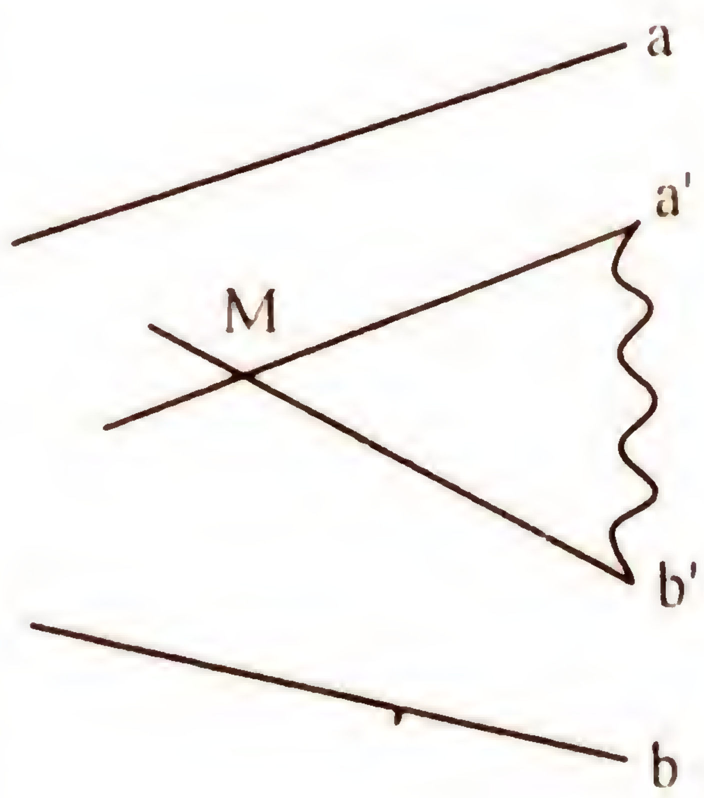



Lấy một điểm M nằm trên a. Vẽ qua M một đường thẳng b' song song với b. Khi đó, hai đường thẳng a và b' cắt nhau xác định mp(P) song song với b.

Nếu có mặt phẳng (Q) khác (P) cũng đi qua a và song song với b thì a là giao tuyến của (P) và (Q) nên a // b, trái với giả thiết. Vậy mp(P) là duy nhất.

**Ví dụ 11**: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b và một điểm M không nằm trên a và b. Chứng minh rằng có một và chỉ một mặt phẳng đi qua M song song với cả a và b hoặc song song với một đường thẳng và chứa đường thẳng kia.

**Giải**



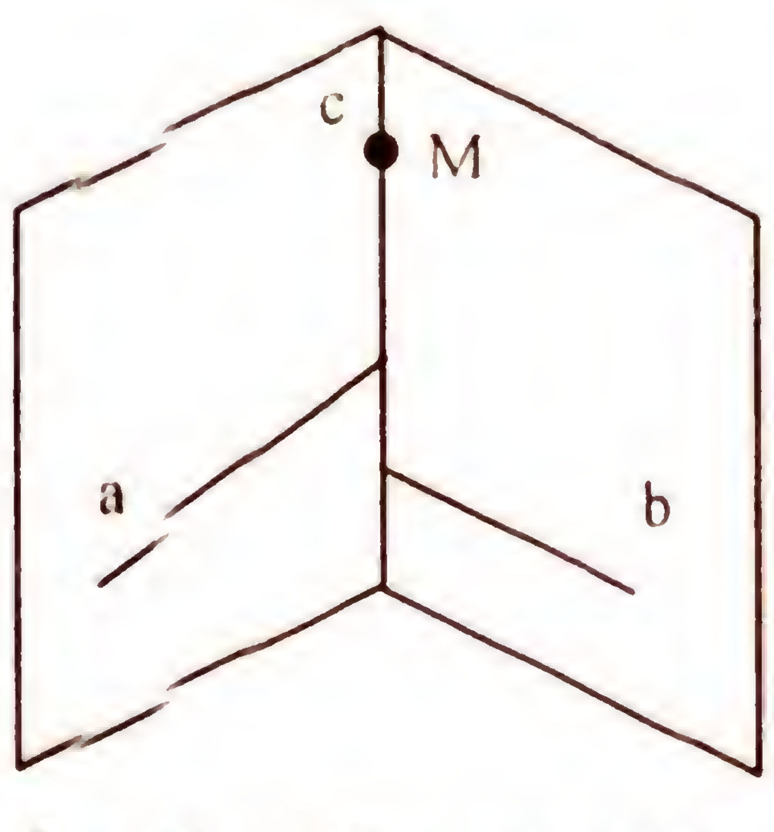

Gọi a', b' là những đường thẳng đi qua M lần lượt song song với a và b. Vì a, b chéo nhau nên a', b' phân biệt, do đó có mp(P) đi qua a' và b'. Mặt phẳng (P) hoặc song song với a, hoặc chứa a, mp(P) hoặc song song với b hoặc chứa b.

Nhưng mp(P) không thể đồng thời chứa a và b vì như vậy a, b không chéo nhau. Vậy mp(P) song song với cả a và b, hoặc song song với một trong hai đường thẳng đó và chứa đường thẳng kia.

Vì a' và b' duy nhất nên mp(P) duy nhất qua M thoả điều kiện.

**Ví dụ 12**: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và một điểm M không nằm trên a và b. Hãy xác định một đường thẳng c đi qua M cắt cả a và b. Trong trường hợp nào không có đường thẳng c?

**Giải**




Vì mp(a; M) và mp(b; M) có điểm chung M nên cắt nhau theo một giao tuyến c đi qua M. Đường thẳng c nằm trong mp(a; M) và mp(b; M) nên c có thể cắt a và cắt b. Khi đó c là đường thẳng phải xác định.

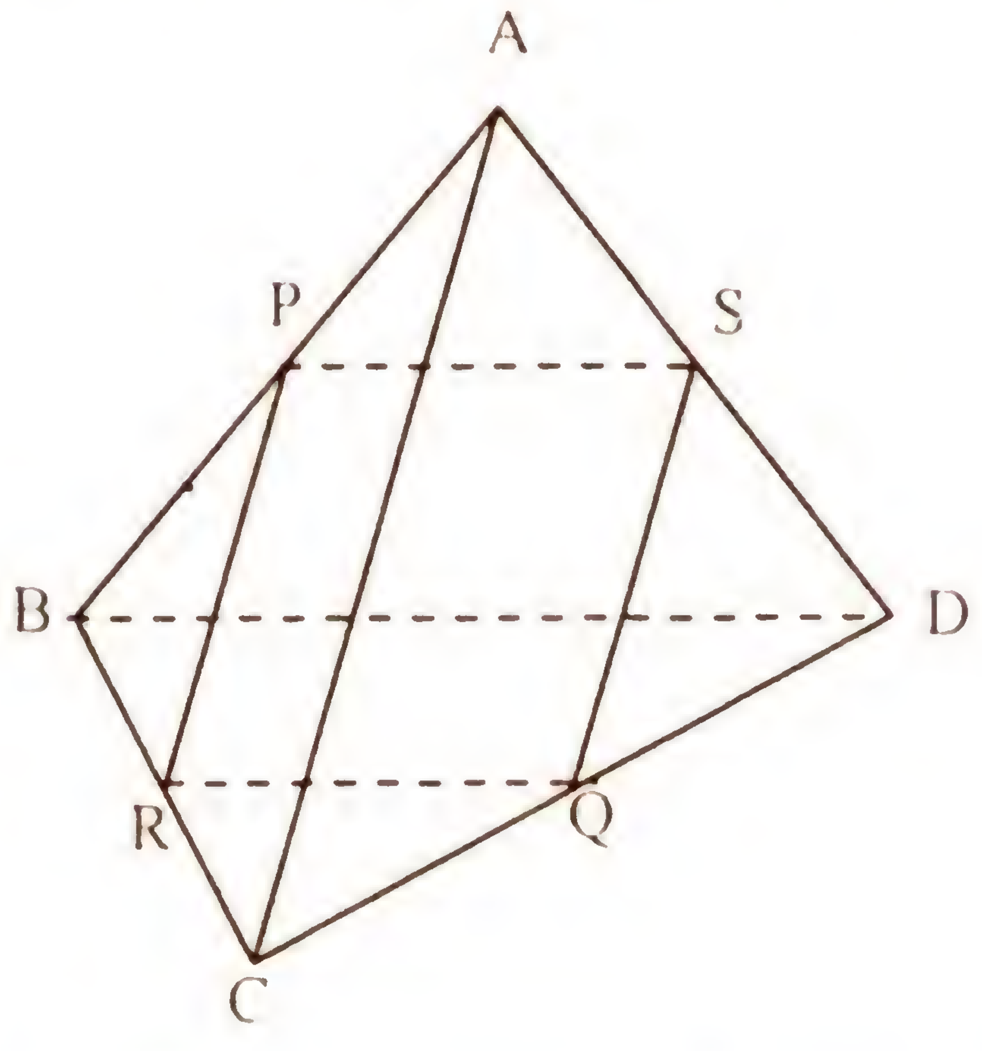
Nếu c // a hoặc c // b thì đường thẳng c không thoả mãn yêu cầu. Trường hợp này xảy ra khi mp(b; M) // a hoặc mp(a; M) // b.

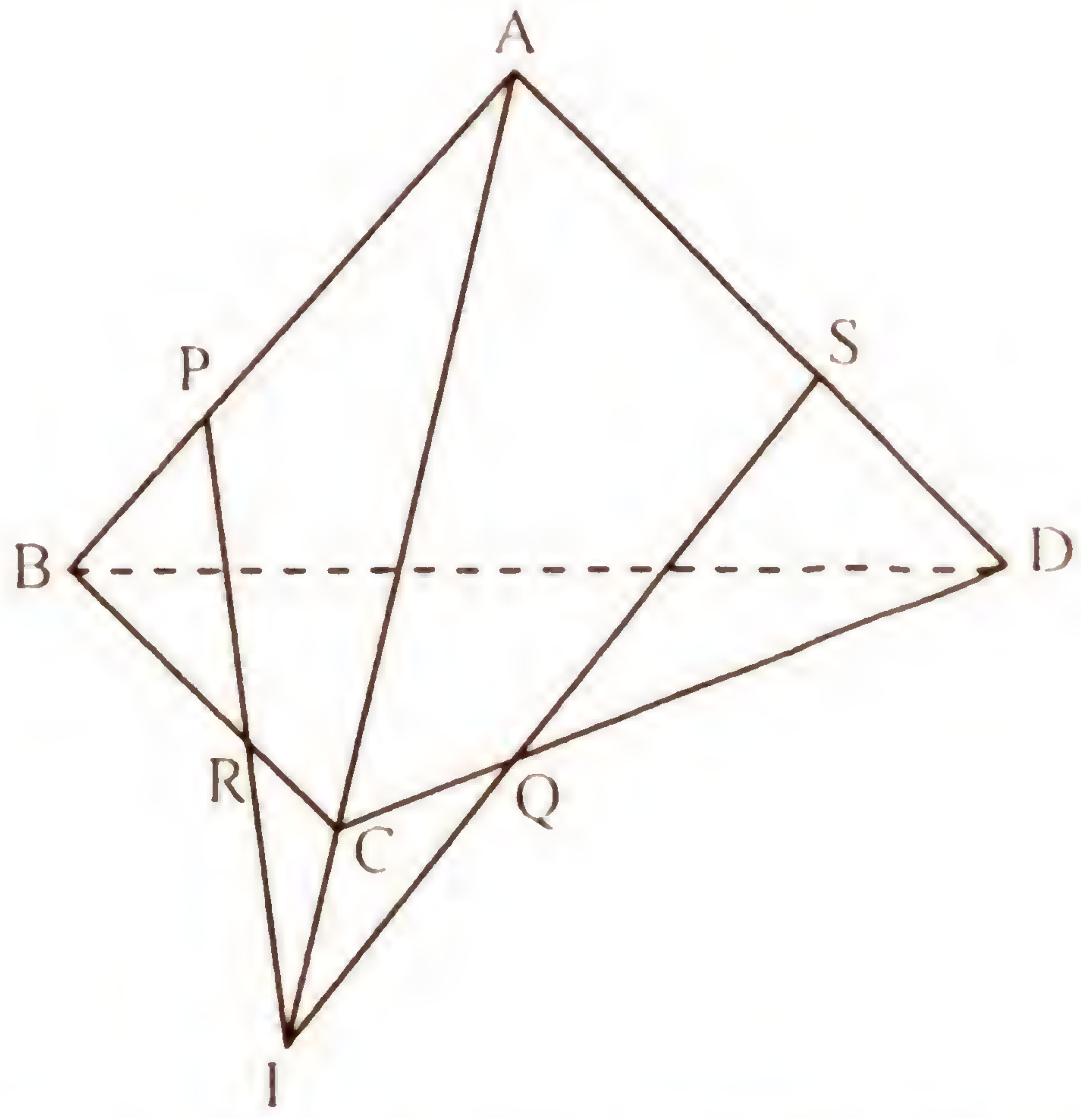
**Ví dụ 13**: Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mp(PQR) với cạnh AD nếu:

a) PR // AC.　　　　　　b) PR cắt AC.

**Giải**

a) Xét PR // AC. Từ Q ta vẽ đường thẳng song song với AC cắt AD tại S. Ta có QS // PR nên bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng.
Vậy S = mp(PQR) ∩ AD.



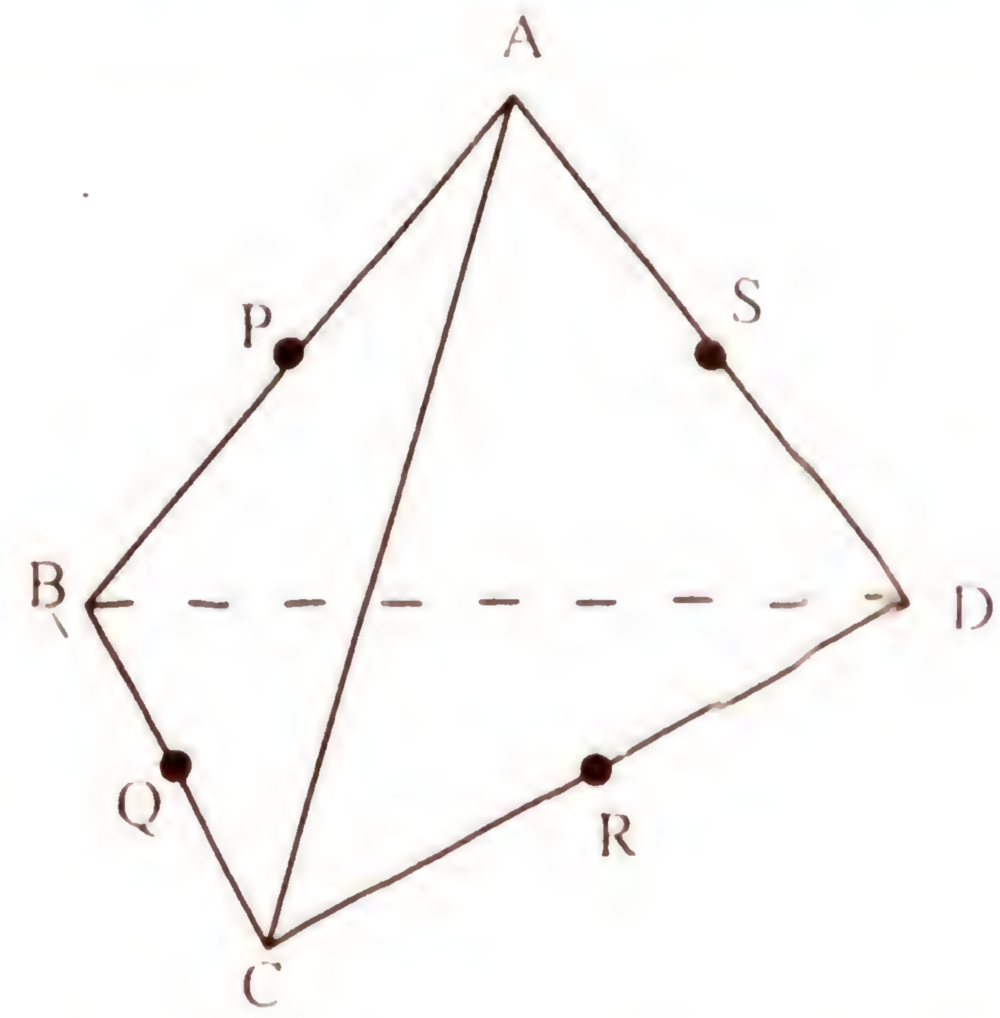




b) Xét PR cắt AC tại I. Khi đó IQ = (PQR) ∩ (ACD). Đường thẳng IQ cắt AD tại S.
Vậy S = (PQR) ∩ AD.

<u>**Ví dụ 14:**</u> Cho tứ diện ABCD. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng: bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

**Giải**

Nếu P, Q, R, S đồng phẳng thì chúng cùng thuộc một mp($\alpha$) nào đó. Xét ba mặt phẳng: mp($\alpha$), mp(ABC), mp(ACD).




Ta có: PQ = ($\alpha$) ∩ (ABC),

RS = ($\alpha$) ∩ (ACD),

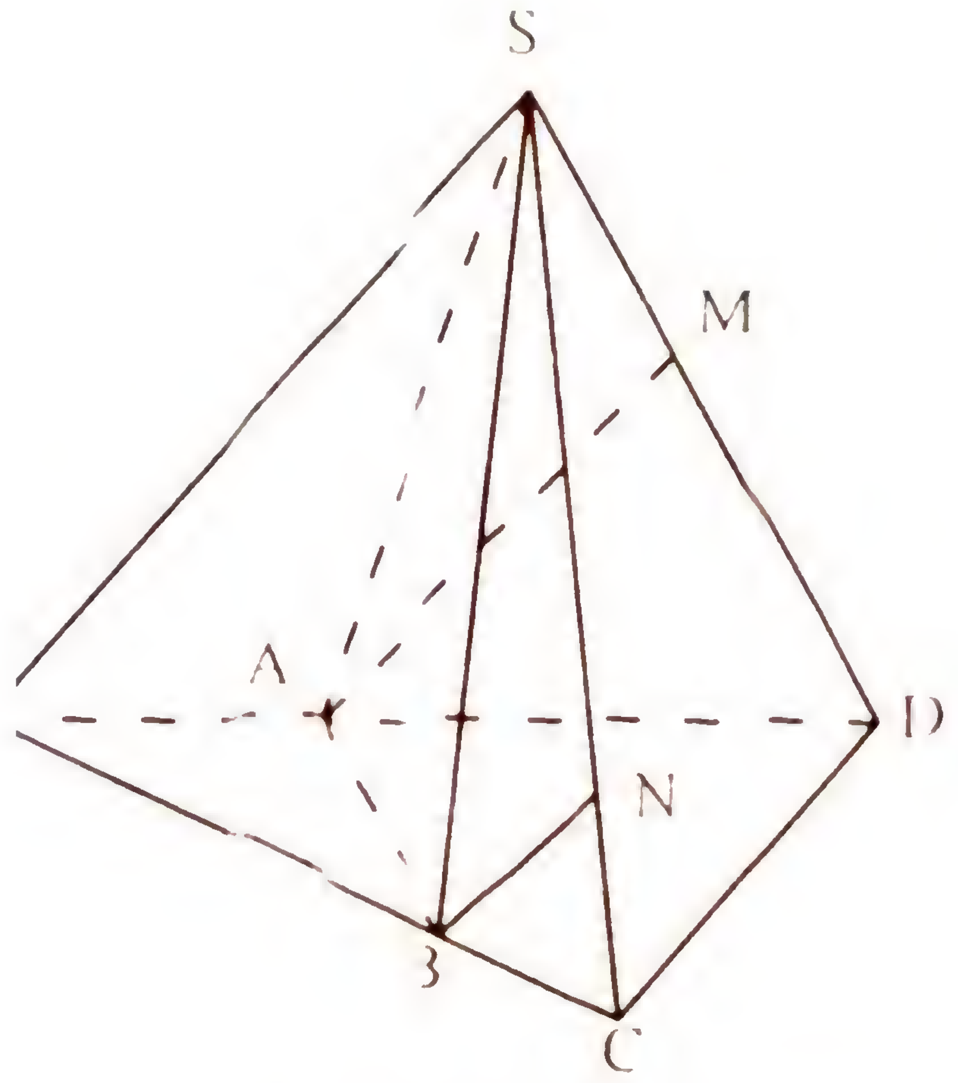
AC = (ABC) ∩ (ACD). Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng, ta suy ra PQ, AC, RS hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Ngược lại, nếu ba đường thẳng PQ, AC, RS hoặc đôi một song song hoặc đồng quy thì hai đường thẳng PQ và RS hoặc song song hoặc cắt nhau. Vậy hai đường thẳng PQ và RS cùng thuộc một mặt phẳng, từ đó bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng.

<u>**Ví dụ 15**</u>: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có AD cắt BC. Hãy tìm điểm M nằm trên cạnh SD và điểm N trên cạnh SC sao cho AM // BN.

**Giải**

Gọi I là giao điểm của BC và AD, khi đó (SAD) ∩ (SBC) = SI.




Giả sử có $M \in SD$, $N \in SC$ sao cho $AM // BN$ thì khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến SI phải song song với AM và BN. Từ đó ta suy ra cách xác định điểm M và N như sau: Từ A trong mp(SAD) ta vẽ đường thẳng song song với SI, cắt SD tại M; từ B trong mp(SBC) ta vẽ đường thẳng song song với SI, cắt SC tại N. Vậy M và N là hai điểm cần tìm.

## DẠNG 2: CHỨNG MINH SONG SONG

• Để chứng minh 2 đường thẳng song song, ta có thể chứng minh:

- Hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Nếu 2 đường thẳng đồng phẳng thì sử dụng định lý Talet, các hình thang, hình bình hành, đường trung bình của tam giác, quan hệ song song và vuông góc, ...
- Hai đường phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Một đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng mà một mặt chứa đường thẳng còn lại và đường thẳng này song song với mặt phẳng thứ hai (giao tuyến song song).
- Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

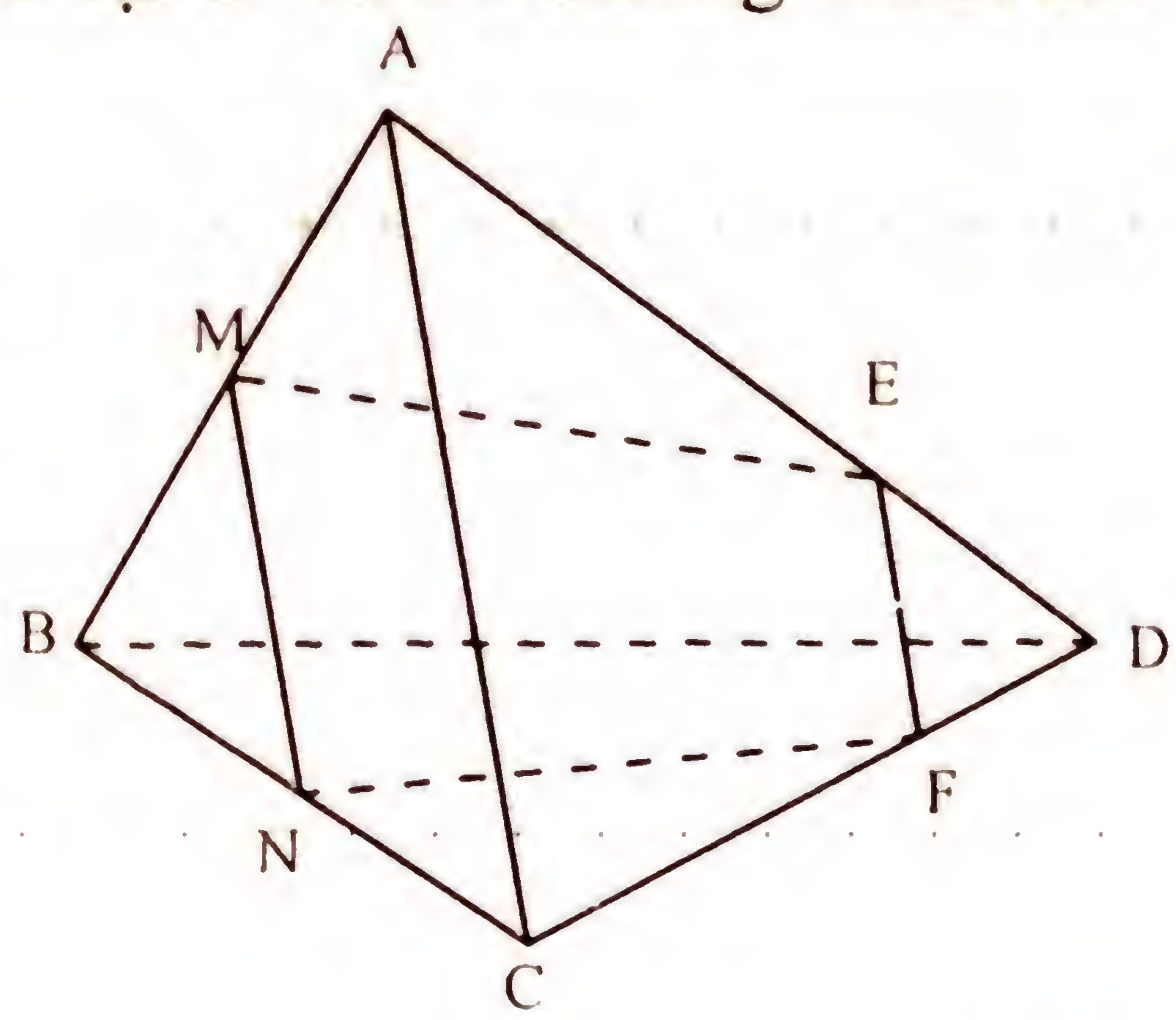
• Để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng ta có thể chứng minh:

- Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
- Đường thẳng nằm ngoài mặt phẳng và song song với một đường thẳng của mặt phẳng.

Chú ý: Từ quan hệ song song ta có thể chứng minh các hệ thức, đánh giá tỉ số.

**Ví dụ 1**: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Mặt phẳng (P) qua M, N cắt cạnh DA, DC tại E và F. Chứng minh EF song song với MN, AC.

**Giải**



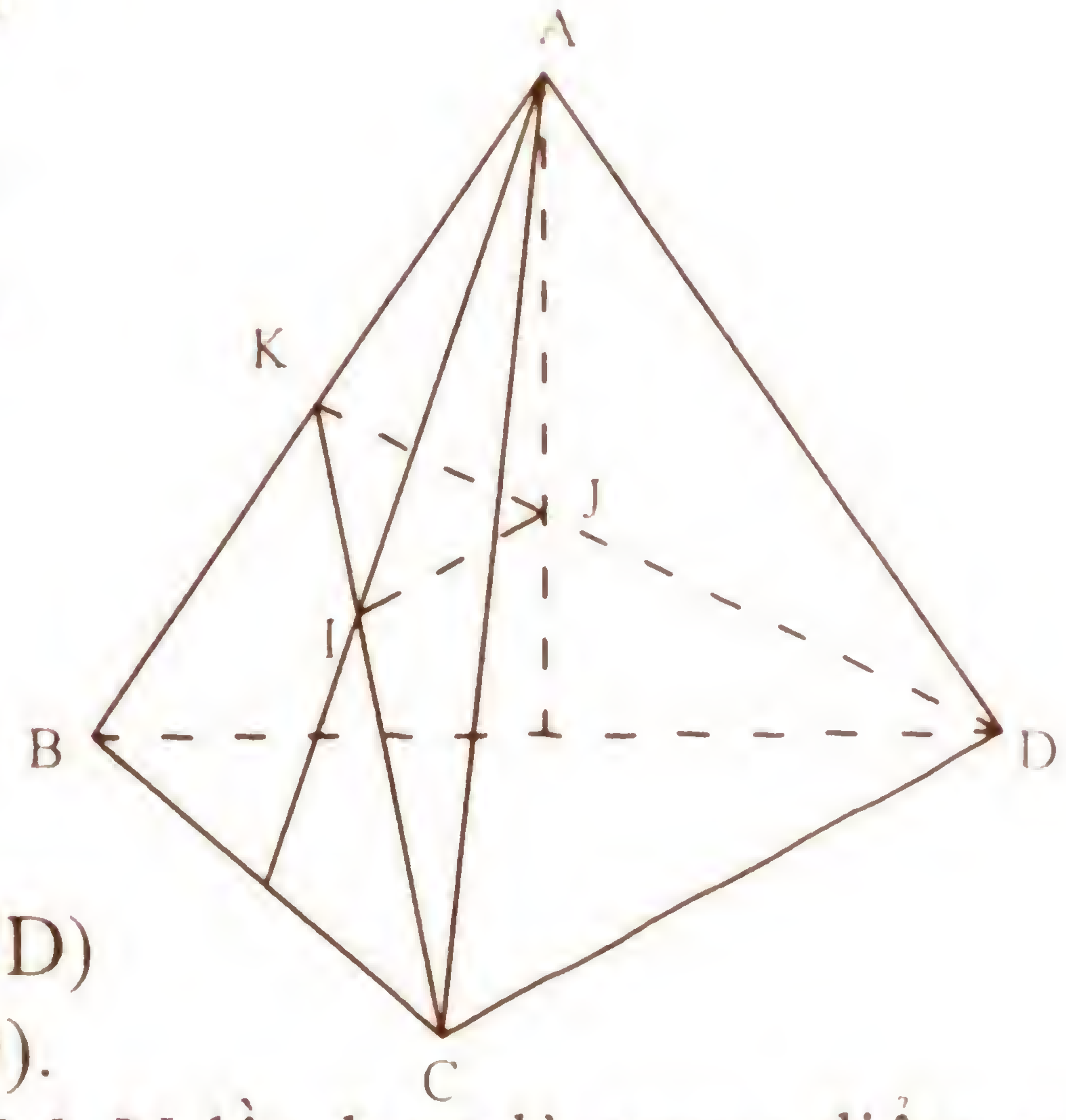

Ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và (P) lần lượt cắt nhau theo các giao tuyến AC, MN và EF phân biệt.

Vì MN // AC (đường trung bình của tam giác ABC) nên theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng đôi một cắt nhau thì EF // MN, AC.

**Ví dụ 2**: Cho tứ diện ABCD có I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chứng minh:

a) IJ // CD.   b) IJ // mp(ACD), (BCD).

**Giải**




a) Gọi K trung điểm của AB.
Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên $I \in KC$ và vì J là trọng tâm của tam giác ABD nên $J \in KD$.
Trong mp(KCD):

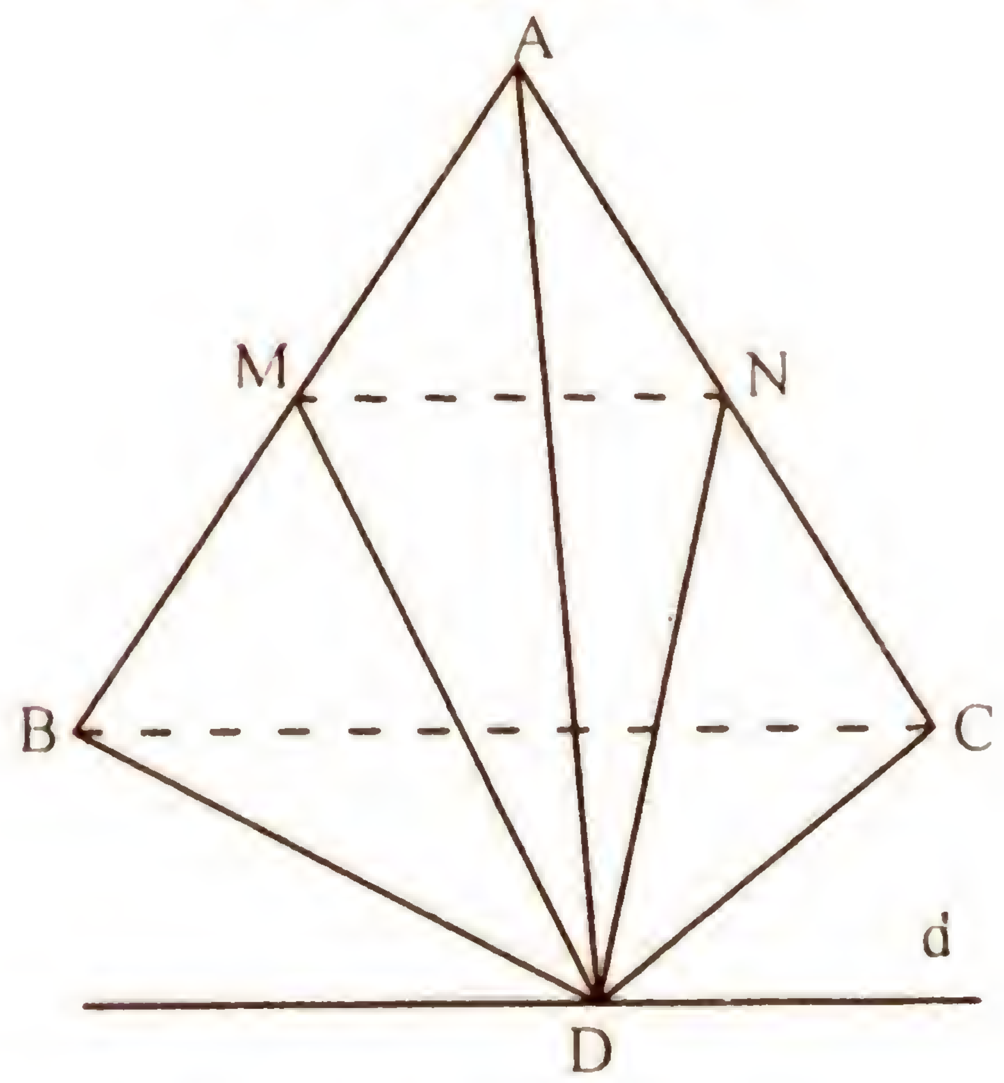
$$\frac{KI}{KC} = \frac{KJ}{KD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel CD.$$

b) Ta có IJ không thuộc mặt phẳng (ACD) và IJ // CD, $CD \subset (ACD)$ nên IJ // (ACD). Tương tự IJ // (BCD).

**Ví dụ 3:** Cho hình tứ diện ABCD Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và mp(BCD).

b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (DBC). Chứng minh d // mp(ABC).



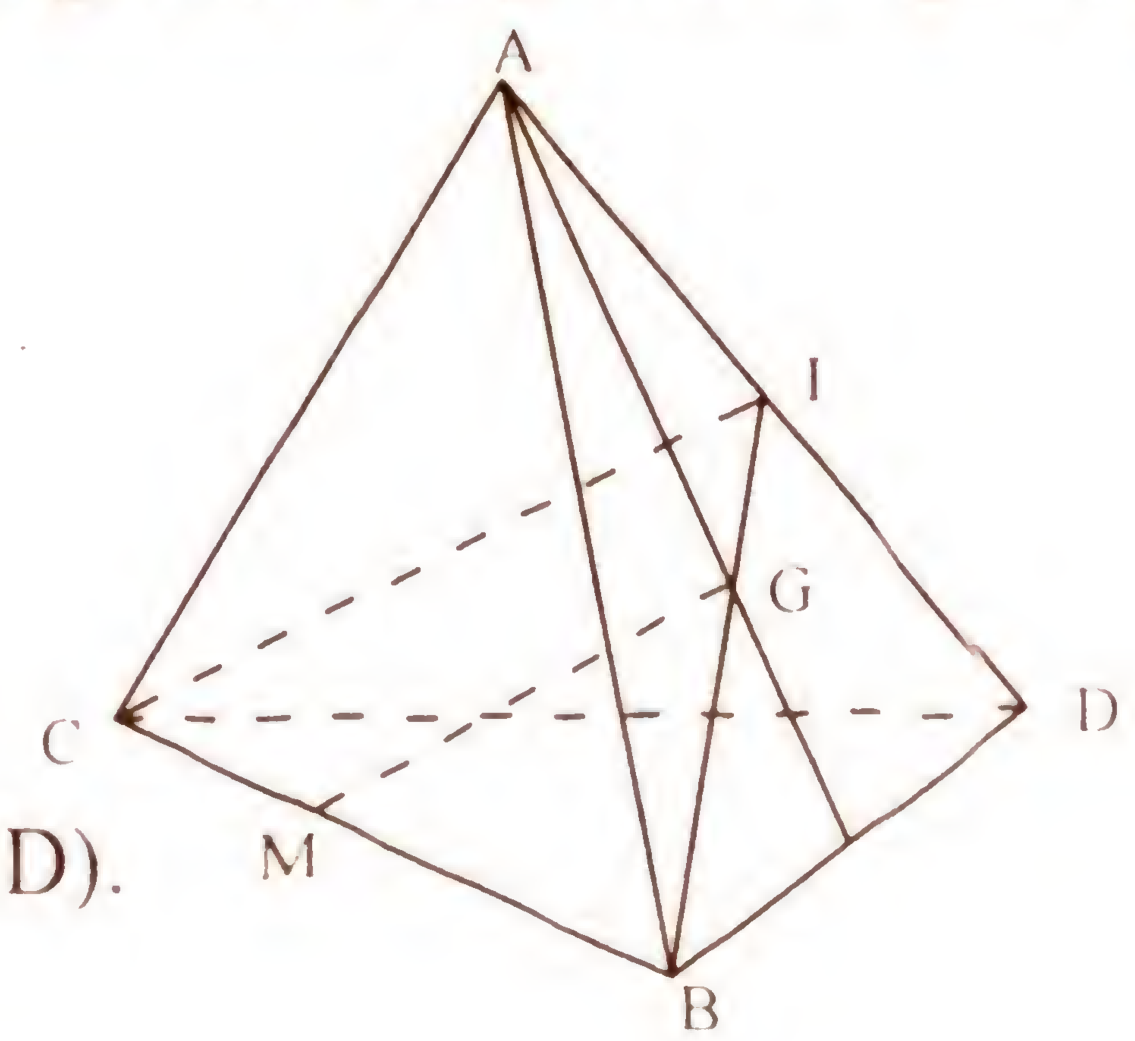

**Giải**

a) MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN // BC.
Ta có MN không thuộc mp(BCD) nên MN // mp(BCD).

b) Vì MN // (BCD) nên mp(DMN) đi qua MN cắt mp(BCD) theo giao tuyến d // MN. Vậy d // mp(ABC).

**Ví dụ 4:** Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho MB = 2MC. Chứng minh rằng MG song song với mp(ACD).

**Giải**




Gọi I là trung điểm AD.
Trong tam giác CBI ta có:

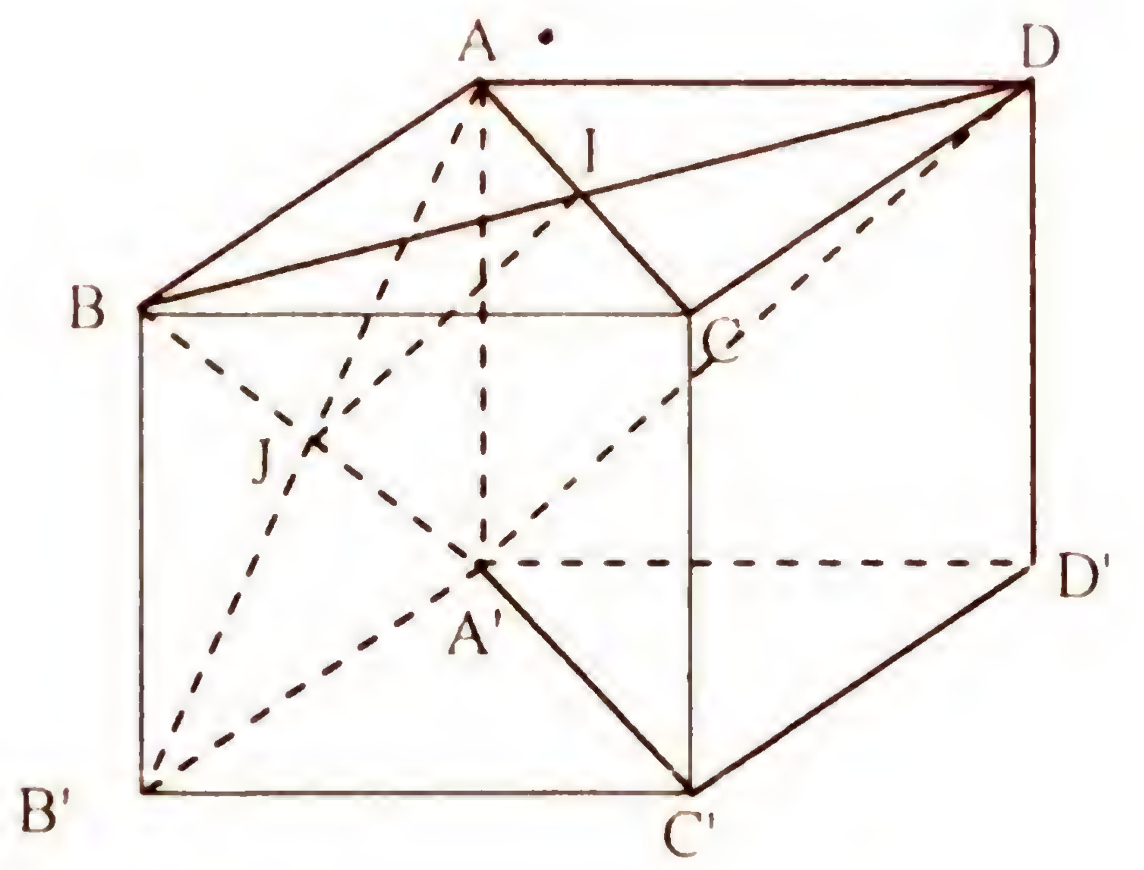
$$\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{BI} = \frac{2}{3} \text{ nên } MG \parallel CI.$$

Vì CI nằm trong mặt phẳng (ACD) và MG không thuộc (ACD) nên MG // (ACD).

**Ví dụ 5**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

a) Chứng minh AC // mp(A'B'C'D').

b) Gọi I và J là 2 tâm của 2 hình vuông ABCD và ABB'A'. Chứng minh IJ // mp(A'B'CD).




**Giải**

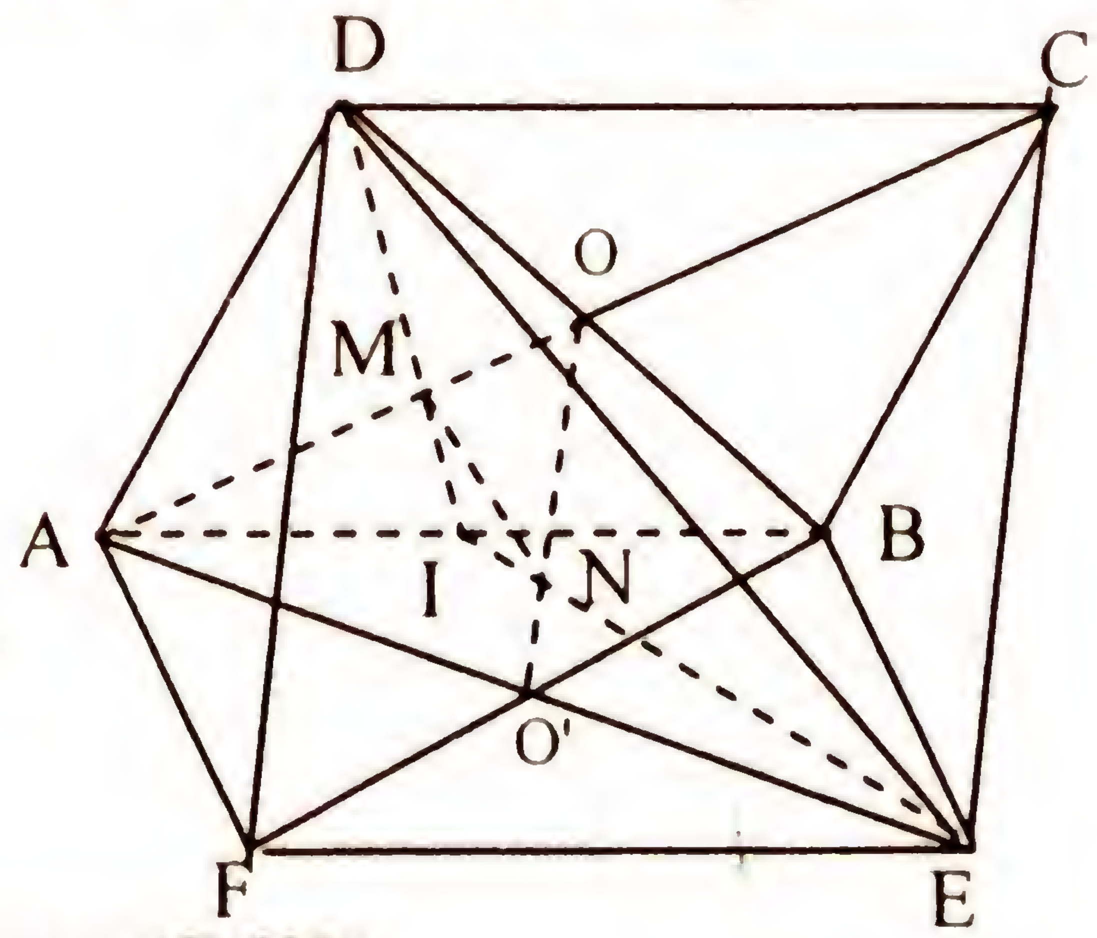
a) AC // A'C' mà đường thẳng A'C' thuộc mp(A'B'C'D') nên AC // mp(A'B'C'D').

b) Tam giác BDA' có đường trung bình IJ // DA' mà đường thẳng IJ không thuộc mp(A'B'CD) nên IJ // mp(A'B'CD).

**Ví dụ 6**: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N là trọng tâm các tam giác ABD và ABE. Chứng minh MN song song với mặt phẳng (CDEF).




**Giải**

a) Ta có: OO' // DF, nên: OO' // (ADF).
Tương tự: OO' // CE nên OO' // (BCE)

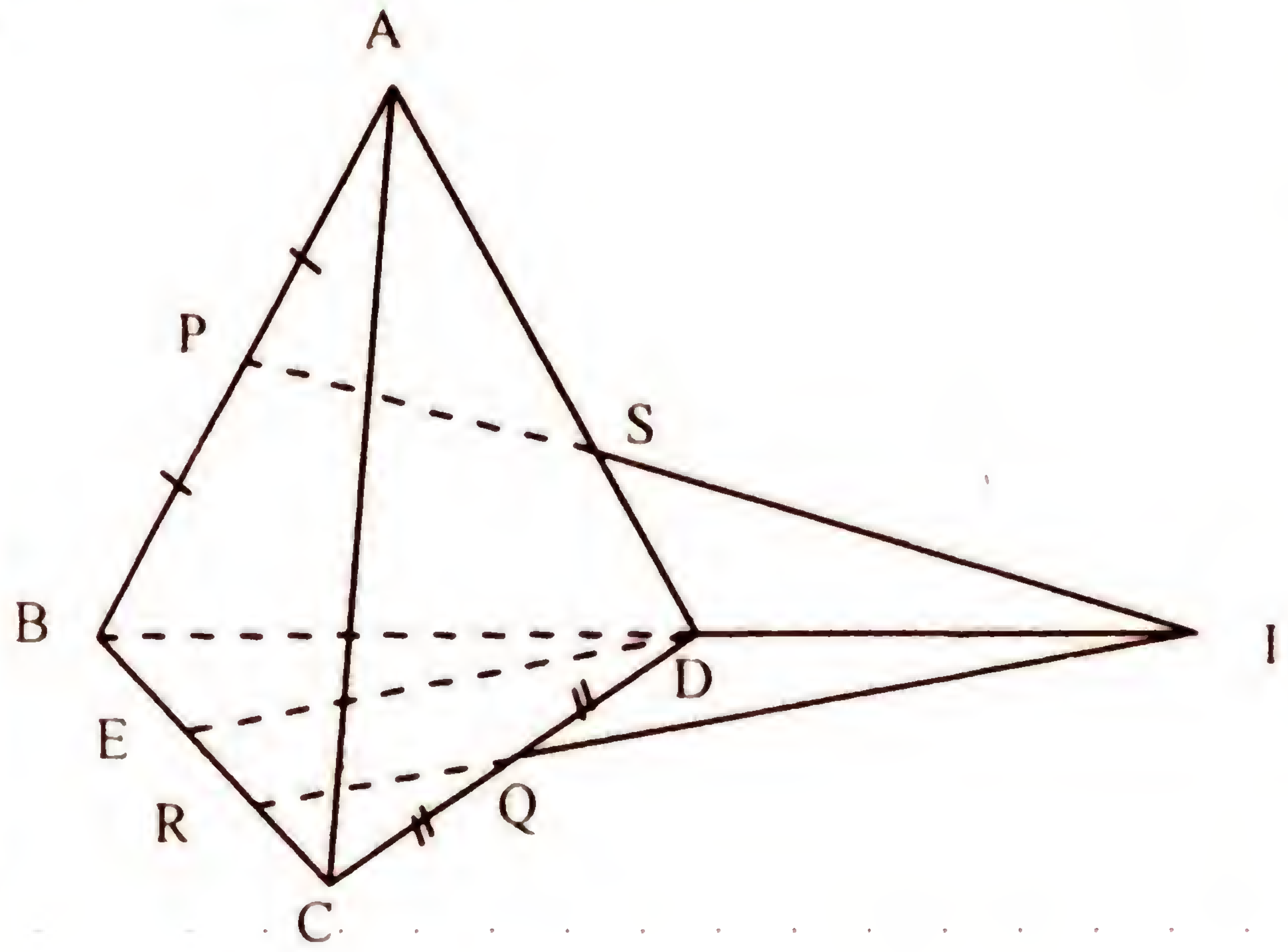
b) Gọi I là trung điểm của AB.
Trong mp(IDE), vì M, N, là trọng tâm nên:
$\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN // DE.$
Vì MN không nằm trong (CDEF) nên MN // (CDEF).

**Ví dụ 7**: Cho tứ diện ABCD. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mp(PQR) và cạnh AD. Chứng minh rằng AS = 2SD.

**Giải**

Gọi I là giao điểm của RQ và BD; E là trung điểm của BR.
Khi đó EB = ER = RC và RQ // ED.
Tam giác BRI có:
ED // RQ,
suy ra: $\dfrac{BD}{DI} = \dfrac{BE}{ER} = 1$

Do đó DB = DI nên AD và IP là hai đường trung tuyến của tam giác ABI nên giao điểm S của AD và IP là trọng tâm của tam giác ABI và ta có AS = 2SD.

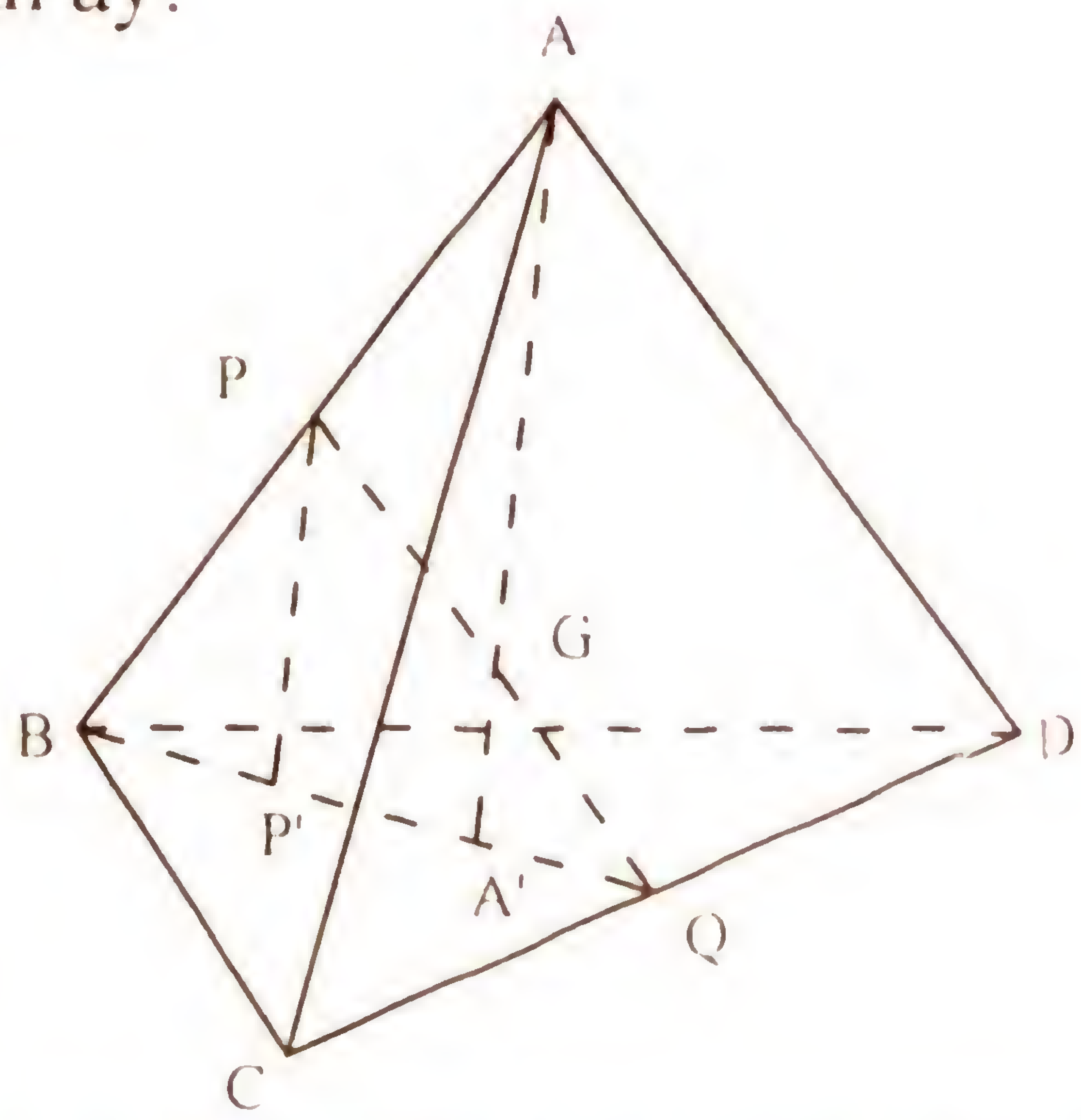


**Ví dụ 8:** Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.

b) Gọi A' là trọng tâm của mặt BCD. Chứng minh rằng GA = 3GA'.

**Giải**




a) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD thì trọng tâm G của tứ diện ABCD là trung điểm của PQ.

Giả sử đường thẳng AG cắt mp(BCD) tại A'. Ta chứng minh A' là trọng tâm tam giác BCD. Ta có A' thuộc đường trung tuyến BQ của tam giác BCD.

Từ P ta vẽ PP' // AA' ($P' \in BQ$) thì PP' là đường trung bình của tam giác ABA', còn GA' là đường trung bình của tam giác QPP', do đó AA' = 2PP', PP' = 2GA' và BP' = P'A' = A'Q.

Vậy A' là trọng tâm tam giác BCD.

b) Ta có AA' = 4GA' nên GA = 3GA'.

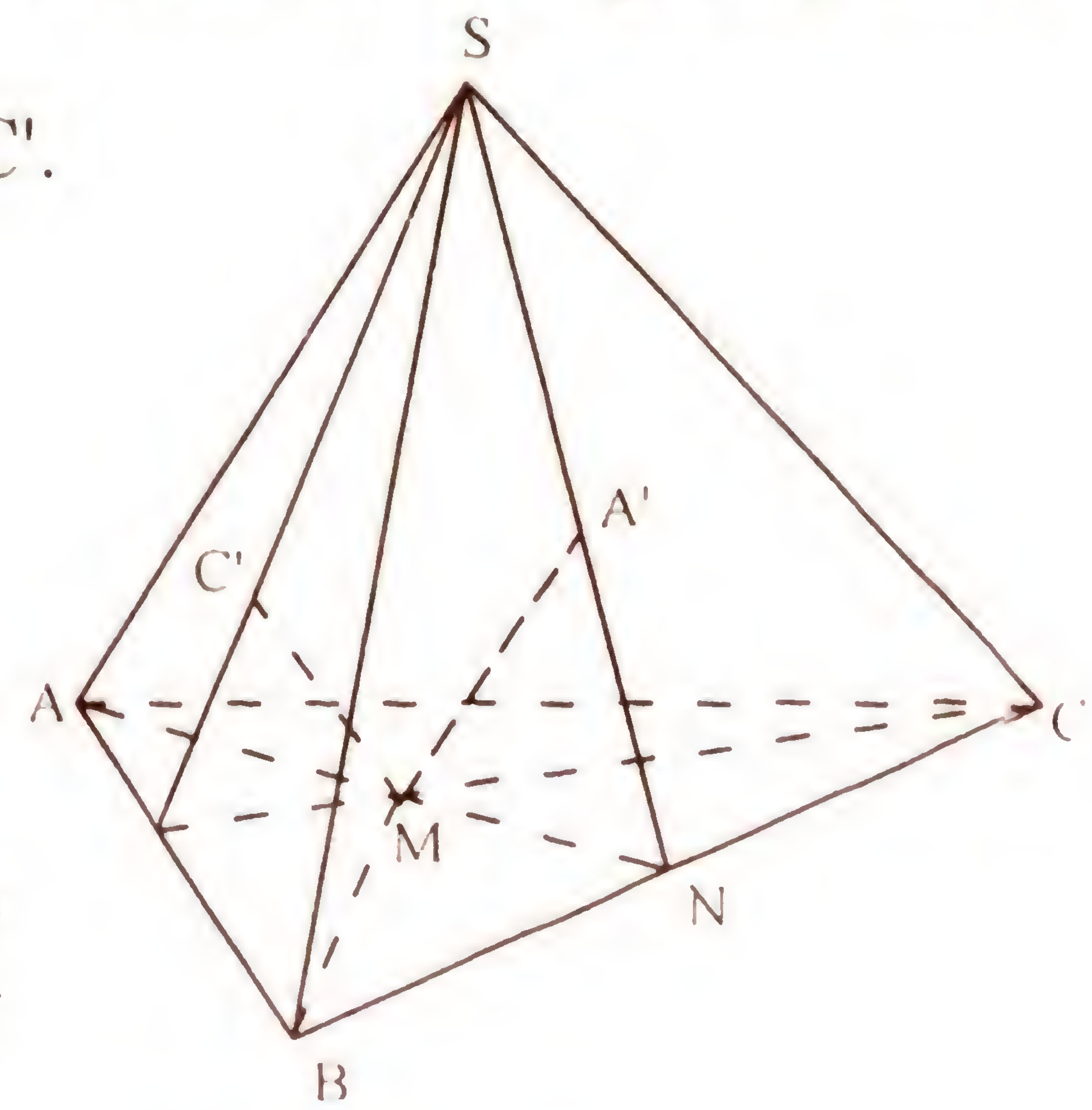
**Ví dụ 9**: Cho hình chóp S.ABC và một điểm M nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M lần lượt song song với các đường thẳng SA, SB, SC cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) tại A', B', C'.

Chứng minh rằng $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = 1$.

**Giải**

Kéo dài AM cắt BC tại N. Trong mp(SAN) kẻ MA' song song với SA cắt SN tại A'. Điểm A' là điểm cần tìm.

Tương tự xác định được các điểm B', C'.




Ta có: $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MN}{AN}$

mà $\dfrac{MN}{AN} = \dfrac{MA'}{SA}$

Do đó $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MA'}{SA}$

Tương tự : $\dfrac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = \dfrac{MB'}{SB}, \dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{MC'}{SC}$

Vậy : $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$.

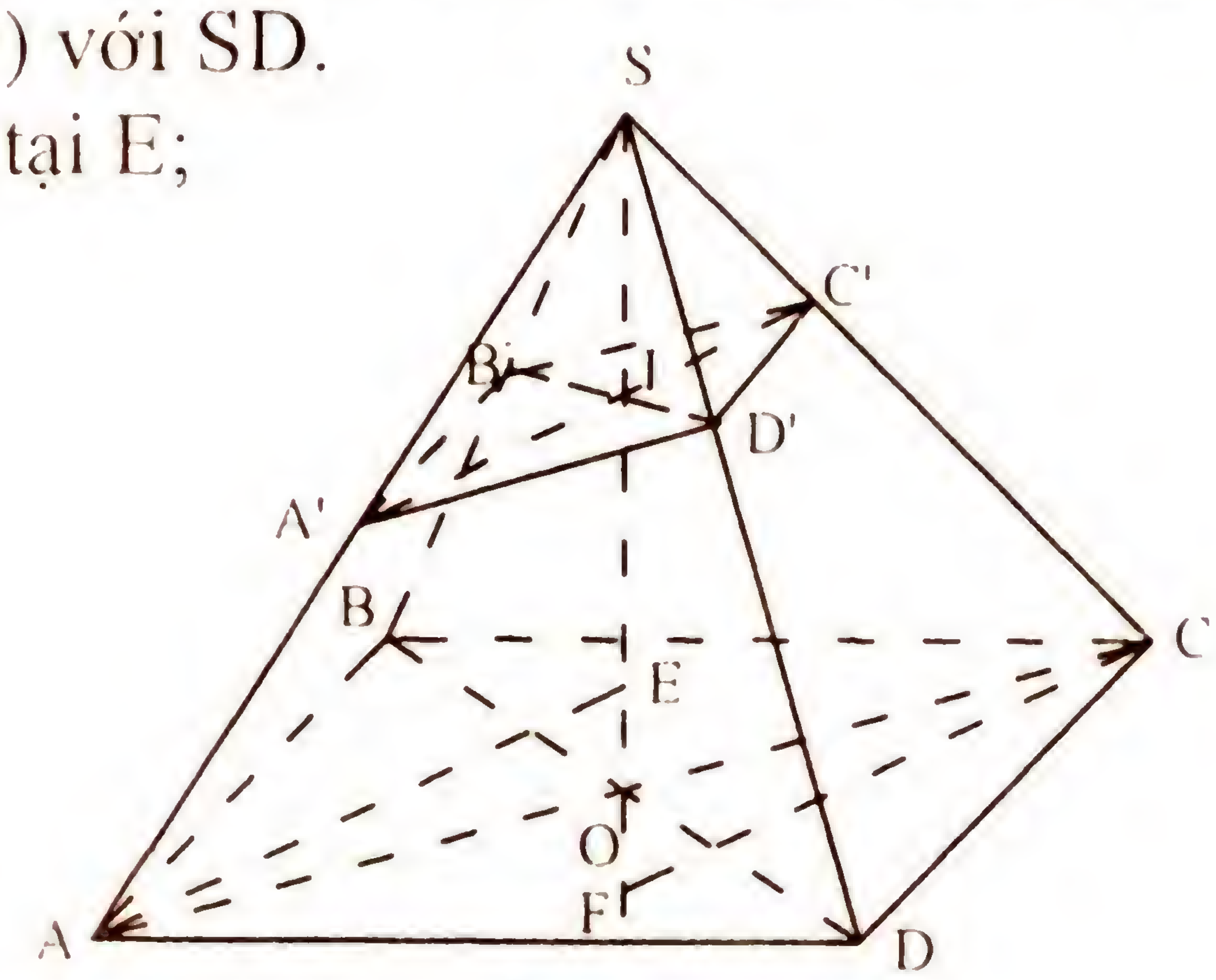
**Ví dụ 10:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD; I là giao điểm của A'C' và SO.

a) Tìm giao điểm D' của mp(P) với cạnh SD.

b) Chứng minh rằng $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

**Giải**

a) Trong mp(SAC), A'C' cắt SO tại I. Trong mp(SBD), B'I cắt SD tại D'. Khi đó D' chính là giao điểm của mp(P) với SD.




b) Trong mp(SAC), vẽ AE // A'C' cắt SO tại E; vẽ CF // A'C' cắt SO tại F.

Ta có: $\frac{SA}{SA'} = \frac{SE}{SI} = \frac{SO - OE}{SI}$

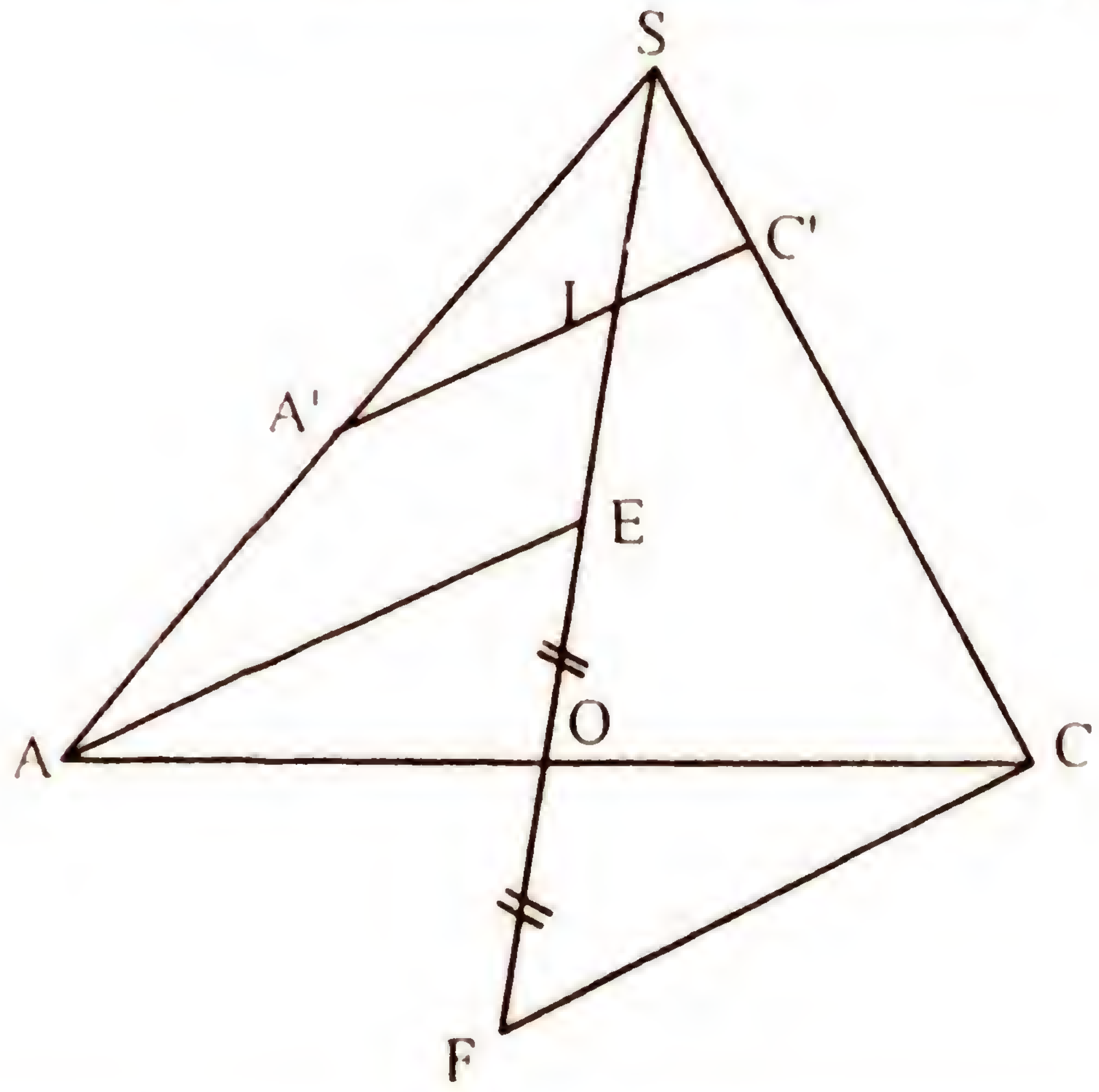
$\frac{SC}{SC'} = \frac{SF}{SI} = \frac{SO + OF}{SI}$

Vì O là trung điểm của AC và AE // CF, nên OE = OF.

Suy ra : $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2SO}{SI}$

Tương tự: $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SI}$

Vậy : $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$




## DẠNG 3: GIAO TUYẾN VÀ THIẾT DIỆN SONG SONG

• Giao tuyến song song:

- Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
- Cho đường thẳng song song với mặt phẳng. Nếu có mặt phẳng chứa đường thẳng này và cắt mặt phẳng thì giao tuyến song song với đường thẳng đã cho.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với ít nhất một trong hai đường thẳng đó.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.

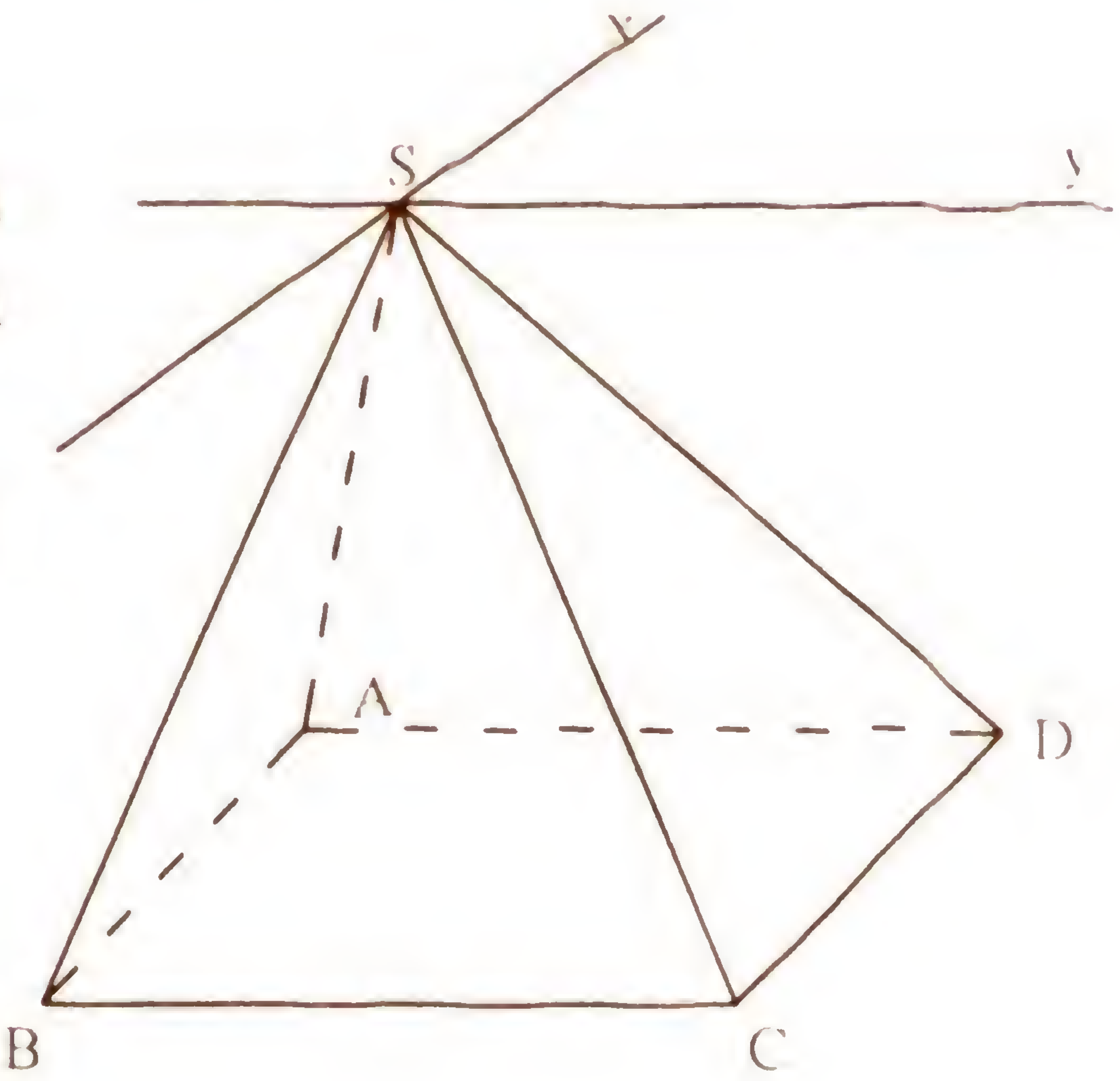
• Thiết diện song song:

Sử dụng các tính chất và kết quả về giao tuyến song song ở trên để tìm các đỉnh và các cạnh của thiết diện.

Chú ý: Sử dụng mặt phẳng phụ và các kỹ thuật đã nêu: cắt nhau hoặc kéo dài cắt nhau, đường gióng, giao tuyến gốc và quan hệ đề bài cho.

**Ví dụ 1**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (SAB) và (SCD) b) (SAD) và (SBC).




**Giải**

a) S là điểm chung của 2 mp(SAB) và (SCD). Gọi giao tuyến của (SAB) và (SCD) là Sx.

Vì AB // CD, AB ⊂ (SAB), CD ⊂ (SCD) nên mặt phẳng (SAB) cắt mp(SCD) theo giao tuyến Sx // AB, CD.

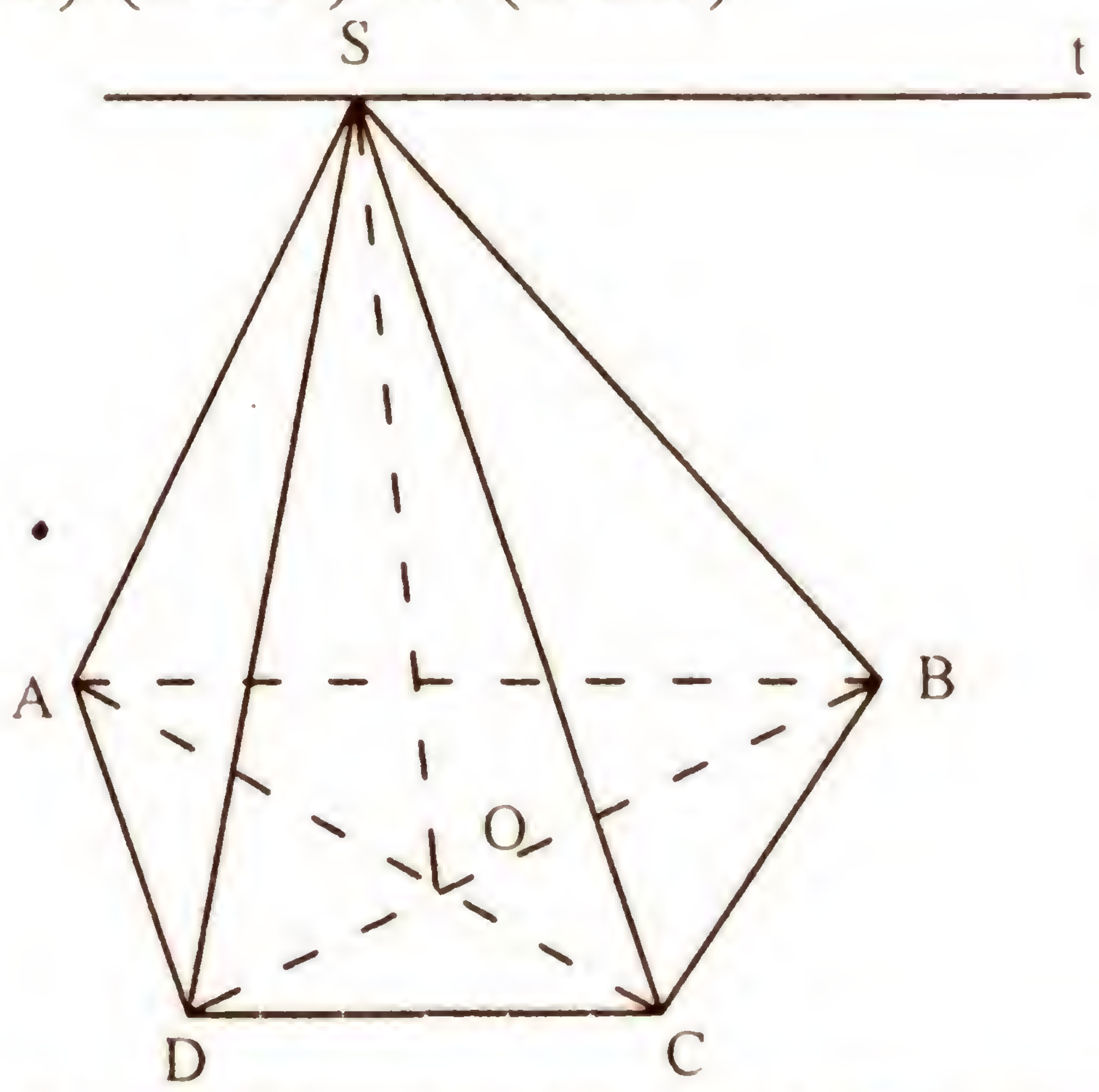
b) Vẽ Sy // AD thì Sy ⊂ mp(SAD)

Vì BC // AD nên Sy // BC, do đó Sy ⊂ mp(SBC).

Vậy (SAD) ∩ (SBC) = Sy.

**Ví dụ 2**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, AB // CD. Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD) b) (SAB) và (SCD).




**Giải**

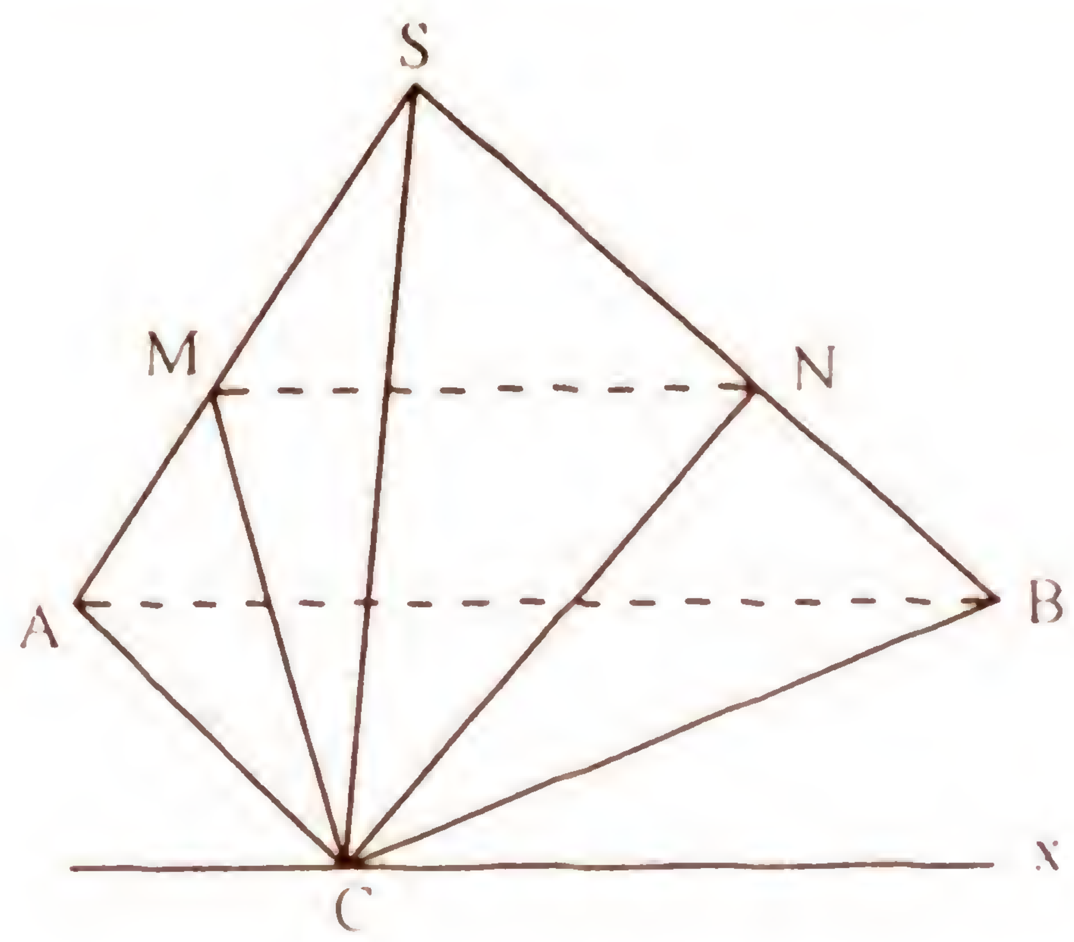
a) Trong mp(ABCD), AC ∩ BD = O thì S và O là 2 điểm chung của 2 mp(SAC), (SBO) nên giao tuyến của chúng là SO.

b) Ba mặt phẳng (SAB), (SCD), (ABCD) cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt AB, DC, St.

Vì AB // DC nên St // AB, DC.

**Ví dụ 3**: Cho tứ diện SABC. Trên 2 cạnh SA, SB lần lượt lấy M, N sao cho MS = 2MA, NS = 2NB. Xác định giao tuyến của 2 mp(ABC) và mp(CMN).

**Giải**



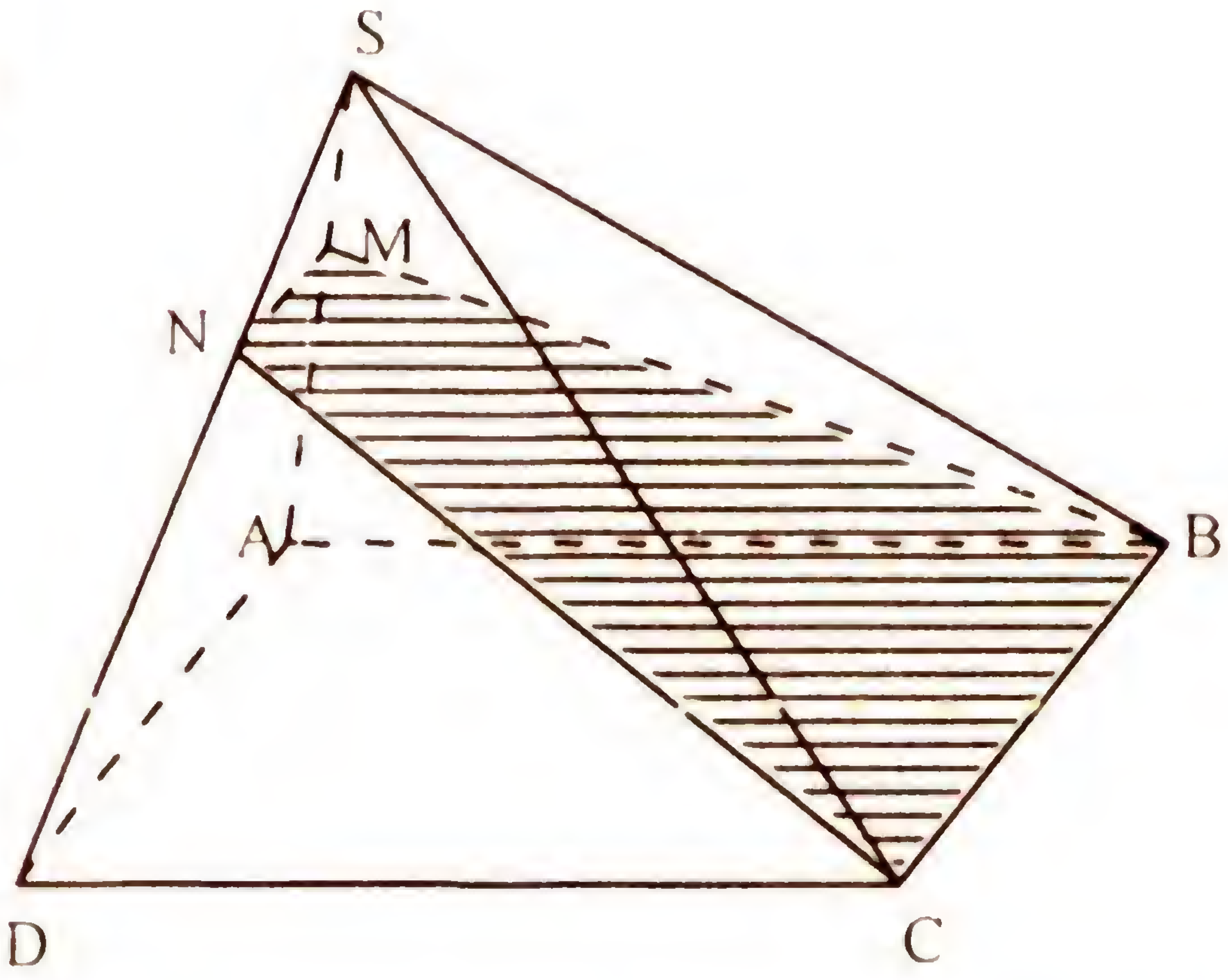

Trong mp(SAB): $\frac{MS}{MA} = 2 = \frac{NS}{NB}$

nên MN // AB.

Do đó mp(CMN) chứa MN cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến Cx // AB.

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (MBC).

**Giải**

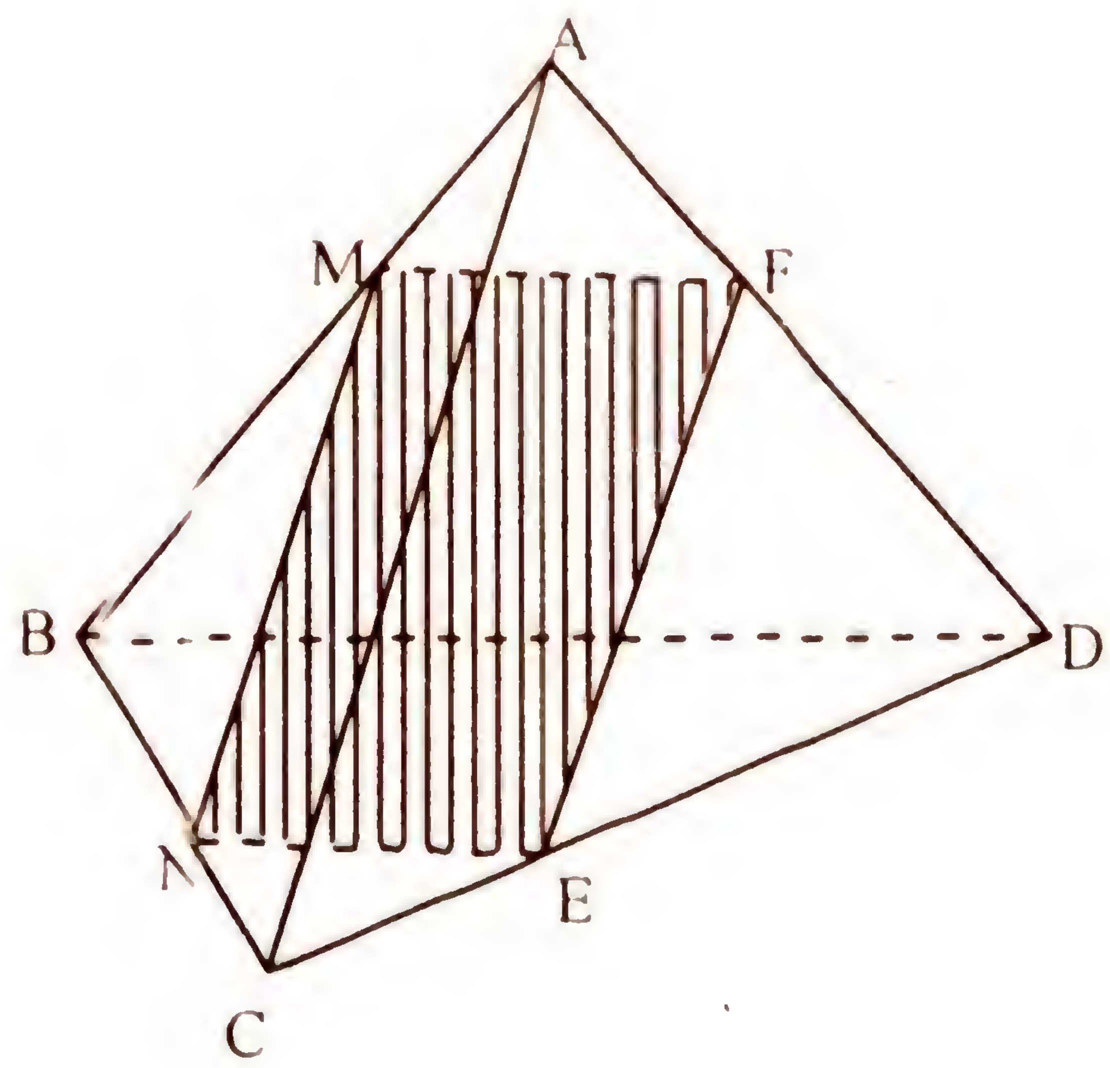



Ta có mp(MBC) và mp(SAD), lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD và có điểm chung M nên giao tuyến là đường thẳng MN song song với AD ($N \in SD$).

Vậy thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mp(MBC) là hình thang MNCB.

**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh AB khác A và B. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua M song song với các đường thẳng AC và BD. Chứng minh thiết diện là hình bình hành.

**Giải**



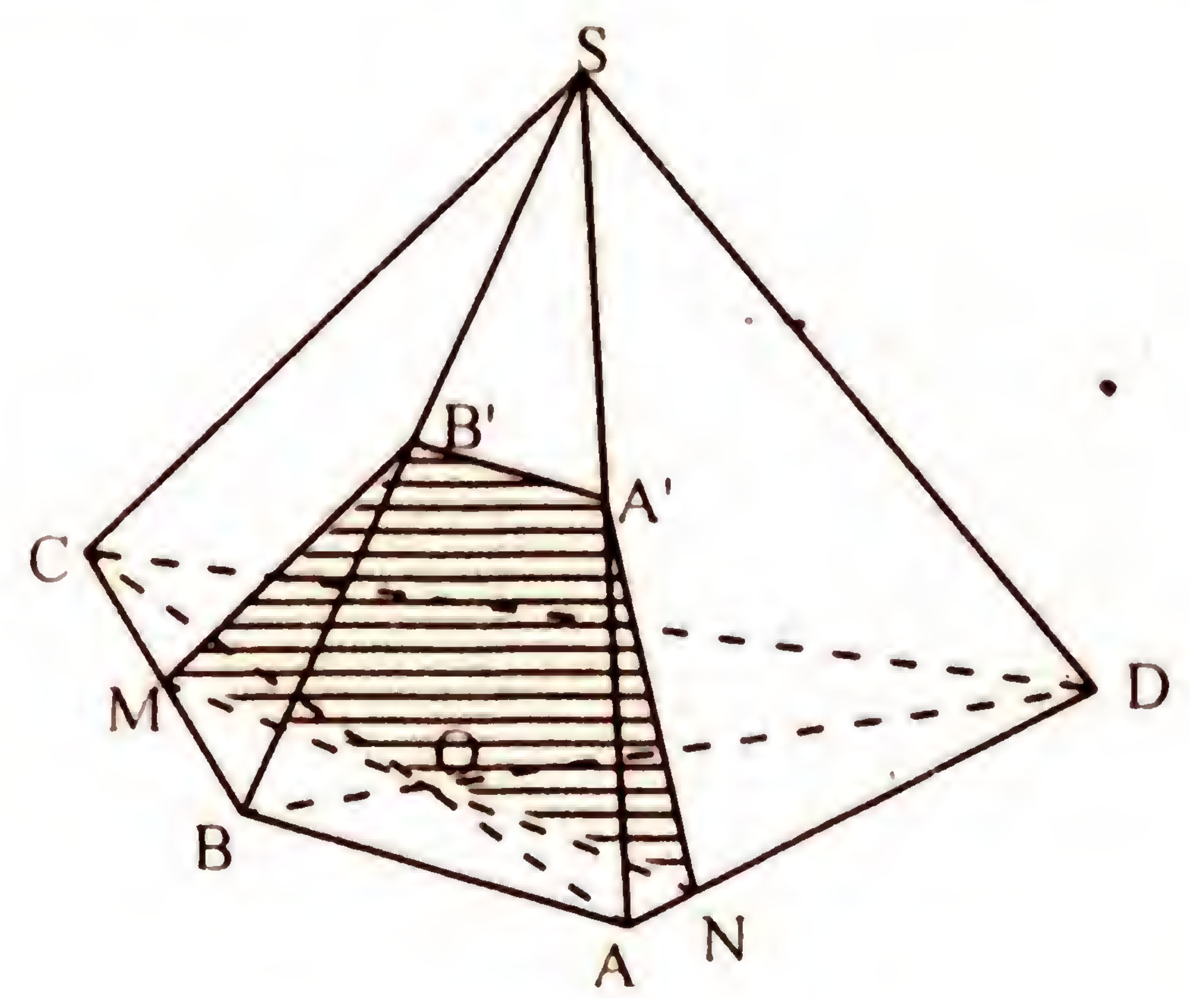

Từ M vẽ đường thẳng song song với AC cắt BC tại N và vẽ đường thẳng song song với BD cắt AD tại F. Do đó (P) chính là mp(MNF).

Gọi E là giao điểm của (P) với CD thì thiết diện là tứ giác MNEF. Vì đường thẳng MN song song với mp(ACD) nên mp(P) qua MN cắt mp(ACD)

theo giao tuyến EF song song với MN. Tương tự, giao tuyến NE song song với MF. Vậy thiết diện là hình bình hành MNEF.

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì?

**Giải**



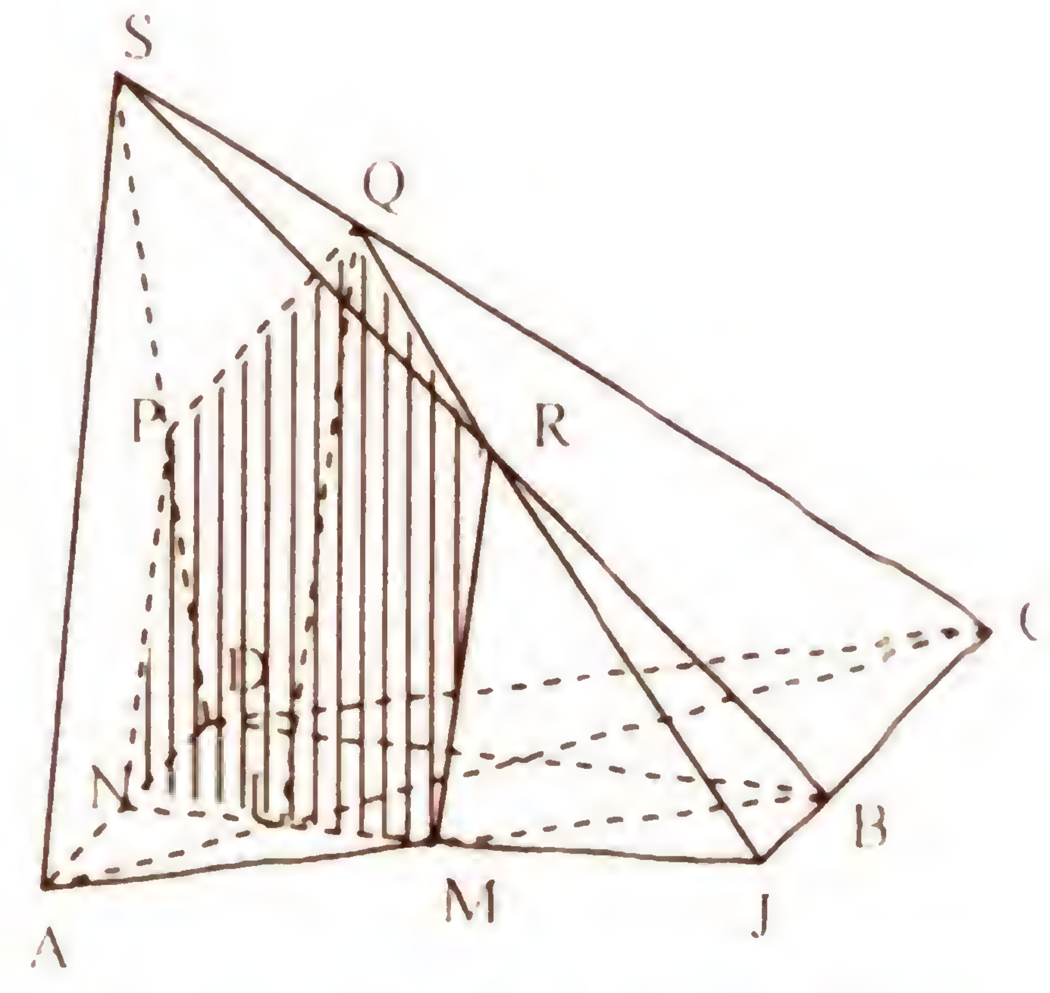

Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, cắt BC và AD tại M và N. Từ M vẽ đường thẳng song song với SC, cắt SB tại B'. Từ B' vẽ đường thẳng song song với BA cắt SA tại A'.

Ta có MN // B'A' nên thiết diện là hình thang A'B'MN.

ABC

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.

**Giải**

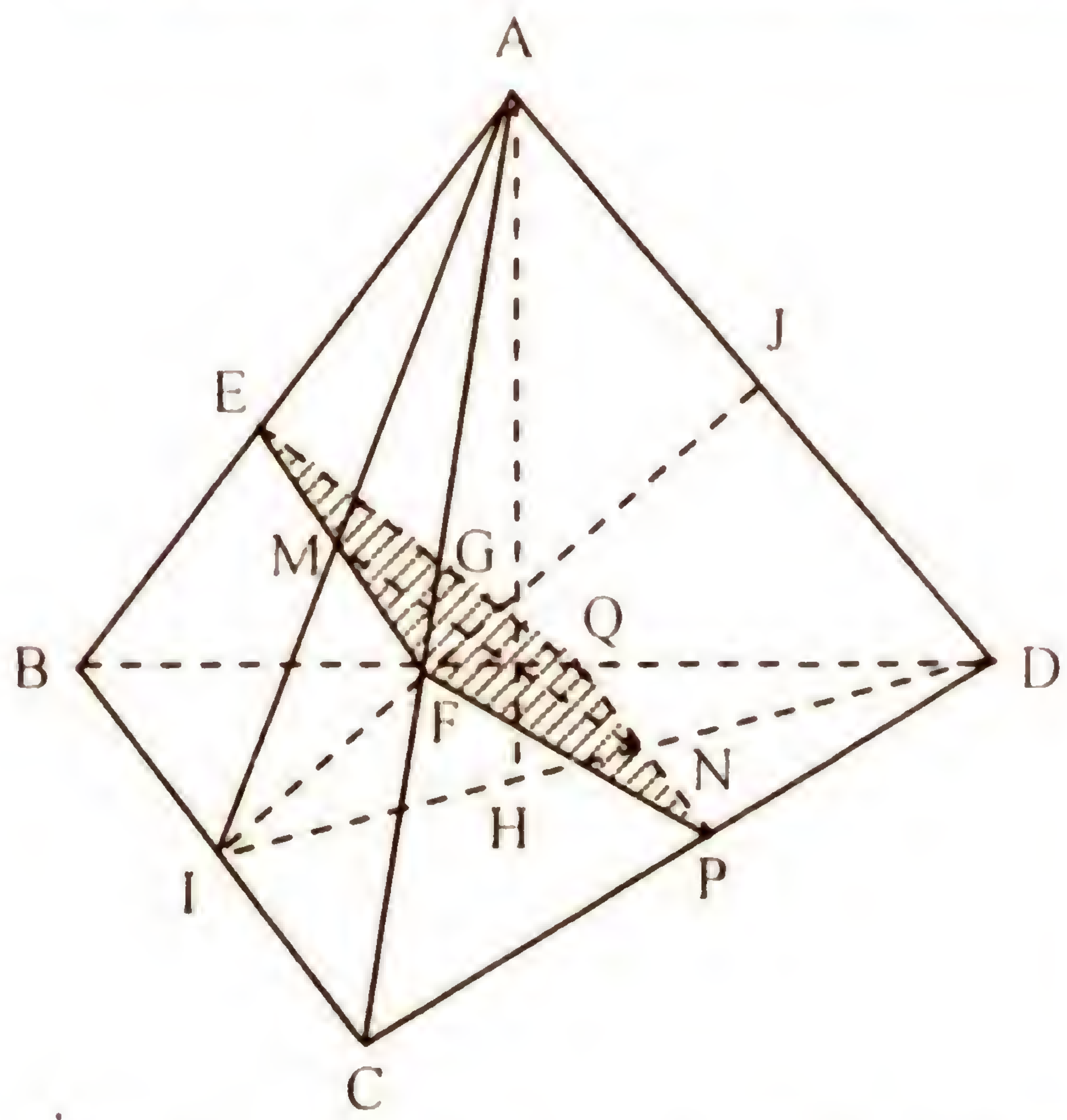



Qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt AD tại N và cắt AC tại I. Qua M, I, N vẽ các đường thẳng song song với SA lần lượt cắt SB, SC, SD tại R, Q, P.

Thiết diện là ngũ giác MNPQR.

Cách khác: Tìm giao điểm Q của mặt phẳng cắt với cạnh SC bằng cách nối giao điểm J của MN và BC với R và kéo dài cắt SC tại Q.

**Ví dụ 8**: Cho tứ diện ABCD. Vẽ thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trọng tâm của tứ diện và song song với BC, AD.




**Giải**

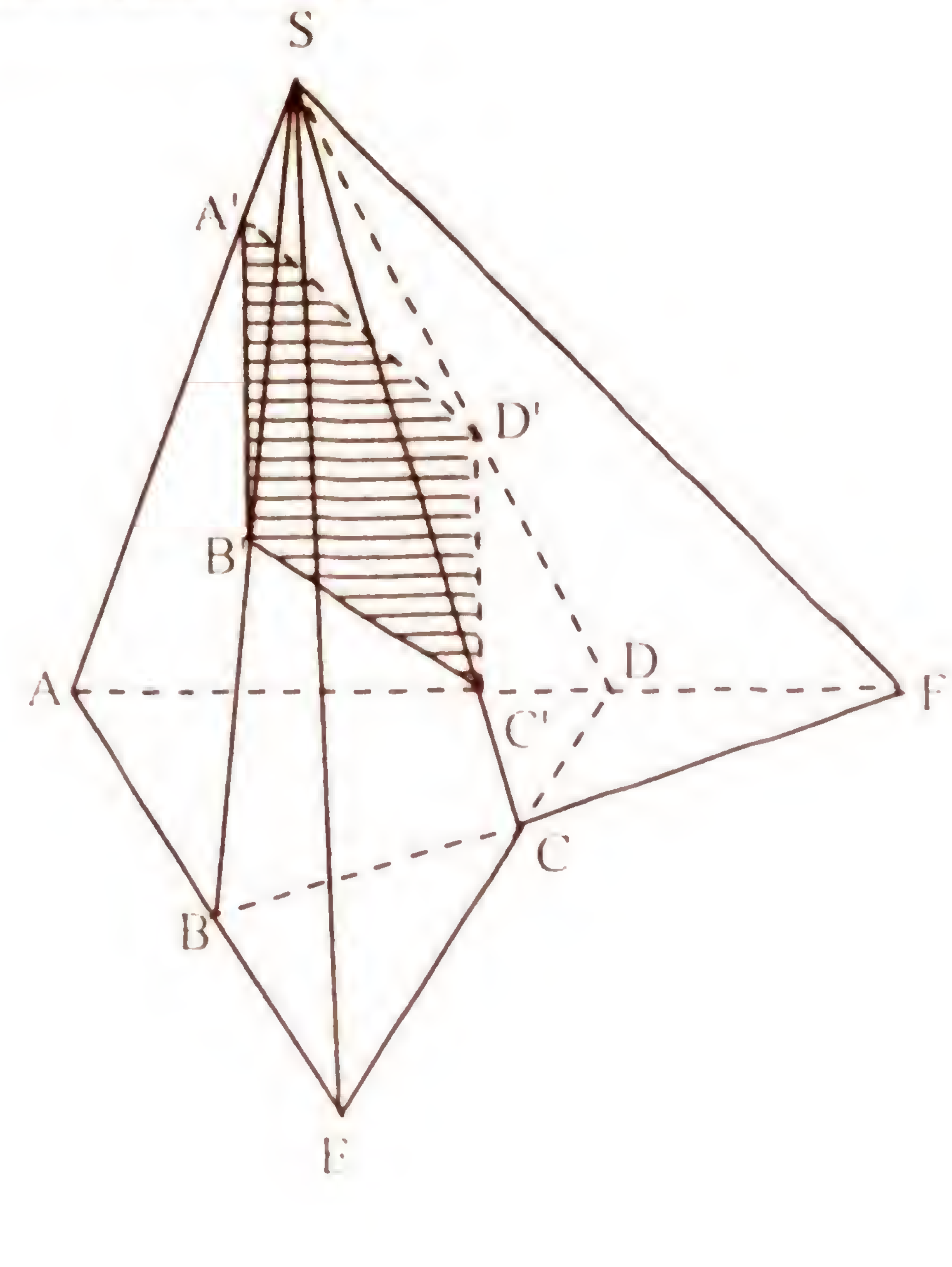
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD thì trung điểm G của IJ là trọng tâm của tứ diện ABCD. Theo tính chất giao tuyến song song, qua G vẽ đường thẳng MN // AD ($M \in AI$, $N \in DI$). Qua M vẽ đường thẳng EF // BC ($E \in AB$, $F \in AC$) và qua N vẽ đường thẳng PQ // BC ($P \in CD$, $Q \in BD$). Hình bình hành EFPQ là thiết diện cần dựng.

**Ví dụ 9**: Cho hình chóp S.ABCD, tứ giác đáy có các cạnh đối AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'.

Tìm điều kiện của mp$(\alpha)$ để thiết diện A'B'C'D' là:

a) Hình thang? b) Hình bình hành?

**Giải**




Ta có (SAB) $\cap$ (SCD) = SE,

(SAD) $\cap$ (SBC) = SF

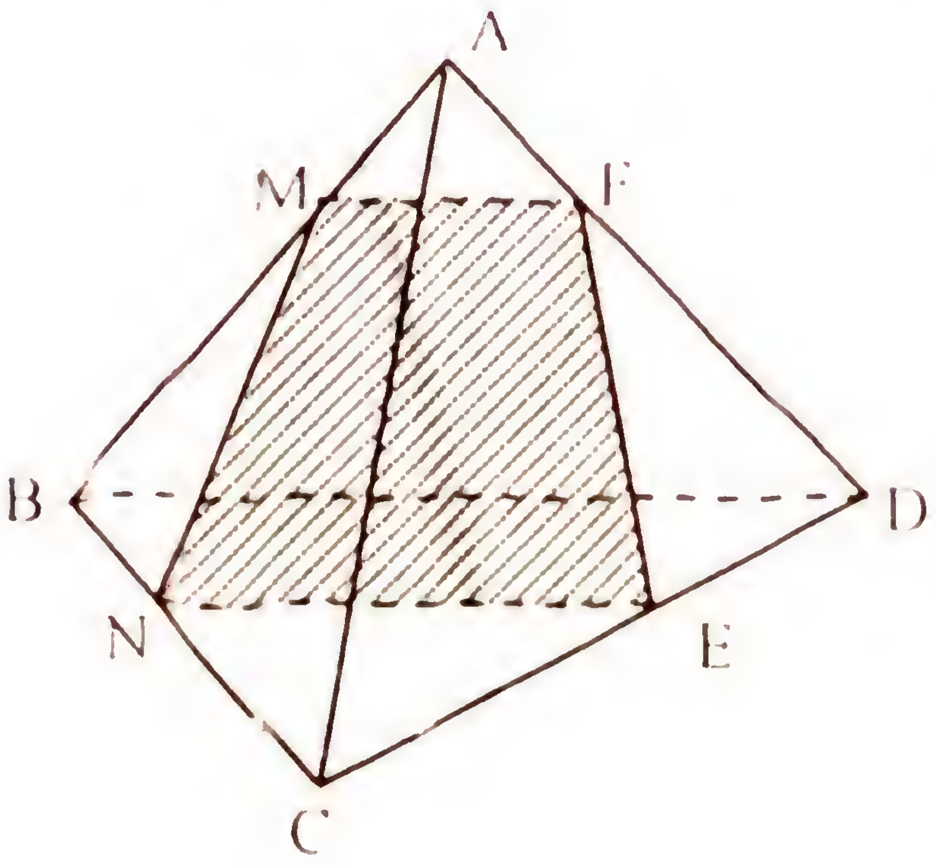
a) Thiết diện A'B'C'D' là hình thang
$\Leftrightarrow$ A'B' // C'D' hoặc A'D' // B'C'.
$\Leftrightarrow$ $(\alpha)$ song song SD hoặc SF.

b) Thiết diện A'B'C'D' là hình bình hành
$\Leftrightarrow$ A'B' // C'D' và A'B' // B'C'
$\Leftrightarrow$ $(\alpha)$ song song với SE và SF.

**Ví dụ 10:** Nêu cách cắt tứ diện ABCD bằng một mặt phẳng để thiết diện là:

a) Hình thang  b) Hình bình hành  c) Hình thoi.

**Giải**



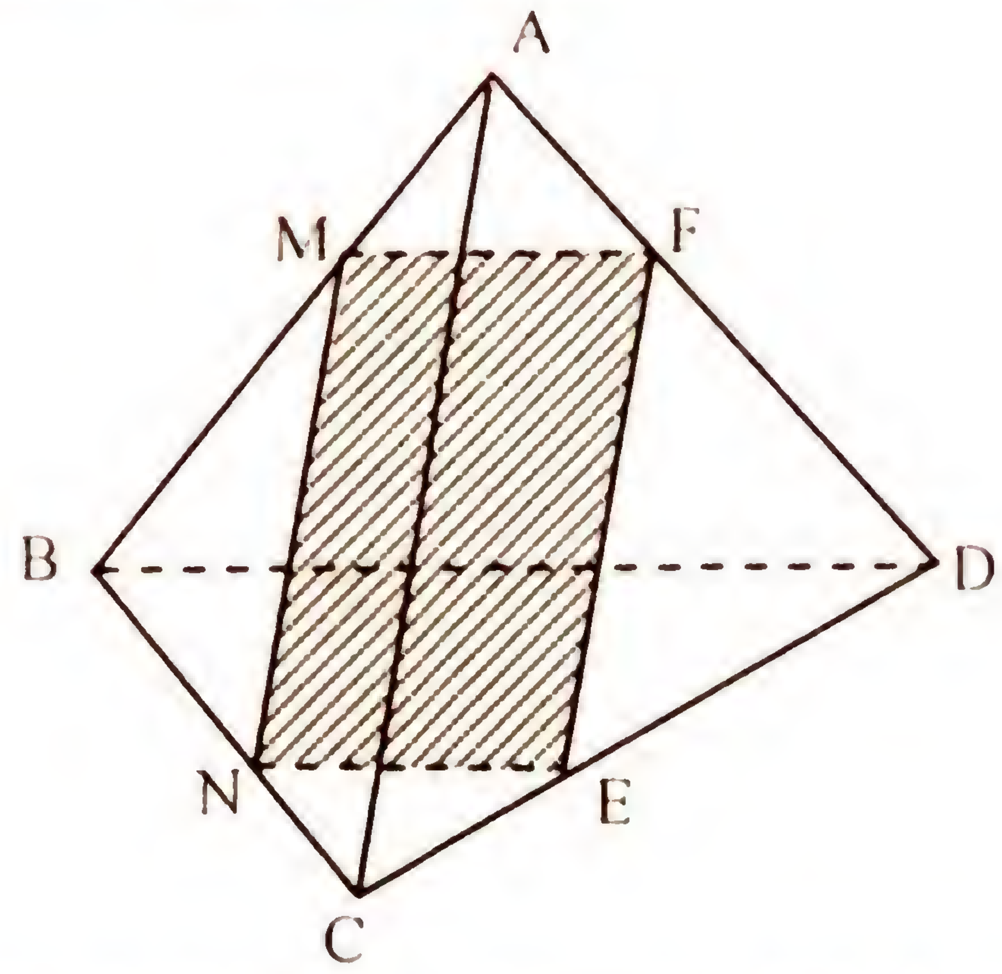

a) Chọn mặt phẳng đi qua M, N là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh AB, BC và song song với BD thì thiết diện là hình thang MNEF.

b) Chọn mặt phẳng qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với hai đường thẳng BD và AC thì thiết diện là hình bình hành MNEF.

c) Ta tìm điều kiện để thiết diện hình bình hành MNEF trong câu b) là hình thoi.

Ta có: $\dfrac{MF}{BD} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MF = \dfrac{BD.AM}{AB}$

$\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{AC.MB}{AB}$




Tứ giác MNEF là hình thoi

$\Leftrightarrow MF = MN \Leftrightarrow BD.AM = AC.MB$

$\Leftrightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{BD}$

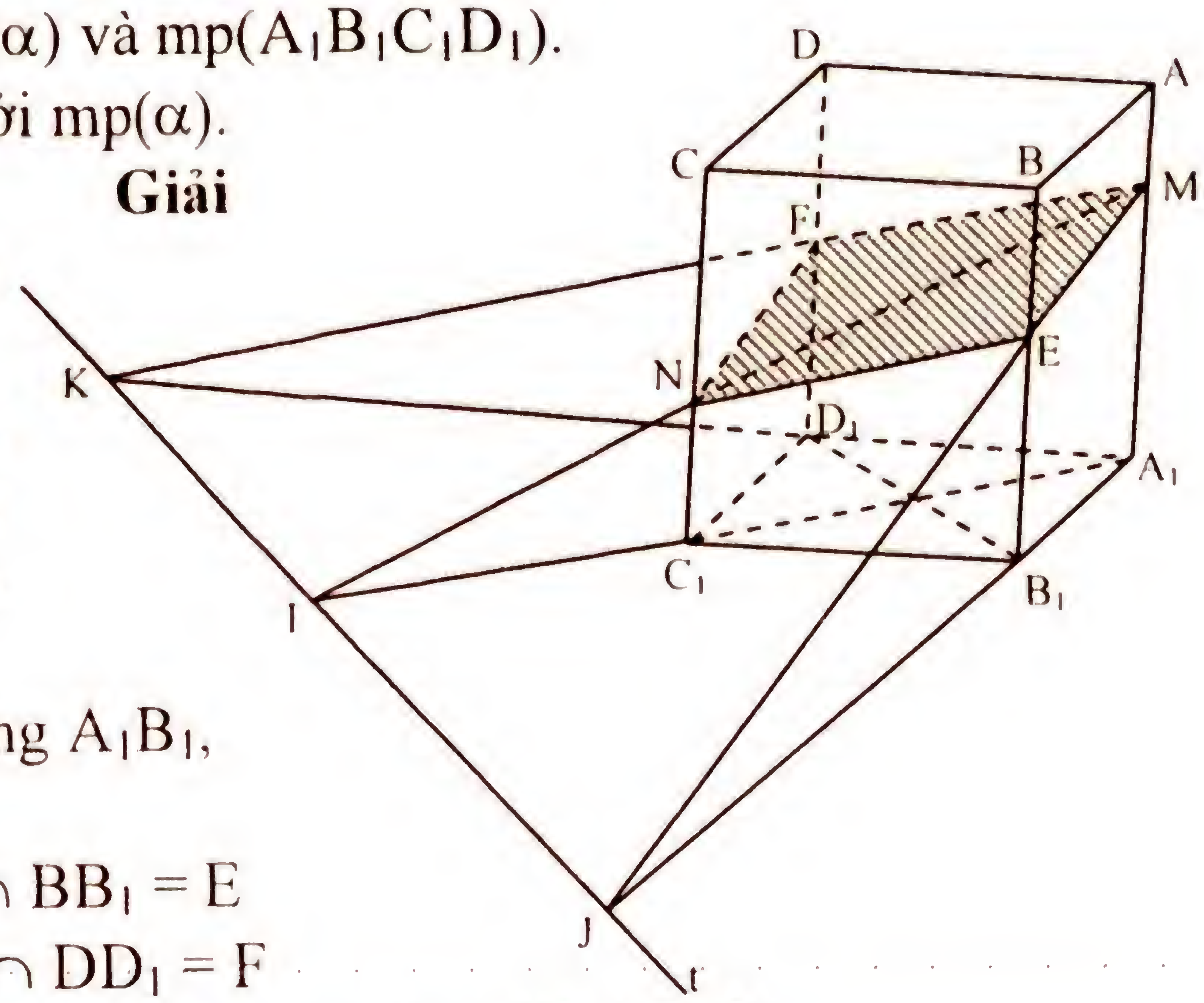
Vậy, nếu ta cắt tứ diện ABCD bằng một mặt phẳng (P) qua M thuộc cạnh AB sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{BD}$ và song song với BD, AC thì được thiết diện của tứ diện là hình thoi.

**Ví dụ 11**: Trên các cạnh $AA_1$ và $CC_1$ của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $MA_1 = 2MA$, $NC = 2NC_1$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua MN và song song với $B_1D_1$.

a) Xác định giao tuyến của $(\alpha)$ và mp$(A_1B_1C_1D_1)$.

b) Dựng thiết diện khi cắt bởi mp$(\alpha)$.

**Giải**




a) Trong mp$(AA_1;\ CC_1)$, kéo dài MN cắt $A_1C_1$ tại I.

Vì $(\alpha)$ qua M, N và song song với BD, nên $(\alpha)$ cắt mặt đáy $(A_1B_1C_1D_1)$ theo giao tuyến It // $B_1D_1$.

b) Giao tuyến It cắt đường thẳng $A_1B_1$, $A_1D_1$ tại J, K.

Trong mp$(AA_1, BB_1)$, $JM \cap BB_1 = E$

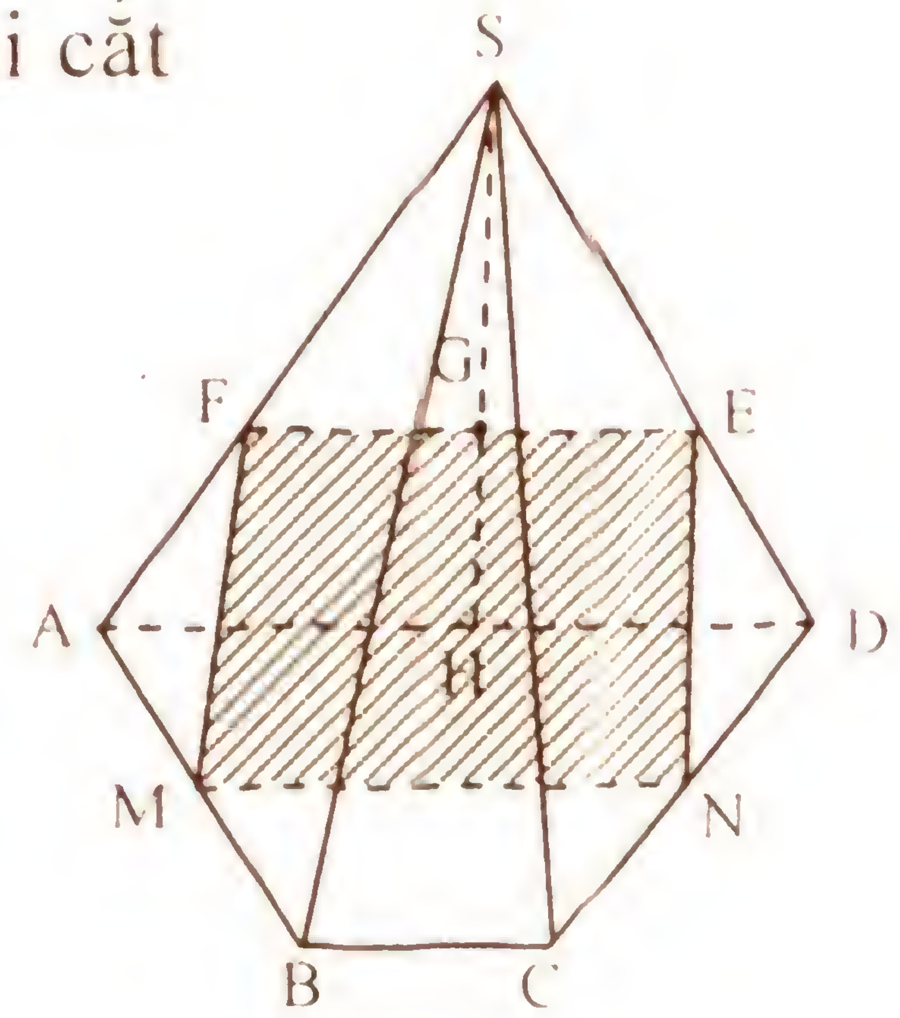
Trong mp$(CC_1, DD_1)$, $KM \cap DD_1 = F$

Vậy thiết diện là tứ giác MENF có đường chéo EF // $B_1D_1$.

**Ví dụ 12**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (AD // BC). Gọi M, N và G lần lượt là trung điểm của AB, CD và trọng tâm tam giác SAD.

a) Xác định giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD).

b) Dựng thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mp(MNG).

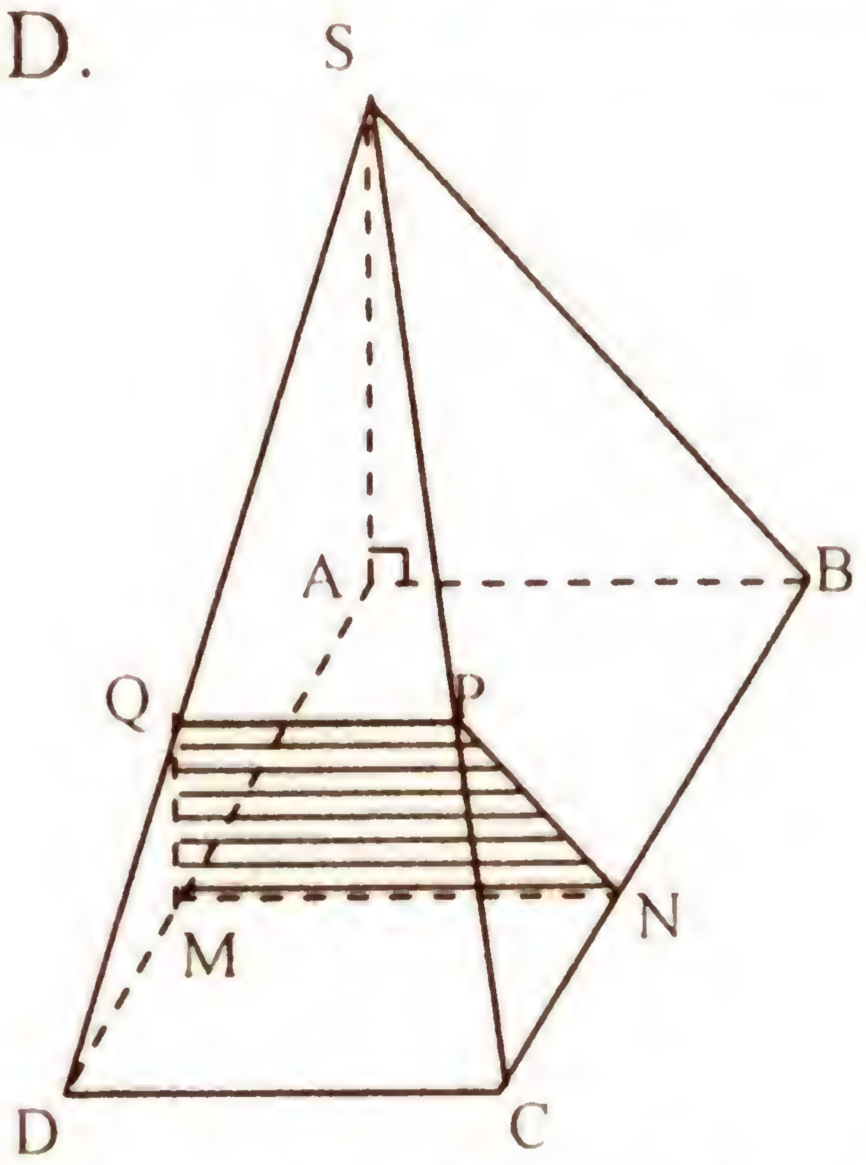



**Giải**

a) Gọi O là giao điểm của AB và CD.
Đường thẳng SO là giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Ta có đường trung bình MN // AD, BC, vẽ đường thẳng d qua G và song song với AD cắt SD, SA theo thứ tự tại E, F.
Hình thang MNEF là thiết diện cần dựng.

**Ví dụ 13**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a. Mặt bên SAB là một tam giác vuông cân tại đỉnh A. Trên cạnh AD lấy một điểm M và đặt AM = x (0 < x < 2a). Xác định và tính diện tích thiết diện cắt bởi mp($\alpha$) đi qua M, song song với SA và CD.




**Giải**

Ta có mp($\alpha$) song song với giao tuyến DC của hai mặt phẳng (SDC) và (ABCD) nên cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến song song:

MN // PQ.

Do đó tứ giác MNPQ là hình thang, hơn nữa là hình thang vuông vì:

$\widehat{QMN} = \widehat{SAB} = 90^o$.

Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{PQ}{MN} = 1 - \frac{QM}{SA} = 1 - \frac{DM}{DA} = 1 - \frac{2a - x}{2a} = \frac{x}{2a}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{x}{2} \text{ và } \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{2a - x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{2a - x}{2}$$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$

$$= \frac{1}{2}(a + \frac{x}{2})\frac{2a - x}{2} = \frac{4a^2 - x^2}{8}.$$

## DẠNG 4: TOÁN TỔNG HỢP

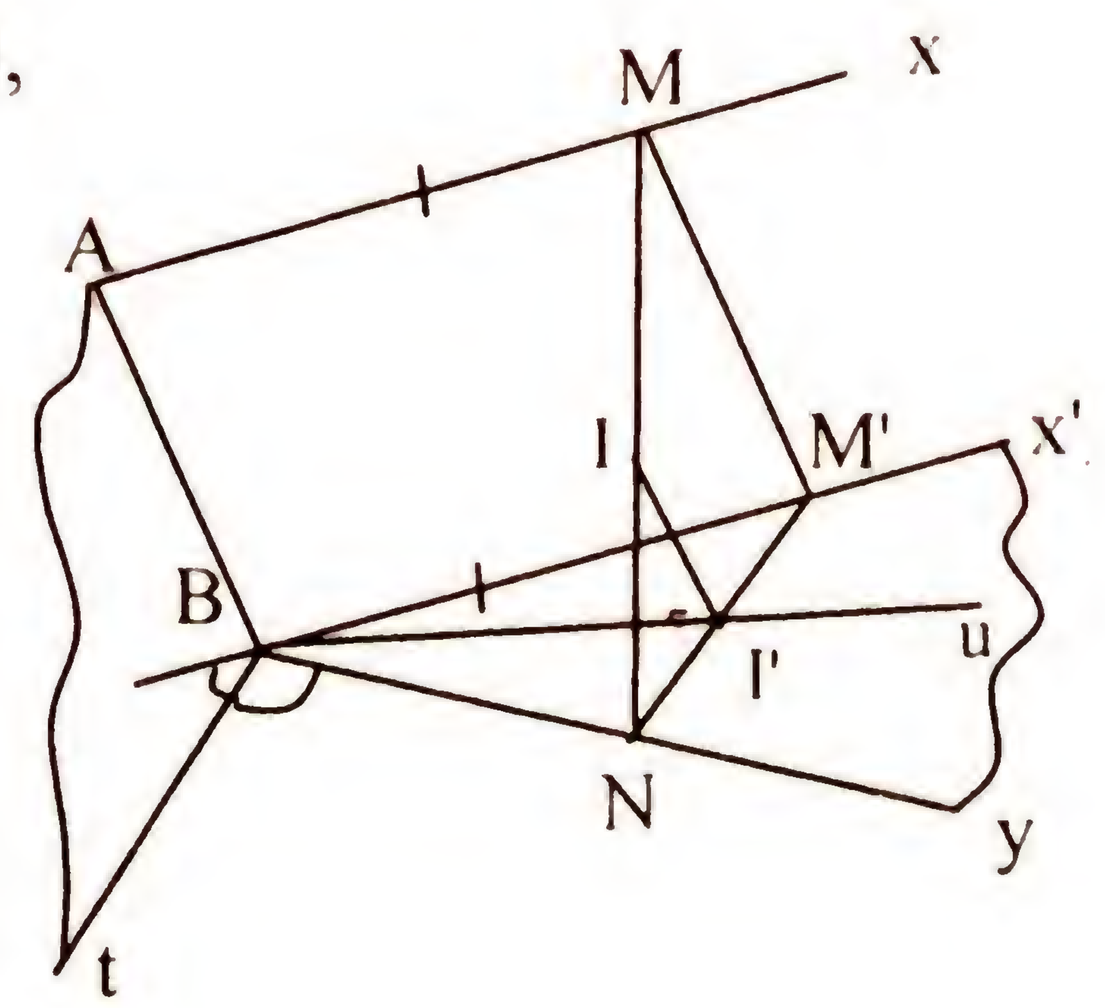
- Tập hợp điểm là mặt phẳng: Trước hết xác định mặt phẳng $(\alpha)$ sẽ chứa các điểm M cần tìm quỹ tích, sau đó chứng minh $M \in (\alpha)$. Xem xét giới hạn theo yêu cầu của bài toán và làm phần đảo.
- Yếu tố cố định: Sử dụng cách xác định điểm, đường thẳng, mặt phẳng cũng như tương giao của đường thẳng, mặt phẳng cố định.
- Sử dụng các kết quả về giao tuyến song song, giao tuyến qua 2 điểm phân biệt, giao điểm của hai đường thẳng, đường thẳng và mặt phẳng để xác định thiết diện.

**Ví dụ 1**: Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho AM = BN.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh trung điểm I của MN thuộc một mặt phẳng cố định.

**Giải**




a) Dựng Bx' // Ax. Trong mặt phẳng (Ax, Bx'), đường thẳng qua M song song với AB cắt Bx' tại M'.

Ta có: BM' = BN = AM.

Vậy BNM' là tam giác cân tại B nên M'N song song với phân giác ngoài Bt của góc $\widehat{x'By}$.

Ta có: $\begin{cases} MM' // AB \\ M'N // Bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' // (AB, Bt) \\ M'N // (AB, Bt) \end{cases}$

Nên hai mặt phẳng (MM'N) và (AB, Bt) song song với nhau.

Từ đó suy ra MN luôn luôn song song với mặt phẳng (AB, Bt) cố định.

b) Gọi I' trung điểm NM' thì BI' vuông góc NM' mà tam giác BNM' cân tại B nên I' thuộc phân giác trong Bu cố định.

Vì II' // MM' nên II' // AB do đó I thuộc mp(A, Bu) cố định.

**Ví dụ 2**: Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với 2 đường thẳng CD, AB lần lượt cắt các cạnh AC, AD, BD, BC tại M, N, E, F.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNEF là một hình bình hành.

b) Tìm tập hợp tâm I của hình bình hành MNEF.

**Giải**

a) Ta có AB // (P), $AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \cap (P) = MF // AB$

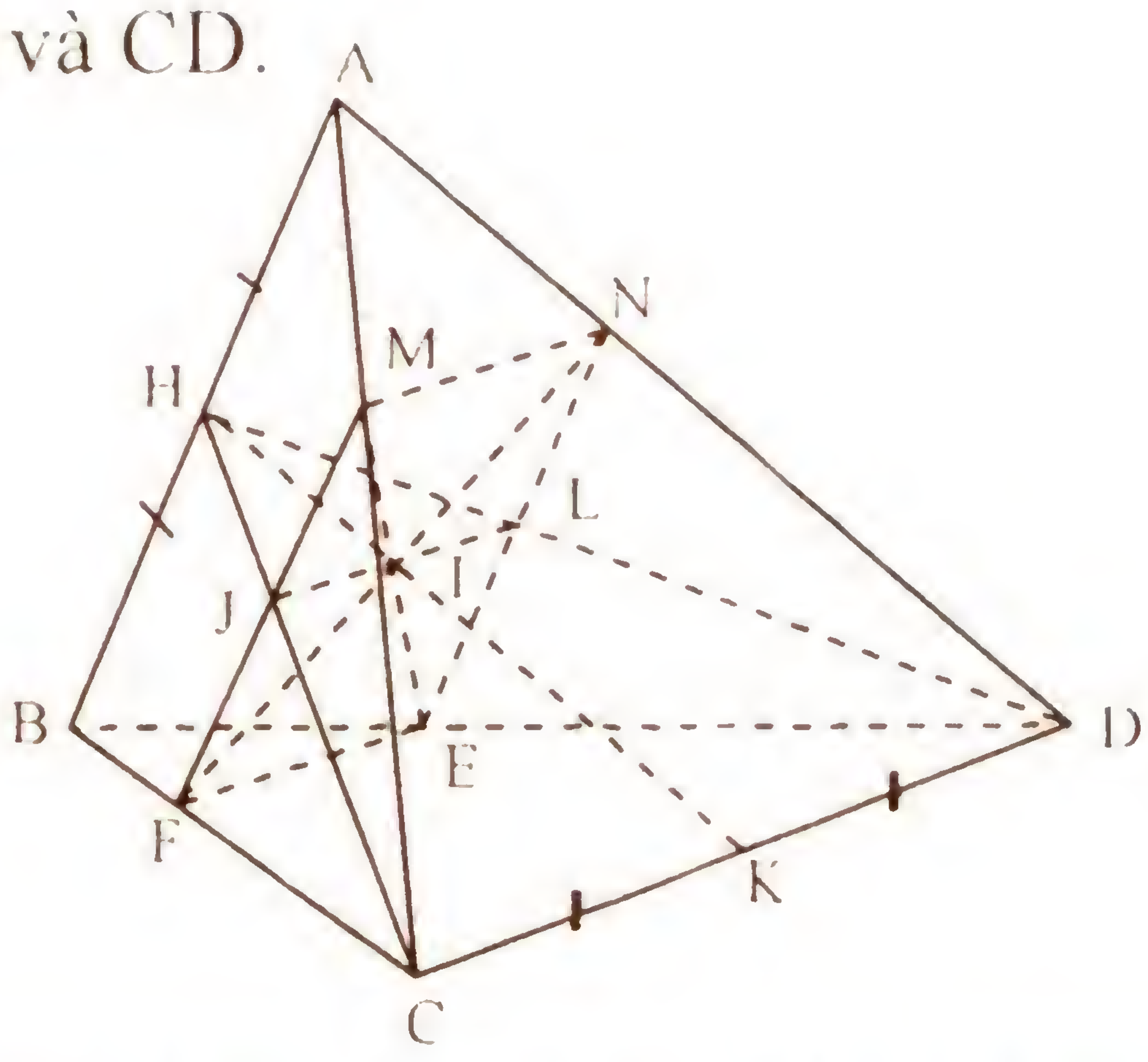
và AB // (P), $AB \subset (ABD) \Rightarrow (ABD) \cap (P) = NE // AB$.

Do đó MF // NE // AB. Chứng minh tương tự:

MN // EF // CD.

Vậy tứ giác MNEF là hình bình hành.

b) Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Gọi J và L lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng CH và MF, DH và NE thì ba điểm J, I, L thẳng hàng trên giao tuyến của 2 mp(P) và (HCD).
Ta có H, I, K hẳng hàng.
Vậy khi (P) di động thì tâm I của hình bình hành MNEF chạy trên đoạn thẳng HK.




Ngược lại, lấy một điểm I bất kì trên đoạn thẳng HK. Qua I kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt CH và DH tại J và L. Qua J và L lần lượt vẽ hai đường thẳng MF ($M \in AC$, $F \in BC$), NE ($N \in AD$, $E \in BD$) cùng song song với AB thì tứ giác MNEF là hình bình hành và có tâm là I.
Vậy tập hợp tâm I của hình bình hành MNEF là đoạn thẳng HK.

**Ví dụ 3**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là một điểm chuyển động trên cạnh SC và $\alpha$ là mặt phẳng chứa đường thẳng AM và song song với BD.

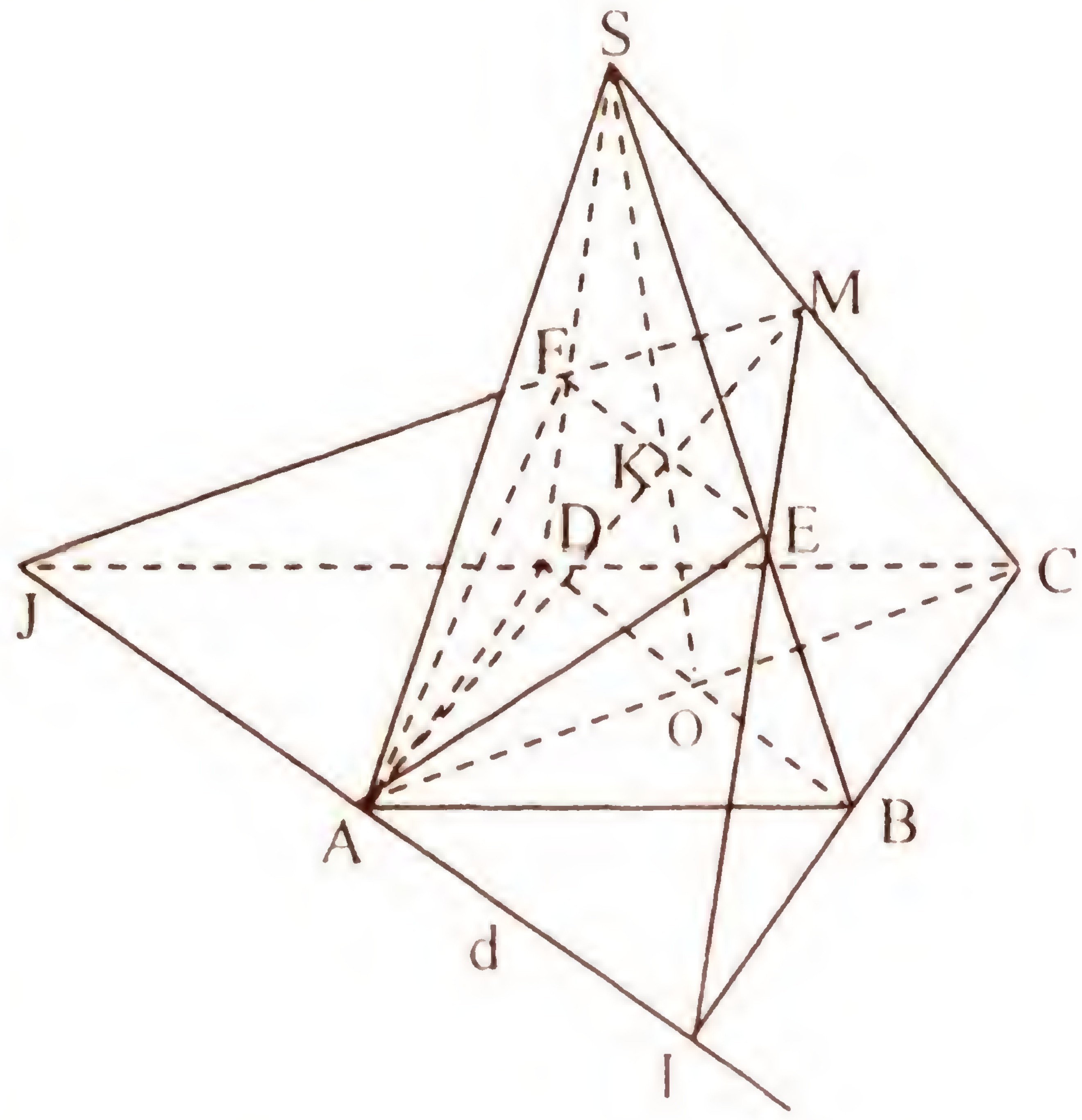
a) Chứng minh rằng mặt phẳng $\alpha$ luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên cạnh SC.

b) Mặt phẳng $\alpha$ cắt SB và SD lần lượt tại E và F. Gọi I là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm I, J, A thẳng hàng.

**Giải**

a) $\alpha$ đi qua A và song song với BD nên cắt mp(ABCD) theo giao tuyến d đi qua A, song song với BD cố định.

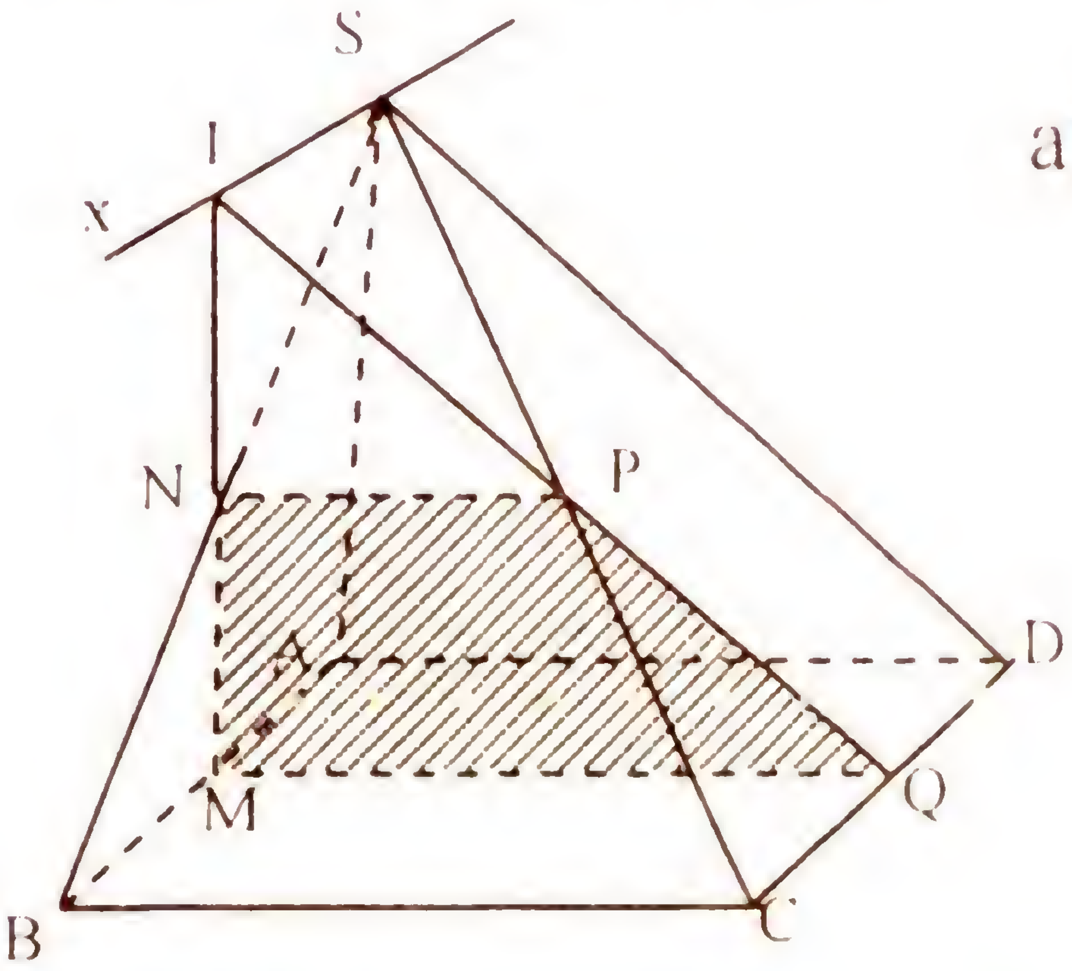
b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là giao điểm của AM và SO, thế thì K là một điểm chung của $\alpha$ và (SBD). Vì $\alpha$ // BD nên $\alpha$ cắt (SBD) theo giao tuyến qua K là EF song song với BD.
Ba điểm I, J và A đều thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng $\alpha$ và (ABCD) nên I, J, A thẳng hàng.




**Ví dụ 4**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. M là một điểm di động trên đoạn AB. Một mặt phẳng ($\alpha$) đi qua M và song song với SA và BC; ($\alpha$) cắt SB, SC và CD lần lượt tại N, P và Q.

a) Thiết diện MNPQ là hình gì?

b) Gọi I là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định.




**Giải**

a) Mặt phẳng ($\alpha$) qua M, song song với SA, BC nên cắt mp(ABCD) theo giao tuyến MQ // BC, Q $\in$ DC, cắt mp(SAB) theo giao tuyến MN // SA, N $\in$ SB và cắt mp(SBC) theo giao tuyến NP // BC, P $\in$ SC.

Ta có NP // MQ nên thiết diện là hình thang MNPQ.

b) Ta có MN $\subset$ mp(SAB) cố định và QP $\subset$ mp(SCD) cố định nên giao điểm I của MN và PQ thuộc giao tuyến của (SAB) và (SCD) cố định

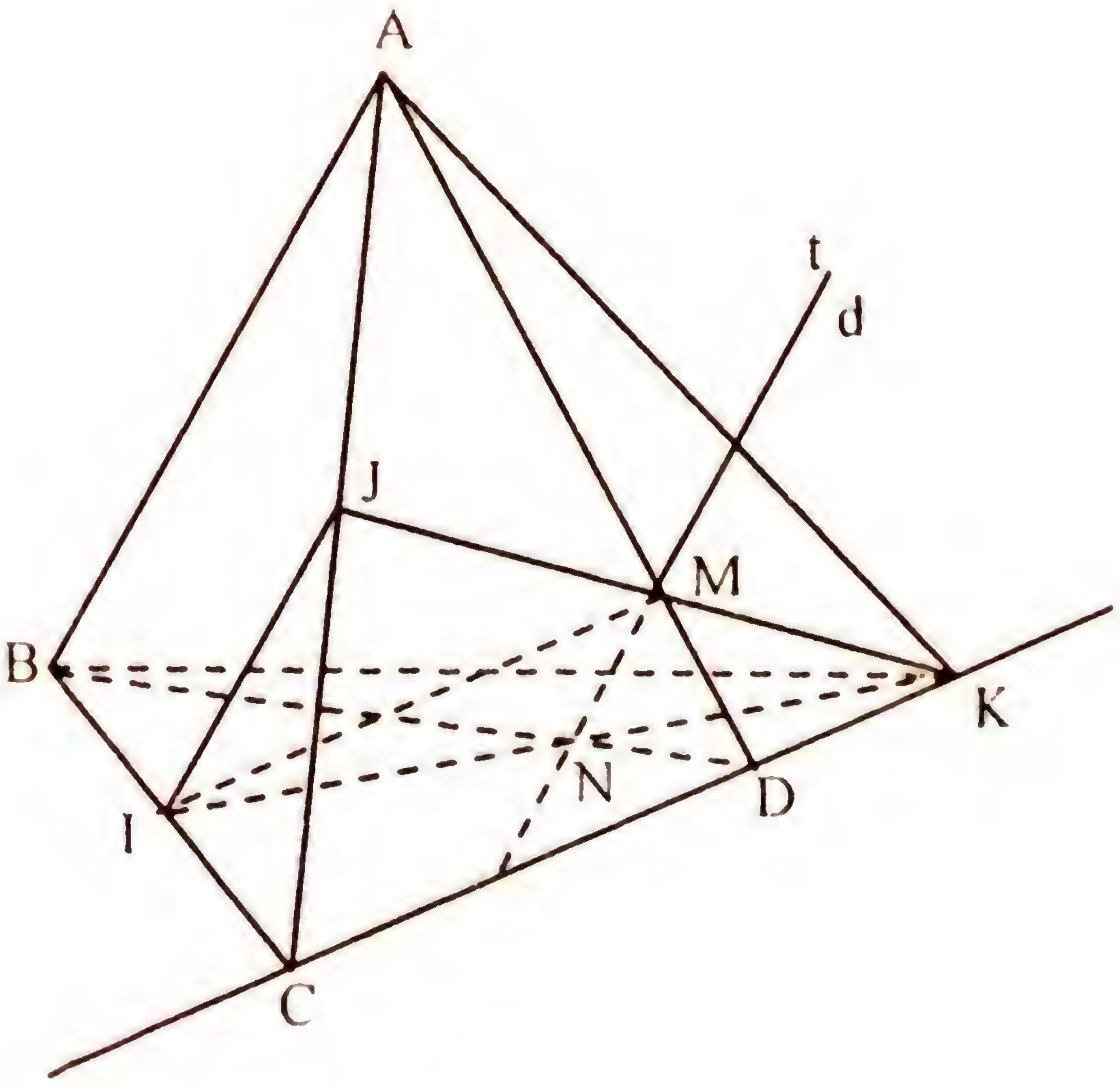
Vì AB // CD nên giao tuyến Sx // AB, CD.

Vậy giao điểm I nằm trên Sx cố định.

__Ví dụ 5:__ Cho tứ diện ABCD. Cho I và J tương ứng là trung điểm của BC và AC, M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AD.

a) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD).

b) Gọi N là giao điểm của BD với giao tuyến d, K là giao điểm của IN và JM. Chứng minh khi M thay đổi thì K thuộc một đường thẳng cố định.




**Giải**

a) Ta có M là điểm chung của 2 mp(MIJ) và (ABD).

Vì IJ // AB nên (MIJ) cắt (ABD) theo giao tuyến d là Mt // AB / IJ.

b) Ta có IN thuộc mp(BCD) cố định.

và JM thuộc mp(ACD) cố định

và (BCD) $\cap$ (ACD) = CD

do đó giao điểm của IN và JM là K $\in$ CD cố định.

__Ví dụ 6:__ Trong mặt phẳng ($\alpha$) cho tam giác ABC. Từ ba đỉnh của tam giác này, vẽ các tia song song cùng chiều Ax, By, Cz không nằm trong ($\alpha$). Trên Ax lấy đoạn AA', trên By lấy đoạn BB' trên Cz lấy đoạn CC'.

a) Gọi I, J và K lần lượt là các giao điểm B'C', C'A' và A'B' với ($\alpha$). Chứng minh I, J, K thẳng hàng và $\frac{IB}{IC}.\frac{JC}{JA}.\frac{KA}{KB} = 1$.

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh GG' // AA'.

**Giải**

a) Ta có I, J, K thẳng hàng trên giao tuyến của 2 mp(ABC) và (A'B'C')

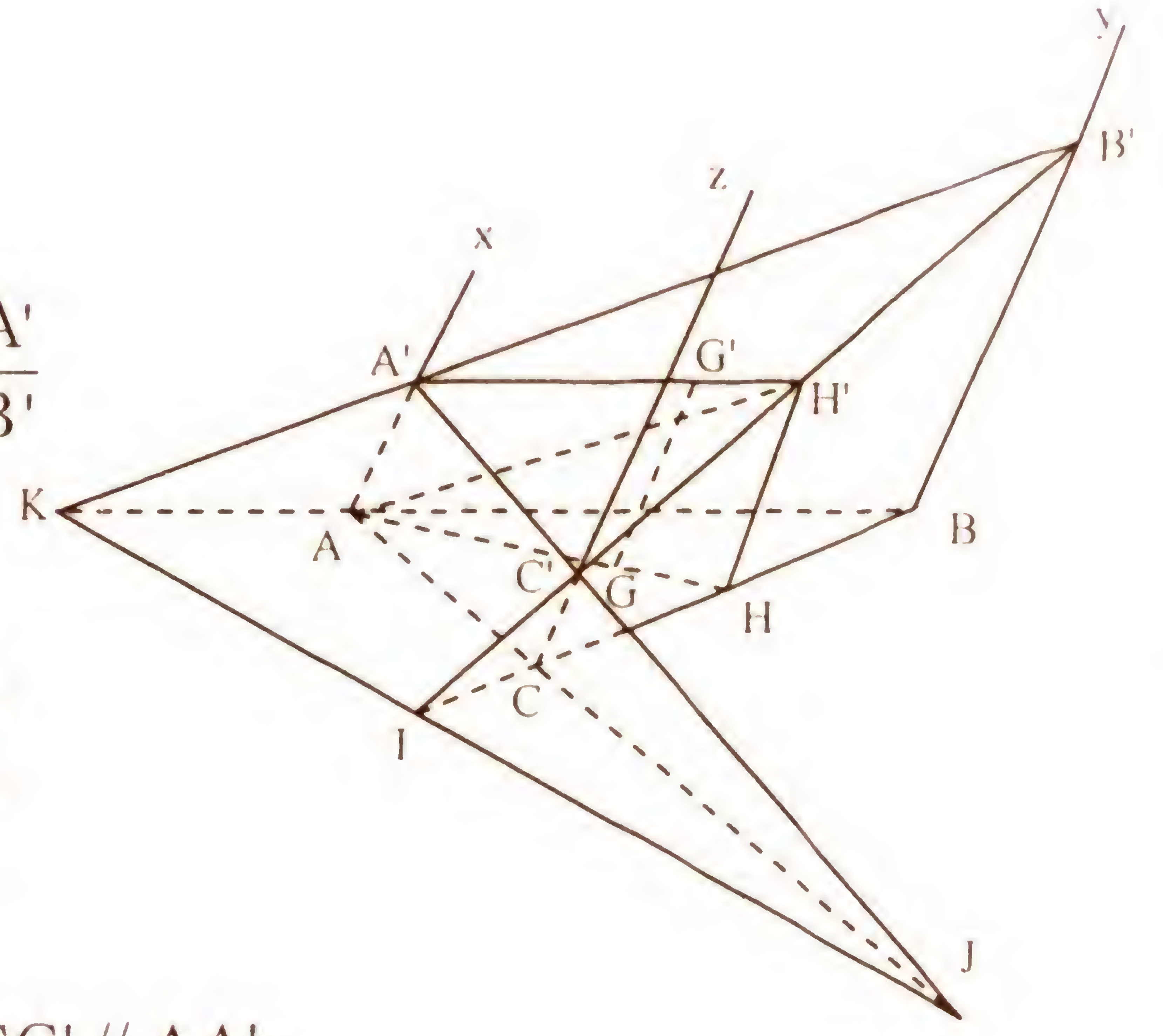
Vì CC' // BB'

$\Rightarrow \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{BB'}{CC'}$

Tương tự có :

$\dfrac{JC}{JA} = \dfrac{CC'}{AA'}$ và $\dfrac{KA}{KB} = \dfrac{AA'}{BB'}$

Do đó: $\dfrac{IB}{IC} \cdot \dfrac{JC}{JA} \cdot \dfrac{KA}{KB} = 1$




b) Gọi H và H' lần lượt là trung điểm các cạnh BC và B'C' thì HH' // BB', do đó: HH' // AA'

Ta có: $\dfrac{AG}{AH} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{A'G'}{A'H'} \Rightarrow GG' // AA'$ .

__Ví dụ 7__: Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi K, N theo thứ tự là trung điểm của SA, BC. Điểm M chia đoạn SC theo tỉ số $-\dfrac{2}{3}$.

a) Tìm tỉ số diện tích tam giác ASC và AKM.

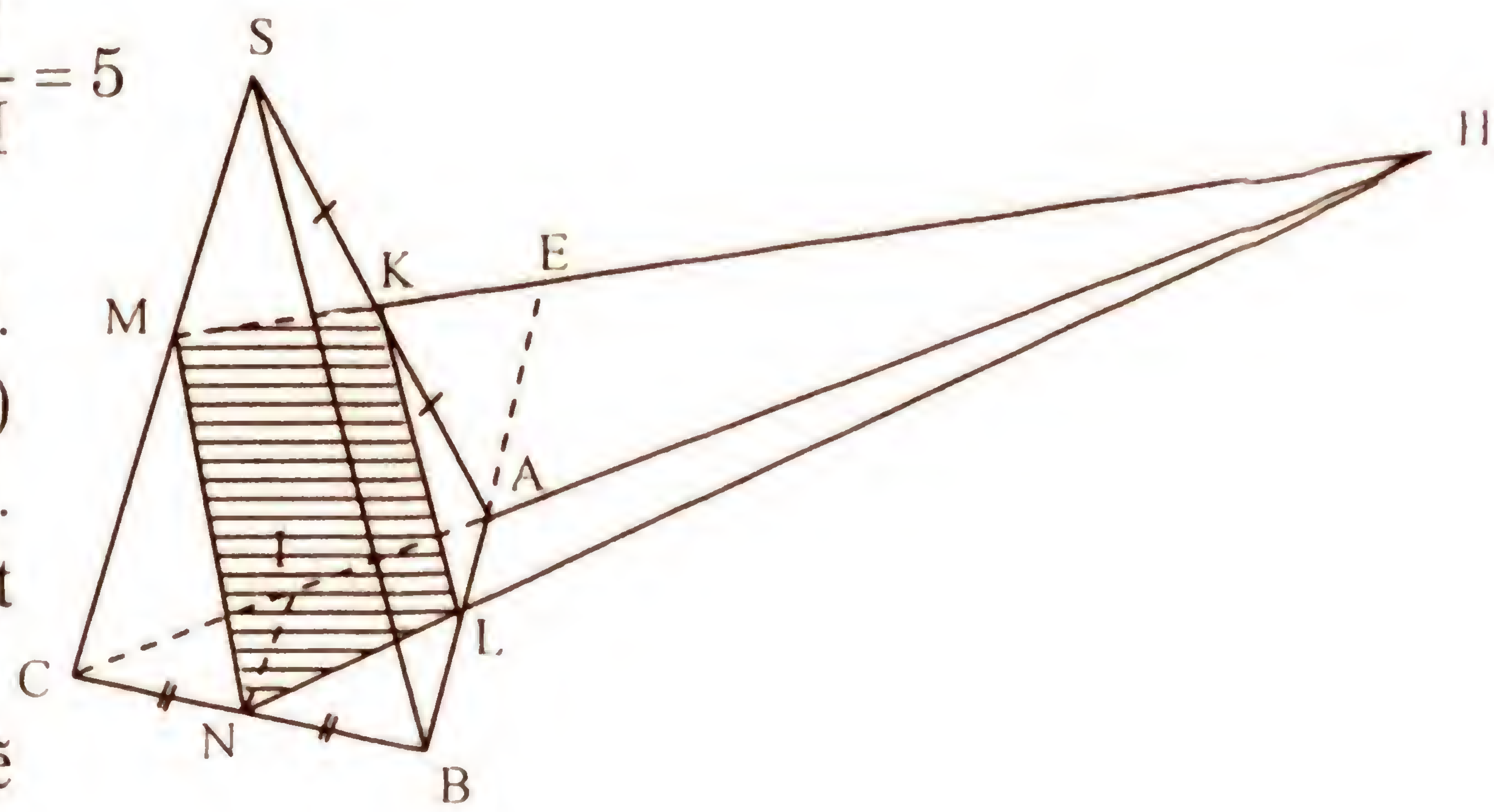
b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua M, N, K.

c) Giả sử mp(α) cắt AB tại L, tính tỉ số $\dfrac{LA}{LB}$.

**Giải**

a) Vì K trung điểm SA và SC = $\dfrac{5}{2}$SM nên:

$$\frac{S_{ASC}}{S_{AKM}} = \frac{S_{ASC}}{\frac{1}{2}S_{SMA}} = 2.\frac{SC}{SM} = 5$$




b) Kéo dài MK cắt CA tại H. Trong mặt phẳng (ABC) nối N với H cắt AB tại L. Tứ giác MKLN là thiết diện cần dựng.

c) Trong mp(SAC) từ A vẽ AE // SC (E ∈ MH) thì:

$$AE = SM = \frac{2}{3}MC \Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{AE}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow HA = 2AC.$$

Gọi I là trung điểm của AC thì:

$$AL \mathbin{/\!/} NI \Rightarrow \frac{AL}{NI} = \frac{HA}{HI} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AL}{AB} = \frac{AL}{2NI} = \frac{2}{5}.$$

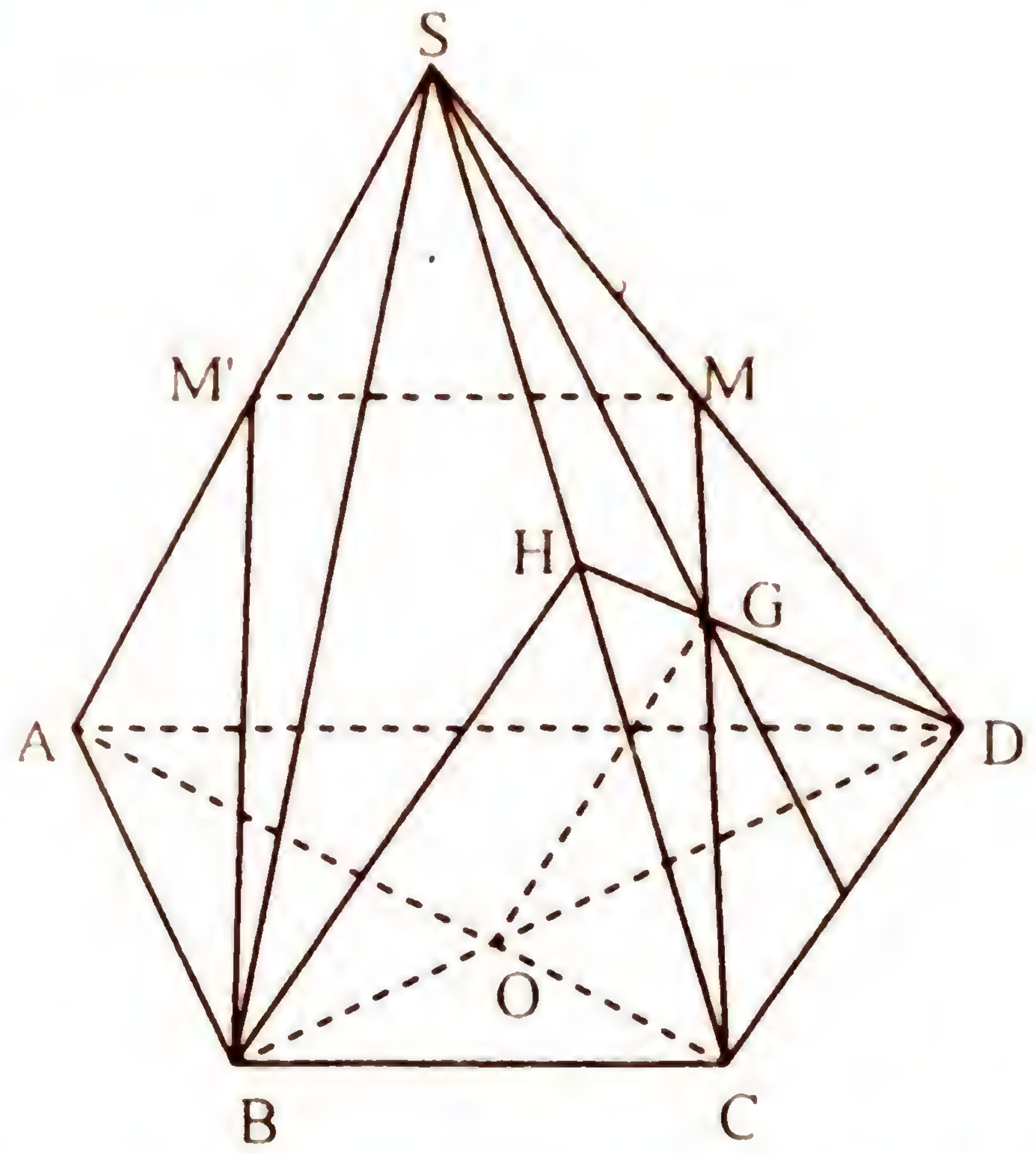
Vậy $\frac{LA}{LB} = \frac{2}{3}$.

**Ví dụ 8**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD, đáy lớn là AD và AD = 2BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh rằng OG song song (SBC).

b) Gọi M là trung điểm của SD. Chứng minh rằng CM // (SAB).

**Giải**




a) Gọi H là trung điểm của SC.

$$BC \mathbin{/\!/} AD \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{OD}{DB} = \frac{2}{3} = \frac{DG}{DH}$$

$\Rightarrow$ OG // BH nên OG // (SBC).

b) Gọi M' là trung điểm của SA

$\Rightarrow$ MM' // AD và $MM' = \frac{AD}{2}$.

Mặt khác vì BC // AD và $BC = \frac{AD}{2}$ nên BC // MM' và BC = MM'

Do đó tứ giác BCMM' là hình bình hành

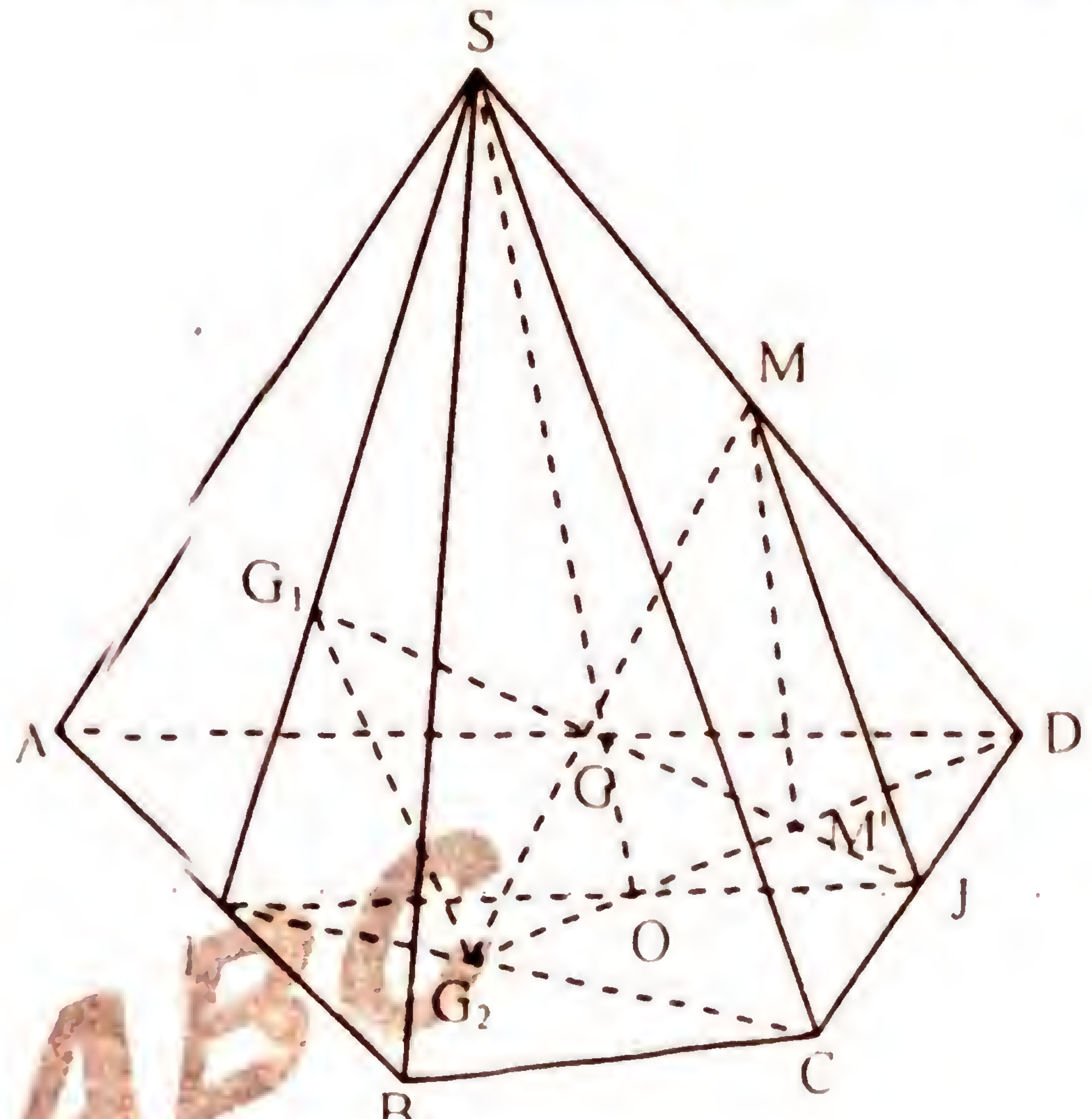
$\Rightarrow$ CM // BM' $\Rightarrow$ CM // (SAB)

**Ví dụ 9**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M, I, J, O lần lượt là trung điểm của SD, AB, CD, IJ.

a) Chứng minh rằng nếu $G_1$, $G_2$ lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC thì $G_1G_1$ song song MJ.

b) Chứng minh rằng tám đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh hình chóp và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh hình chóp không nằm trên cạnh nói trên đồng quy tại một điểm G.

c) Chứng minh rằng điểm G nằm trên đoạn thẳng SO và GS = 4GO.




**Giải**

a) Ta có $\frac{IG_1}{IS} = \frac{IG_2}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \mathbin{/\!/} SC$.

Mặt khác MJ là đường trung bình của tam giác DSC nên MJ // SC. Từ đó suy ra $G_1G_2$ // MJ.

b) Ta có tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng; ta chỉ cần chứng minh chúng cắt nhau từng đôi một thì đồng quy.

Lấy hai đường thẳng bất kì trong tám đường thẳng trên, chẳng hạn như hai đường thẳng $MG_2$ và $JG_1$. Theo câu a) thì $G_1G_2$ // MJ, do đó $MG_2$ và $JG_1$ nằm trong mp($G_1G_2JM$).

Vậy $MG_2$ và $JG_1$ cắt nhau $\Rightarrow$ đpcm.

c) Xét mp(ABCD) ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -3\overrightarrow{OG_2}$ (vì $G_2$ là trọng tâm tam giác ABC)

$\Rightarrow$ O, $G_2$, D thẳng hàng và OD = $3OG_2$.

Xét ba mặt phẳng ($G_1G_2JM$), ($G_2MD$), (SIJ), ta có

$(G_1G_2JM) \cap (G_2MD) = G_2M$; $(G_1G_2JM) \cap (SIJ) = G_1J$;

$(G_2MD) \cap (SIJ) = SO$.

Do đó 3 giao tuyến $G_2M$, $G_1J$ và SO đồng quy. Theo kết quả câu b) thì $G_2M$ và $G_1J$ cắt nhau tại G. Vậy điểm G nằm trên SO.

Vẽ MM' song song với SO và cắt $G_2D$ tại M', ta có:

$$OM' = M'D = \frac{1}{2}OD = \frac{3}{2}OG_2 \text{ và } \frac{OG}{MM'} = \frac{OG_2}{G_2M'} = \frac{OG_2}{\frac{5}{2}OG_2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow OG = \frac{2}{5}MM' = \frac{1}{5}SO \Rightarrow GS = 4GO.$$

**<u>Ví dụ 10:</u>** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của SD, SB.

a) Xác định giao tuyến d của mp(SAB) và mp(SCD).

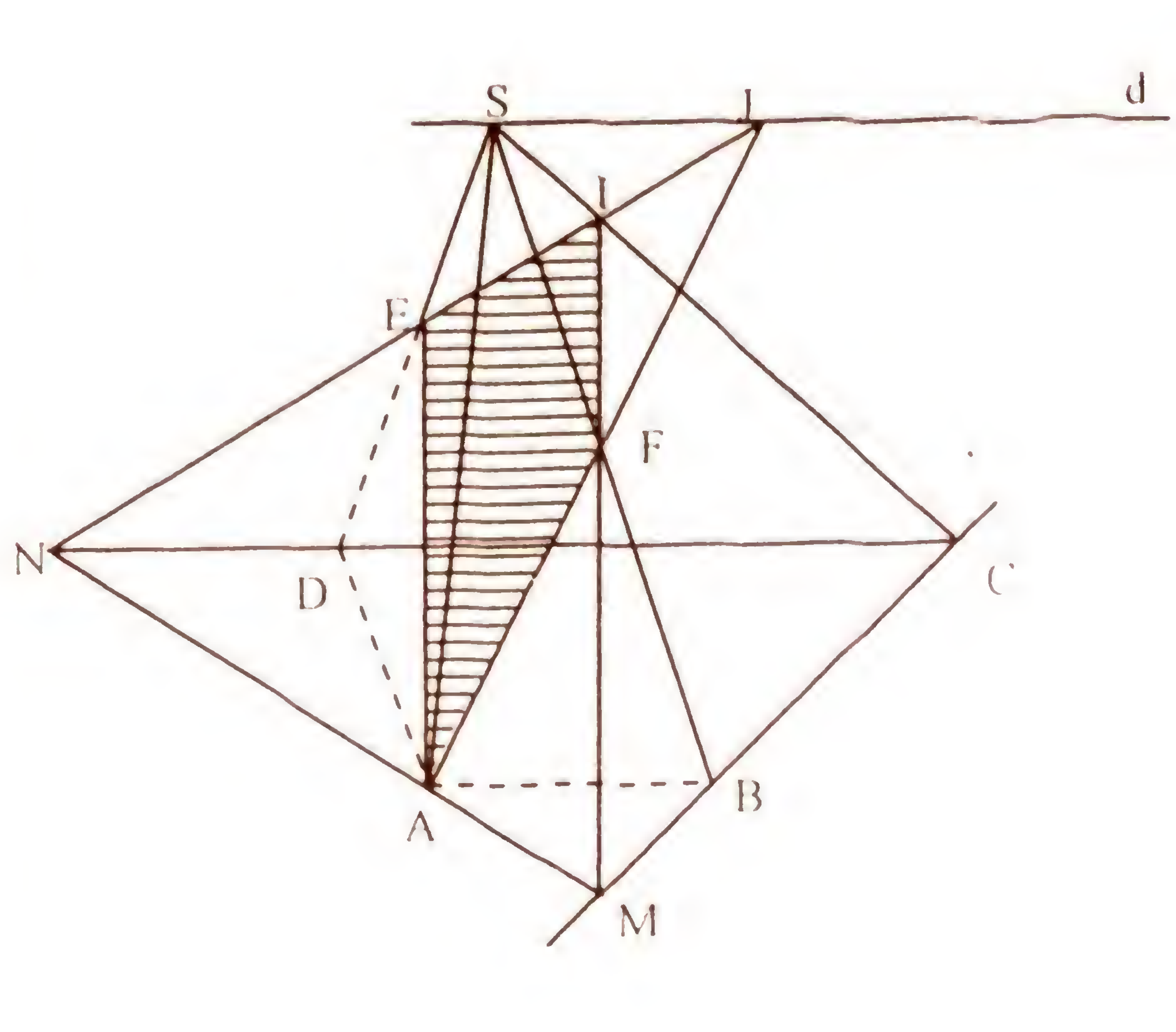
b) Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(AEF).

c) Gọi I là giao điểm của SC và mp(AEF). Hãy xác định các giao điểm M và N qua các cặp đường thẳng CB và FI, CD và EI. Chứng minh ba điểm M, N, A thẳng hàng.

**Giải**

a) Vì AB // CD nên giao tuyến d của 2 mp(SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S song song AB, CD.

b) Trong mp(SAB), $d \cap AF = J$.
Trong mp(SCD), $SC \cap EJ = I$ thì AEIF là thiết diện cần dựng.



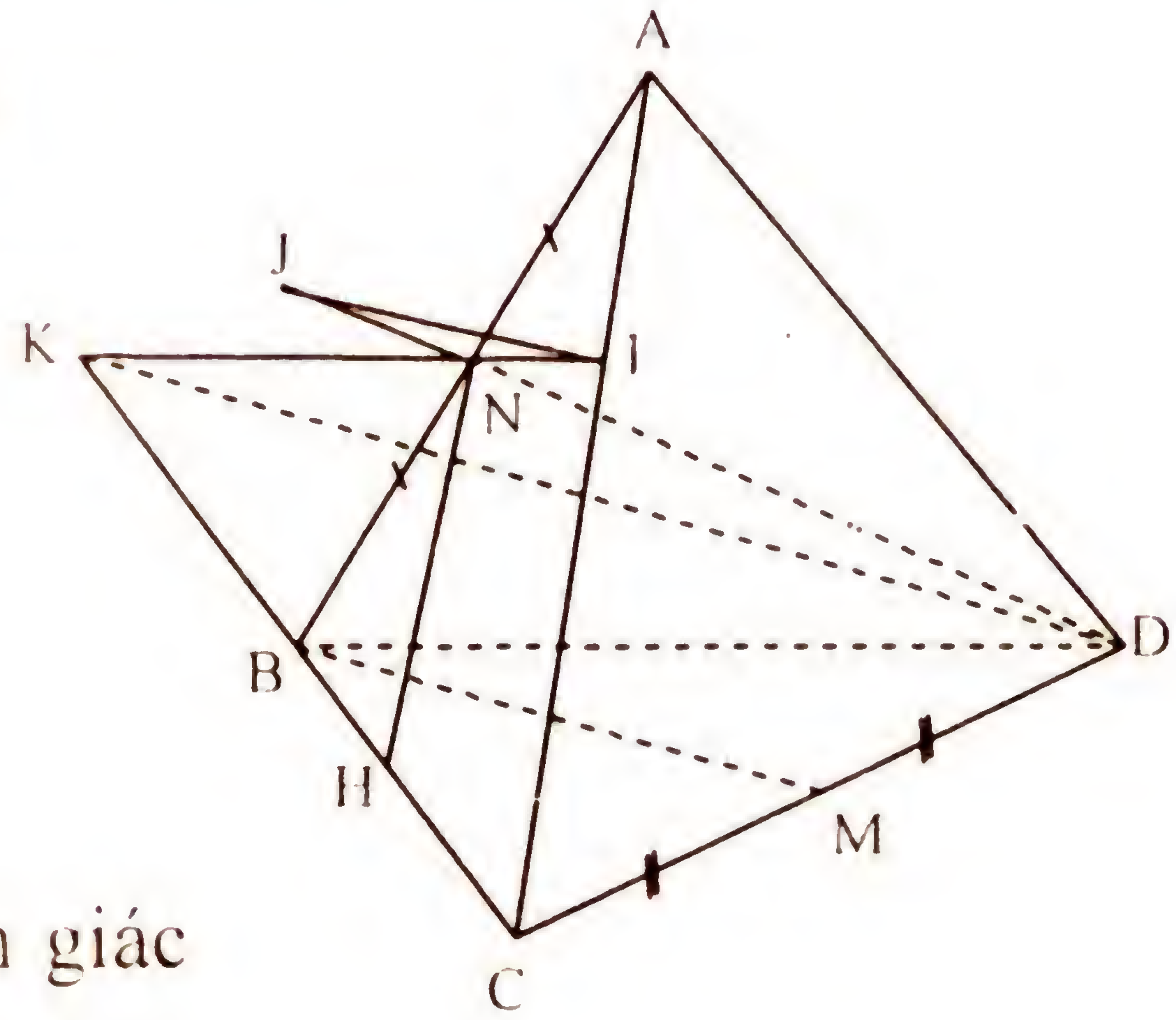

c) Vì E là trung điểm của SD và I không phải là trung điểm của SC. Do đó, trong mp(SBC) có $IF \cap BC = M$ và trong mp(d; DC) có $IE \cap DC = N$.
Ba điểm A, M, N đều thuộc cùng hai mặt phẳng (ABCD) và (AFE) nên chúng thuộc giao tuyến và do đó chúng thẳng hàng.

**Ví dụ 11**: Cho tứ diện đều ABCD có các cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

a) Hãy xác định điểm $I \in AC$, $J \in DN$ sao cho IJ // BM.

b) Tính độ dài đoạn thẳng IJ theo a.

**Giải**




a) Trong mp(BCD), từ D vẽ đường thẳng song song với BM cắt CB tại K. Nối K và N cắt AC tại I. Trong mp(IKD), từ I vẽ đường thẳng song song với DK cắt đường thẳng DN tại J. Khi đó theo cách dựng ta có IJ // BM.

b) Do BM là đường trung bình của tam giác CKD nên: $KD = 2BM = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Gọi H là trung điểm của BC, khi đó:

$$NH // AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$$

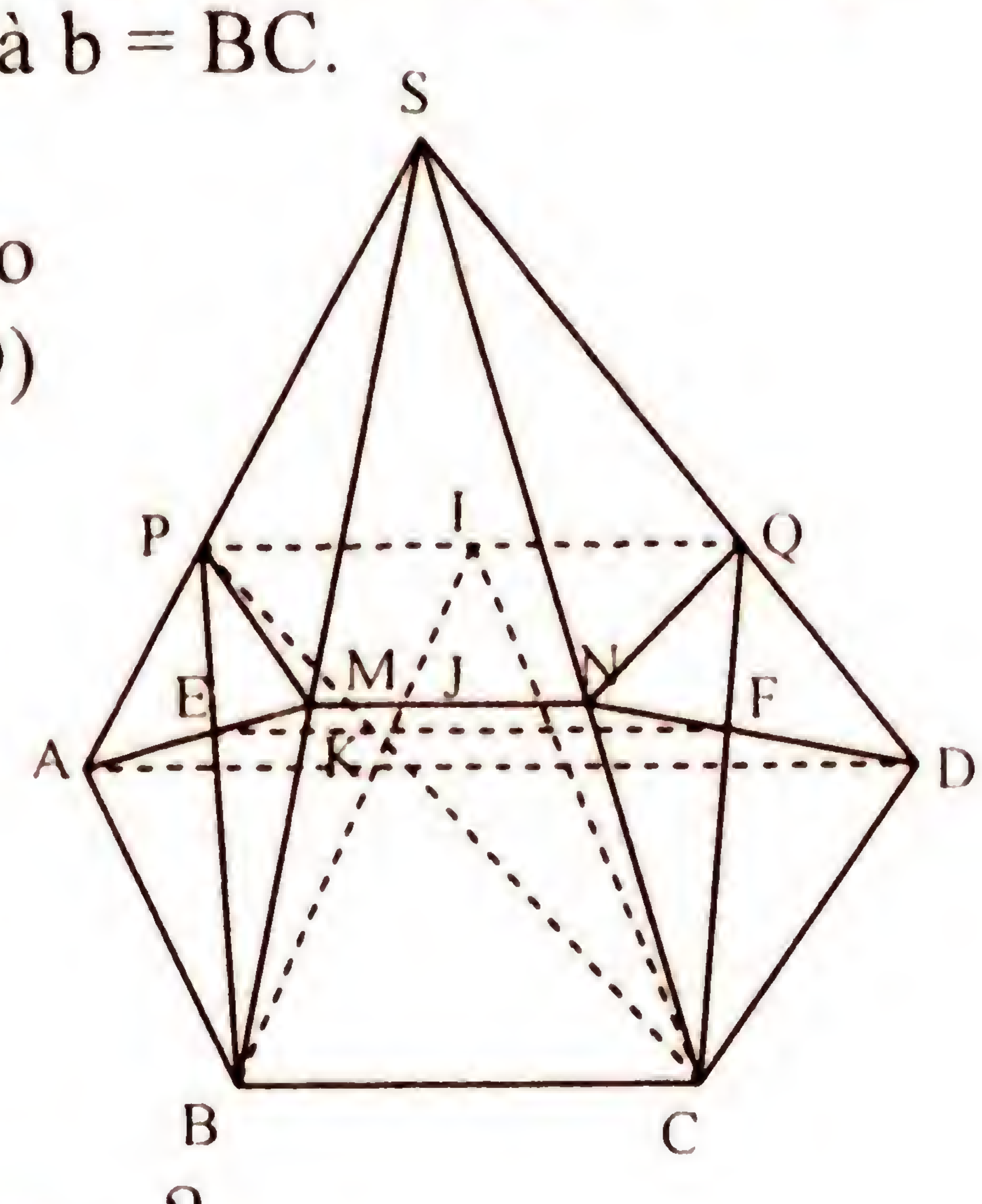
$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ$. Vậy $IJ = \dfrac{1}{3}KD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Ví dụ 12:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD với đáy là AD và BC. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Giả sử AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F. Chứng minh rằng EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a = AD và b = BC.

**Giải**




a) Vì AD // BC nên mp(ADJ) cắt (SBC) theo giao tuyến MN // AD, BC và mp(BCI) cắt (SAD) theo giao tuyến PQ // AD, BC.
Vậy MN // PQ.

b) Ta có: $(AMND) \cap (PBCQ) = EF$
và EF // AD, BC, MN, PQ
Ta có $CP \cap EF = K \Rightarrow EF = EK + KF$.

Vì $PM // AB \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{PM}{AB} = \dfrac{SP}{SA} = \dfrac{2}{3}$

Vì $FK // BC \Rightarrow \dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB} = \dfrac{PE}{PE+EB} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow EK = \dfrac{2}{5}b$

Tương tự $KF = \dfrac{2}{5}a$. Vậy $EF = \dfrac{2}{5}a + \dfrac{2}{5}b = \dfrac{2}{5}(a+b)$.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**1.** Cho hình chóp S.ABCD, AC cắt DB tại O.Gọi M, N, P, Q là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD.
a) Chứng minh MP// AC, NQ// BD
b) Chứng minh SO, MP, NQ đồng quy.
**HD:** b) SO là giao tuyến của 2 mặt chéo

**2.** Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang với cạnh đáy AB và CD (AB> CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.
a) Chứng minh MN//CD.
b) Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ADN). Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh SI//AB//CD. Tứ giác SABI là hình gì?
**ĐS:** b) Tứ giác SABI là hình bình hành

**3.** Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình chữ nhật. Gọi I, J, E, F là trọng tâm 4 mặt bên.
a) Chứng minh I, J, E, F đồng phẳng.
b) Chứng minh tứ giác IJEF là hình thoi.

**4.** Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy AB = 2CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB.
a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG).
**HD:** b) giao tuyến song song

**5.** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm của BC, BD và E thuộc cạnh AD.
a) Xác định thiết cắt bởi (IJE)
b) Tìm vị trí E để thiết diện là hình bình hành.
c) Tìm điều kiện của tứ diện và vị trí E để thiết diện là hình thoi.
**ĐS:** c) AB = CD và E là trung điểm của AD

**6.** Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm tam giác SAD.
a) Tìm giao điểm I của GM với (ABCD). Chứng minh: I ở trên đường thẳng CD và IC=2ID.
b) Tìm giao điểm J của (OMG) với AD. Tính JA / JD.
c) Tìm giao điểm K của (OMG) với SA. Tính KA / KS.
**ĐS:** b) JA / JD = 2 c) KA / KS = 2

**7.** Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD, ta lấy điểm K sao cho BK=2KD.
a) Tìm giao điểm E của CD với (IJK). Chứng minh: DE=DC.
b) Tìm giao điểm F của AD với (IJK). Chứng minh: FA=2FD.
c) Chứng minh FK song song với IJ.
d) Gọi M và N là hai điểm bất kỳ trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (IJK).

**8.** Cho tứ diện ABCD. Lấy M, N, P, Q trên 4 cạnh AB, BC, CD, DA.

Chứng minh M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi: $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{QD}{QA}=1$

**HD:** trong phần đảo, giả sử mặt phẳng (MNP) cắt cạnh AD tại Q' rồi Chứng minh Q' ≡ Q.

**9.** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (Q).

a) Giả sử a//b và b//(Q). Vị trí tương đối của a và (Q)?

b) Giả sử a//(Q) và b//(Q). Có thể kết luận gì về a và b?

**10.** a) Nếu a //b và $b \subset (Q)$ thì a và (Q) ?

b) Nếu a // (Q) và $b \subset (Q)$ thì a và b ?

c) Nếu a // (Q) và (P) chứa a, (P) cắt (Q) theo giao tuyến d thì a và d thế nào?

**11.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (Q) đi qua O, song song với AC và SB. Thiết diện đó là hình gì?

**HD:** dùng tính chất giao tuyến song song

**12.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành.

Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.

**13.** Cho tứ diện ABCD .Mặt phẳng (P) song song AB, CD.

a) Chứng minh thiết diện là hình bình hành .

b) Tìm quỹ tích tâm O của thiết diện

c) Định vị trí (P) cắt cạnh AC để thiết diện là hình thoi.

**14.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD)

b) Gọi P là trung điểm SA. Chứng minh: SB, SC song song với mặt phẳng (MNP).

c) Gọi $G_1$, $G_2$ là trọng tâm tam giác ABC, SBC. Chứng minh đường thẳng $G_1G_2$ song song với mặt phẳng (SAC).

**HD:** c) dùng tính chất tỉ lệ của trọng tâm

**15.** Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh điều kiện cần và đủ để OO' song song với (BCD) là: $\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}$.

**HD:** dùng tính chất tỉ lệ của đường phân giác cắt chia cạnh đối

**16.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC, M là một điểm di động trên cạnh SA, (P) là mặt phẳng luôn qua C'M và song song với BC.

a) Chứng minh: (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Xác định thiết diện mà (P) cắt hình chóp S.ABCD. Định M để thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm tập hợp giao điểm của hai cạnh đối của thiết diện.

**15.** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các cạnh AD và BE lần lượt lấy các điểm M, N lưu động sao cho AM/AD = BN/BE.

a) Chứng minh MN luôn song song với 1 mặt phẳng cố định

b) Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

**HD:** b) dùng đường trung bình

**16.** Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm trên AB, CD. (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

**ĐS:** b) MN song song với BC

**17.** Trong mặt phẳng (Q) cho tam giác ABC vuông tại A, góc B = $60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài (Q), sao cho SB = a và $SB \perp OA$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (P) qua M và song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM (0 < x < a).

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Tính theo a và x diện tích của hình thang này. Tính x để diện tích này là lớn nhất.

**HD:** b) dùng bất đẳng thức Côsi, kết quả $x = \dfrac{2a}{3}$

**18.** Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho AJ=2JD. M là một điểm di động trong tam giác BCD sao cho (MIJ) song song với AB.

a) Tìm tập hợp điểm M.

b) Tính diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MIJ).

**ĐS:** b) $S = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{7}$

**19.** Cho hình chóp S.ABC.Gọi O là một điểm bên trong tam giác ABC. Qua O vẽ những đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC cắt các mặt (SBC), (SCA), (SAB) tại A', B', C'. Định O để tích OA'.OB'.OC' có giá trị lớn nhất.

**HD:** Chứng minh $\dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC} = 1$

**20.** Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Điểm M là một điểm di động trên SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Chứng minh: (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Tìm các giao điểm H và K của (P) với SB, SD.

Chứng minh $\dfrac{SB}{SH} + \dfrac{SD}{SK} - \dfrac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

**ĐS:** b) giá trị bằng 1 không đổi.

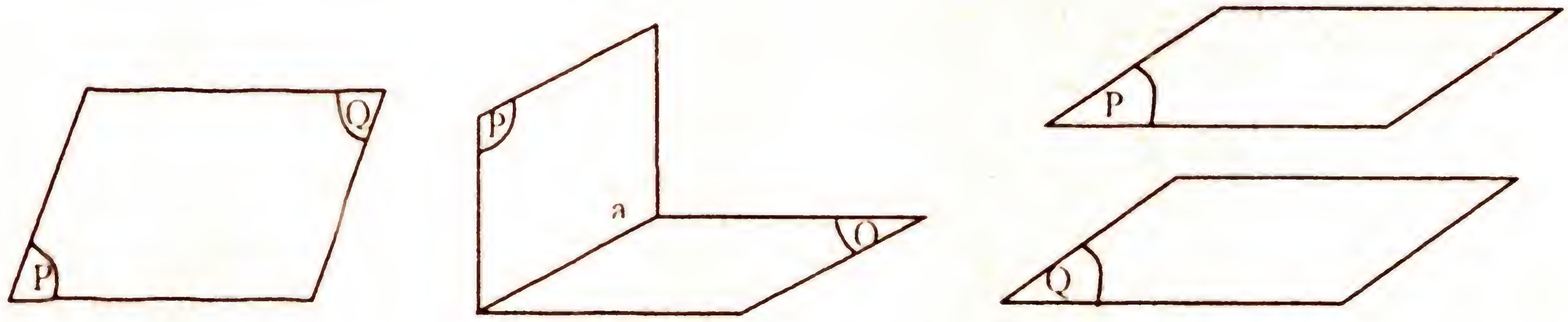
# §3. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Hai mặt phẳng song song

- Hai mặt phẳng song song nếu chúng không có điểm chung.

- Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng: Có 3 vị trí tương đối là 2 mặt trùng nhau, 2 mặt cắt nhau và 2 mặt song song.




$(P) \equiv (Q)$ $\quad$ $(P) \cap (Q) = a$ $\quad$ $(P) // (Q)$

• Định lý cơ bản:

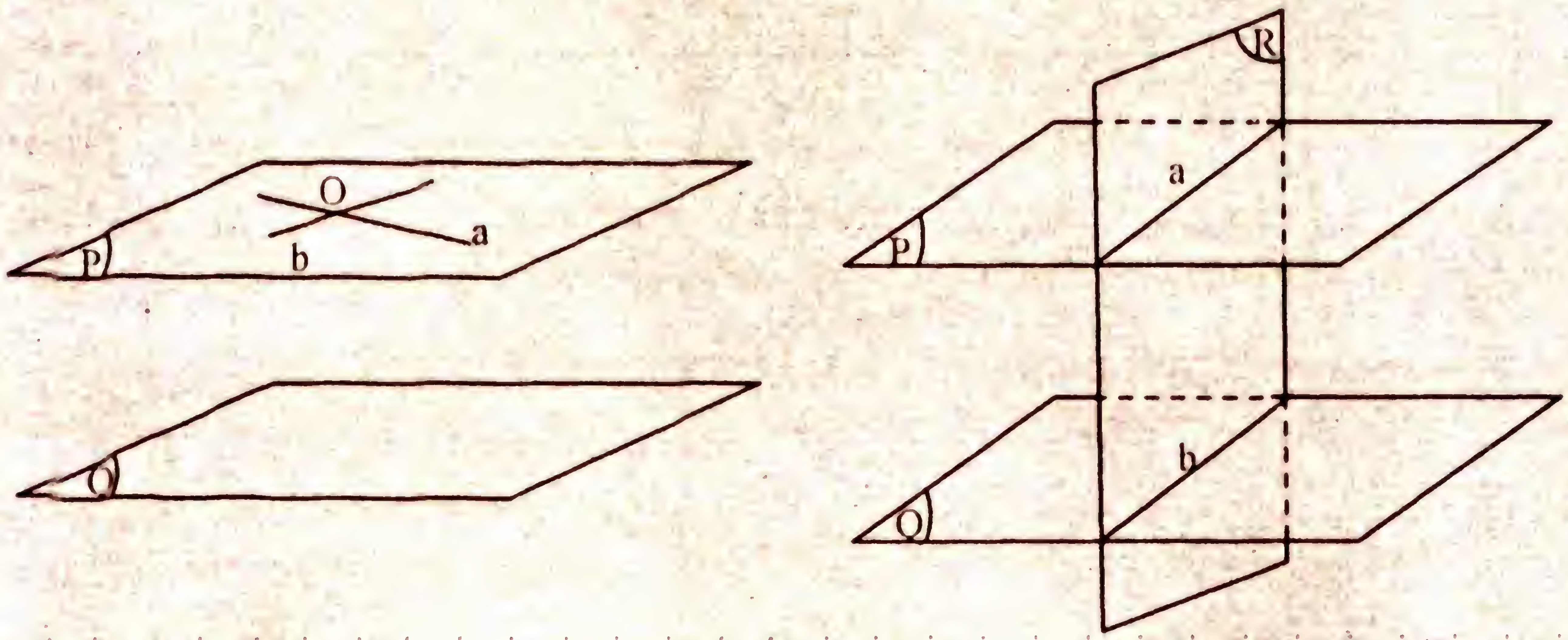
- Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

- Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

- Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với (Q).

- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

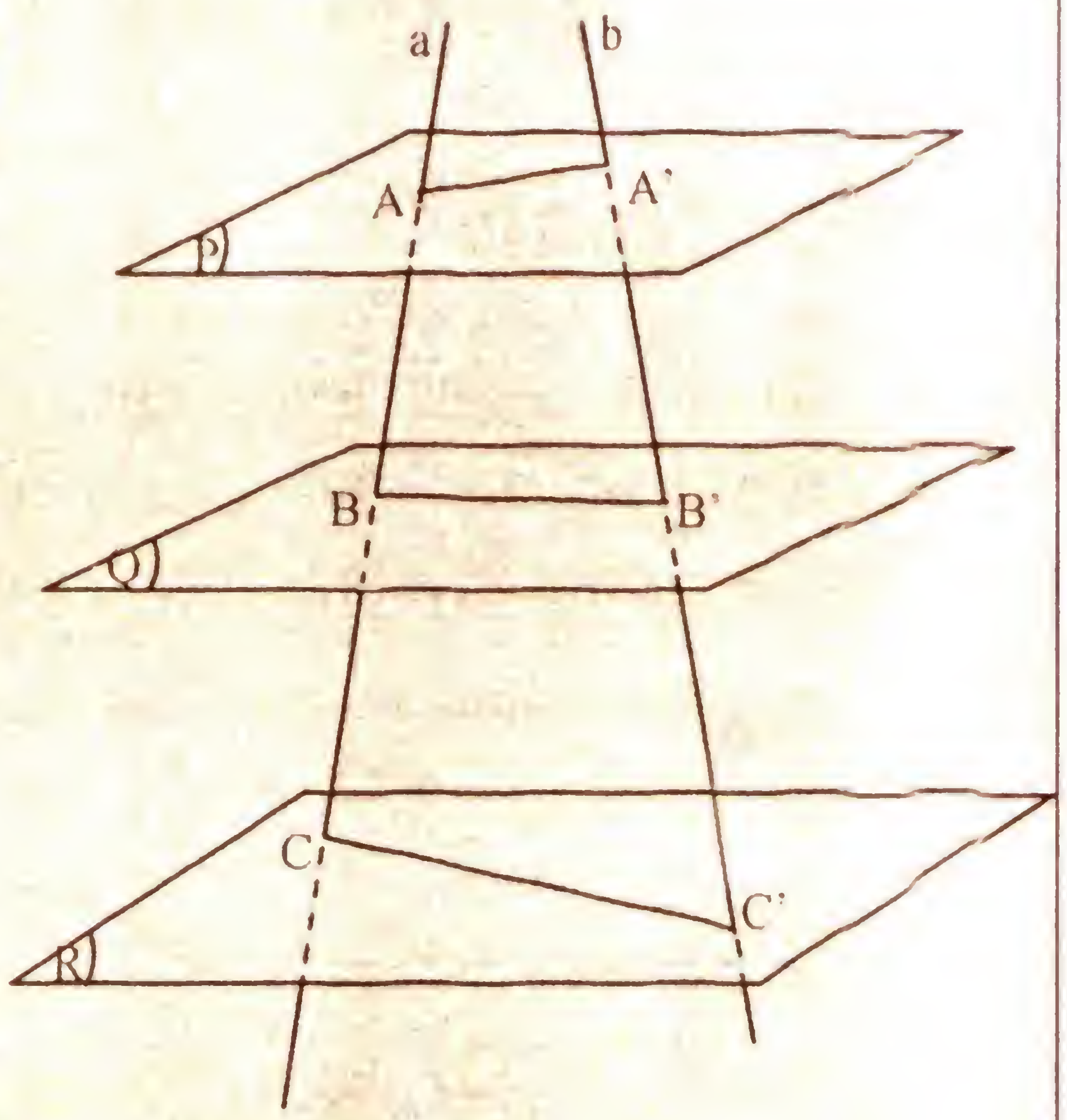
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.



- Định lý Ta-lét:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$




- Định lý Ta-lét đảo:

Giả sử trên hai đường thẳng a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

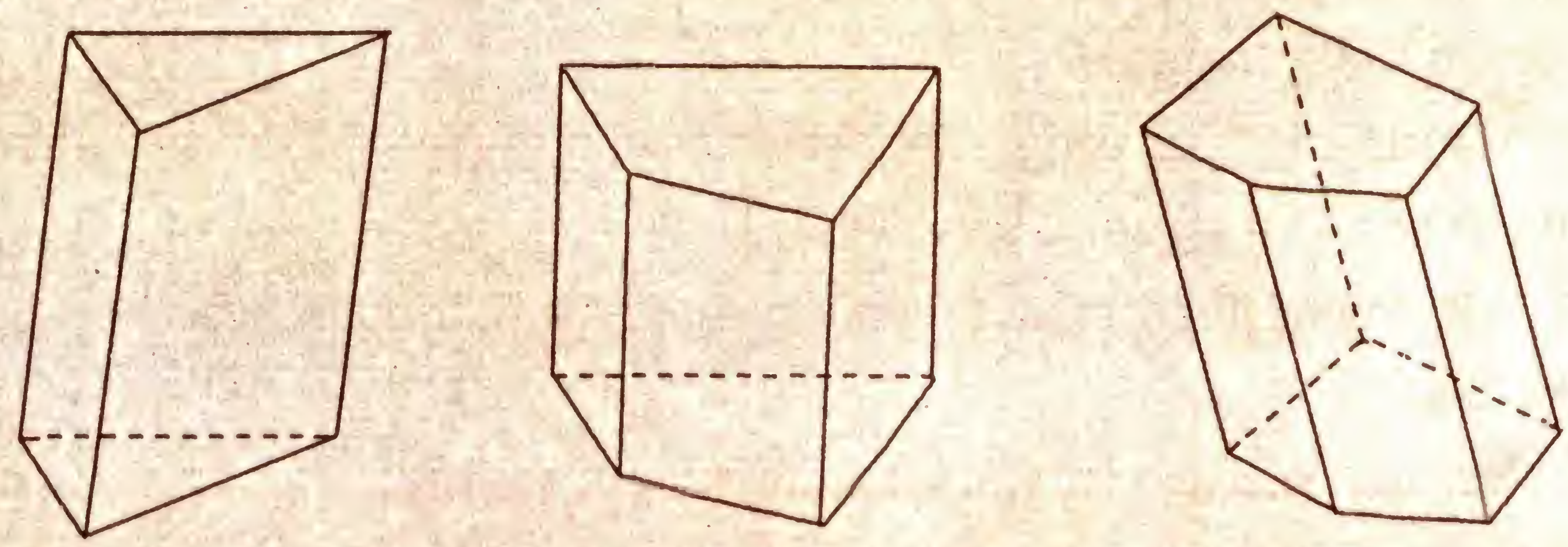
Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Chú ý: Đẳng thức kép để bảo đảm thứ tự của A, B, C và A', B', C' như nhau.

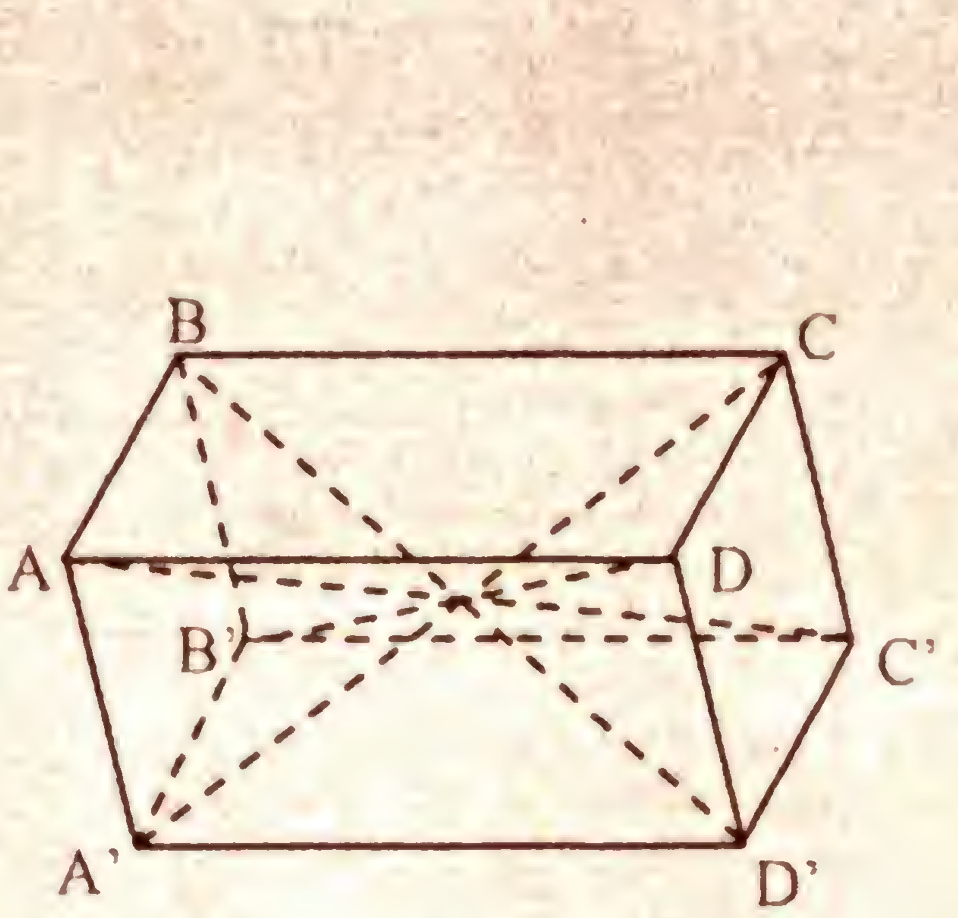
- **HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP**

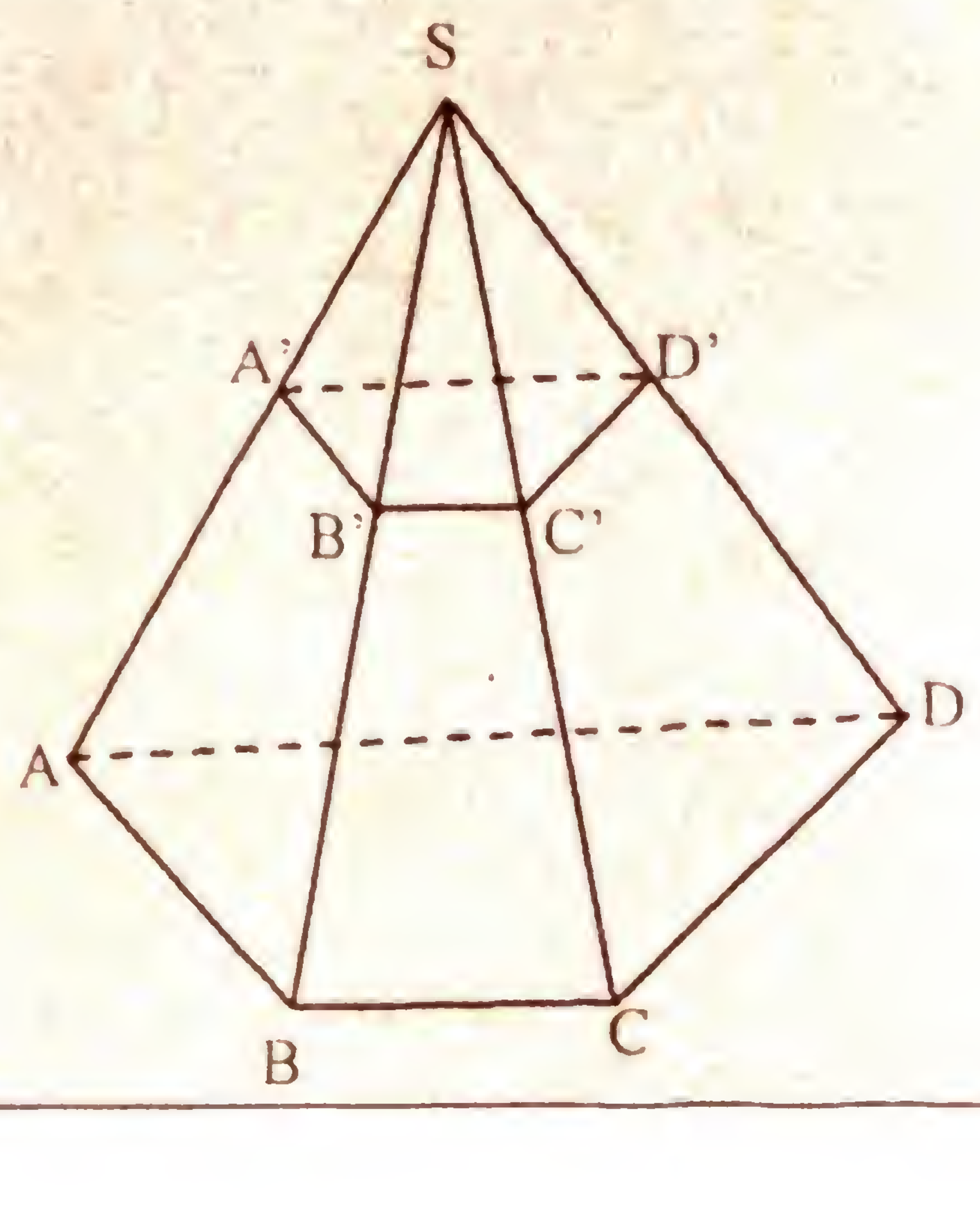
- Hình lăng trụ có 2 đáy là 2 mặt song song và bằng nhau, các cạnh bên song song và bằng nhau.

Nếu đáy là hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì lăng trụ tương ứng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác, ...



- Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



- Hình chóp cụt tạo nên khi cắt hình chóp bởi một mặt phẳng song song với đáy.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...

Hình chóp cụt $A'_1A'_2...A'_n.A_1A_2...A_n$ có:

Hai đáy là hai đa giác có cạnh tương ứng song song và tỉ số các cạnh tương ứng bằng nhau. Các mặt bên là những hình thang. Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CHỨNG MINH SONG SONG

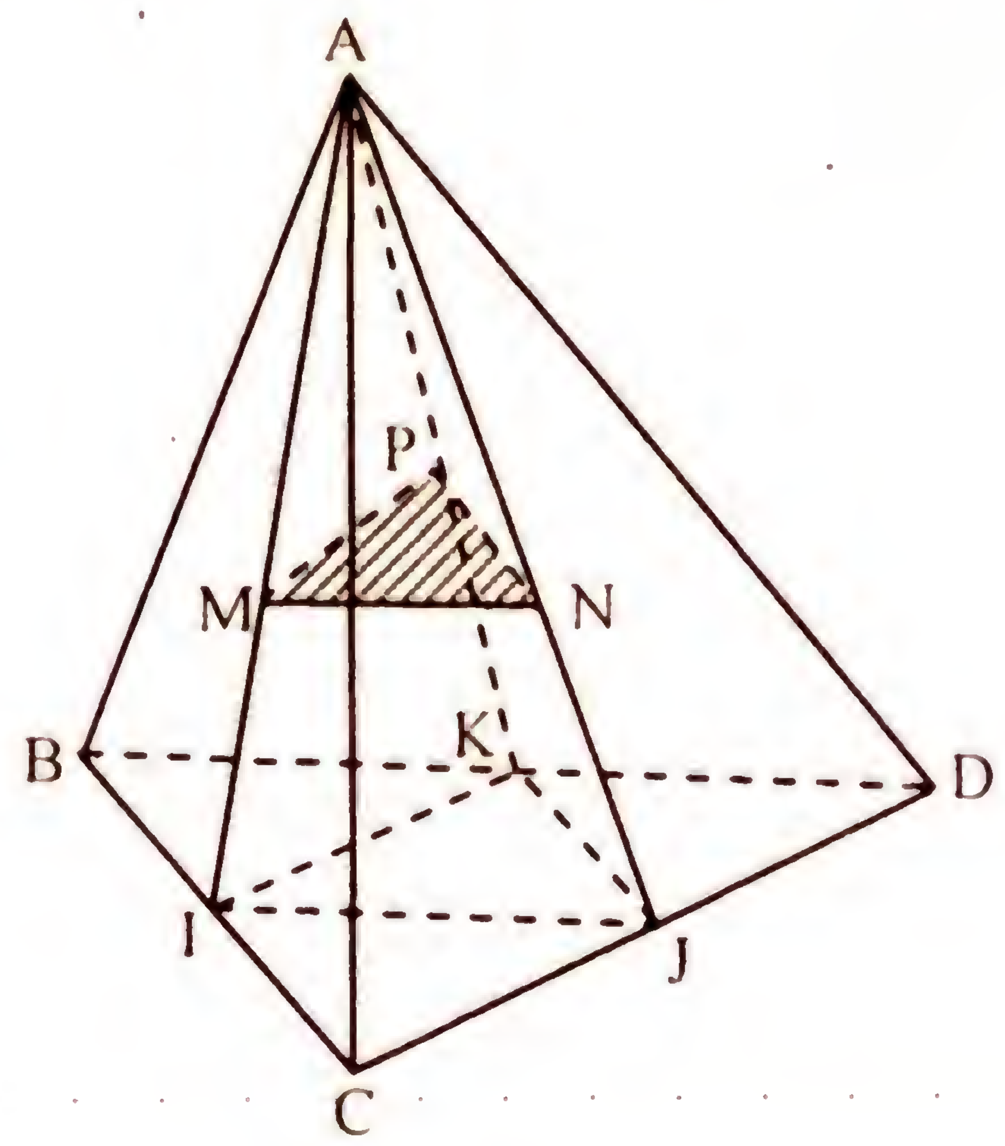
- Hai mặt phẳng song song khi thoả một trong các điều kiện:
  - Hai mặt phẳng không có điểm chung.
  - Khi một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với một mặt phẳng kia.
  - Khi hai đường thẳng cắt nhau của một mặt phẳng lần lượt song song với hai đường thẳng của mặt phẳng còn lại.
  - Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba.
  - Định lý Talet đảo

Chú ý: Chứng minh 2 đường thẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, ngoài các cách đã biết thì có thêm:

- Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau.
- Nếu 2 mặt phẳng song song, mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này thì song song với mặt phẳng kia.

**Ví dụ 1**: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh rằng mp(MNP) song song mp(BCD).

**Giải**




Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và BD.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có:

$$\frac{AM}{AI} = \frac{AN}{AJ} = \frac{AP}{AK} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow MN // IJ$.

Mà $IJ \subset (BCD)$

$\Rightarrow MN // (BCD)$.

Tương tự ta có $NP // (BCD)$.

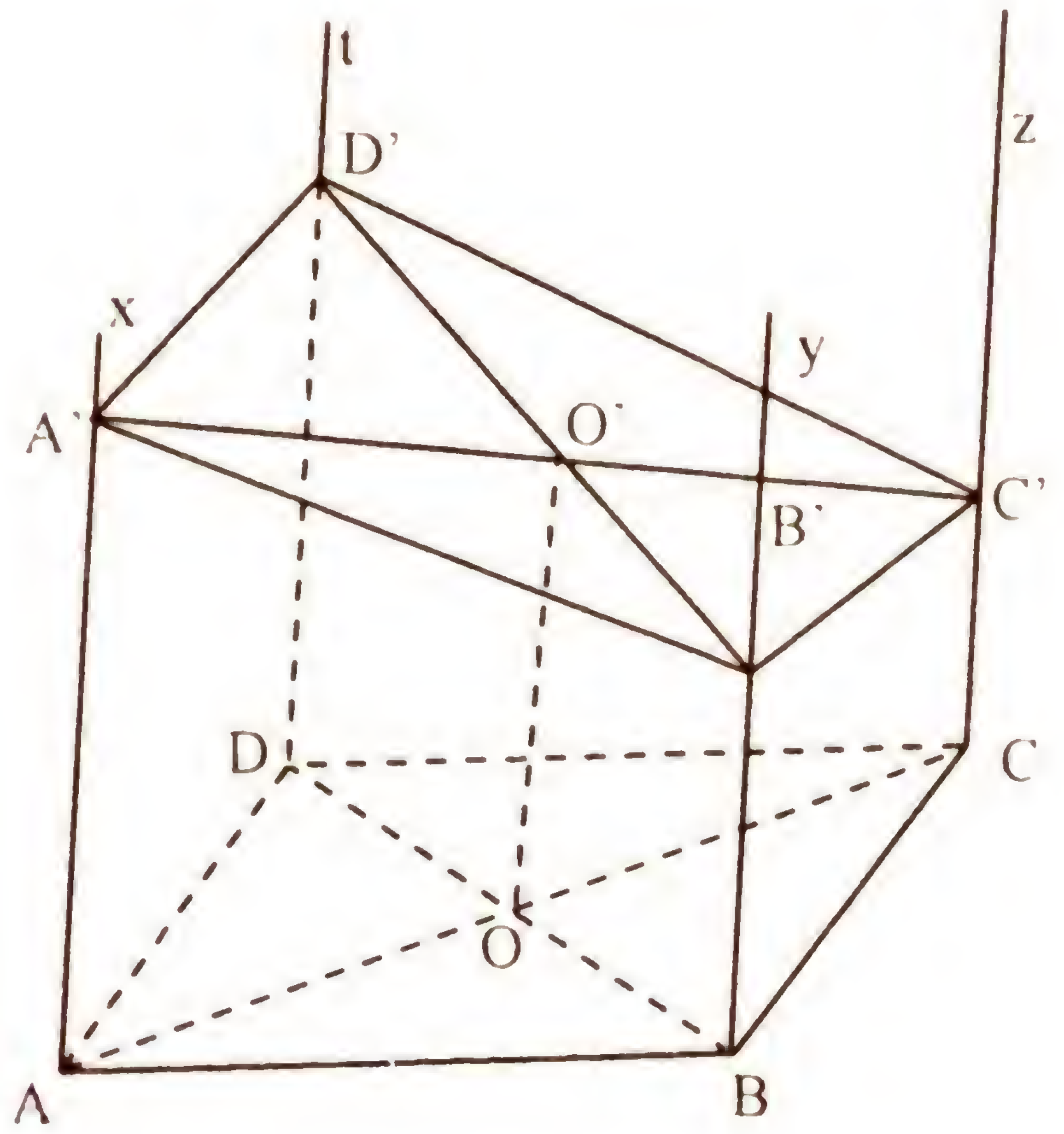
Mp(MNP) chứa 2 đường thẳng cắt nhau MN và NP cùng song song với mp(BCD). Vậy (MNP) // (BCD).

**Ví dụ 2:** Từ bốn đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz và Dt sao cho chúng cắt mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng ($\alpha$) cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A', B', C' và D'. Chứng minh:

a) (Ax, By) // (Cz, Dt), (Ax, Dt) // (By, Cz).

b) Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

c) AA' + CC' = BB' + DD'.




**Giải**

a) Ta có Ax // Dt ⇒ Ax // (Cz, Dt)

AB // DC ⇒ AB // (Cz, Dt)

Vì mp(Ax, By) chứa 2 đường thẳng Ax, AB cắt nhau cùng song song với (Cy, Dt) nên (Ax, By) // (Cz, Dt).

Tương tự (Ax, Dt)// (By, Cz).

b) Mặt phẳng ($\alpha$) cắt 2 cặp mặt phẳng song song (Ax, By) và (Cz, Dt); (Ax, Dt) và (By, Cz) theo các giao tuyến A'B' // D'C', A'D' // B'C' nên A'B'C'D' là hình bình hành.

c) Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, A'B'C'D'.

Ta có OO' là đường trung bình của hình thang AA'C'C nên có

$$OO' = \frac{AA' + CC'}{2}.$$

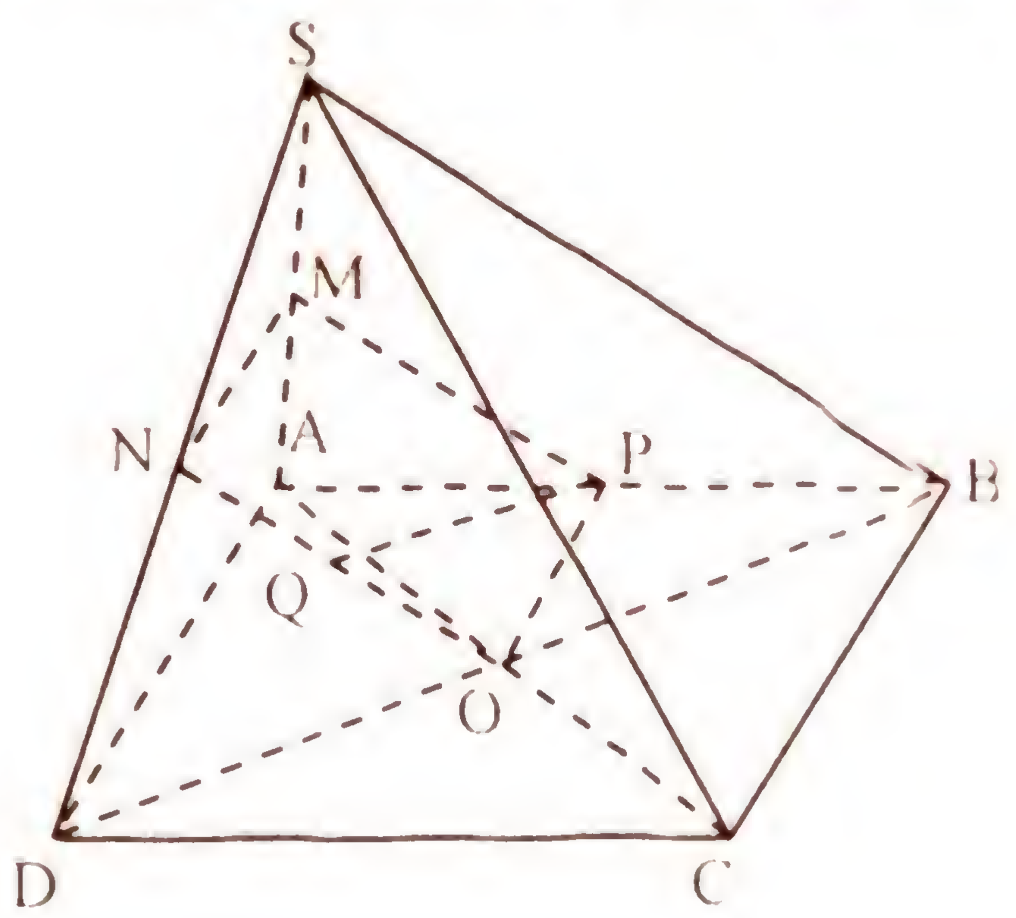
Tương tự chứng minh được $OO' = \dfrac{BB' + DD'}{2}$.

Vậy AA' + CC' = BB' + DD'.

**Ví dụ 3**: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh rằng (OMN) song song với (SBC).

b) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Chứng minh PQ song song với (SBC).




**Giải**

a) Ta có OM // SC (đường trung bình).

⇒ OM // (SBC).

Vì ON // SB (đường trung bình).

⇒ ON // (SBC)

Do đó mp(OMN) chứa 2 đường thẳng OM, ON cắt nhau, cùng song song với mp(SBC) nên (OMN) // (SBC).

b) Ta có: OP // AD (đường trung bình tam giác ABD)

Mà AD // MN, suy ra OP // MN $\Rightarrow$ PQ $\subset$ (OMN) mà (OMN) // (SBC).

Vậy PQ // (SBC).

**Ví dụ 4**: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho MC = 2AM; NF = 2BN. Qua M, N vẽ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại $M_1$, $N_1$.

a) Chứng minh rằng:MN // DE

b) Chứng minh rằng:$M_1N_1$ // mp(DEF);

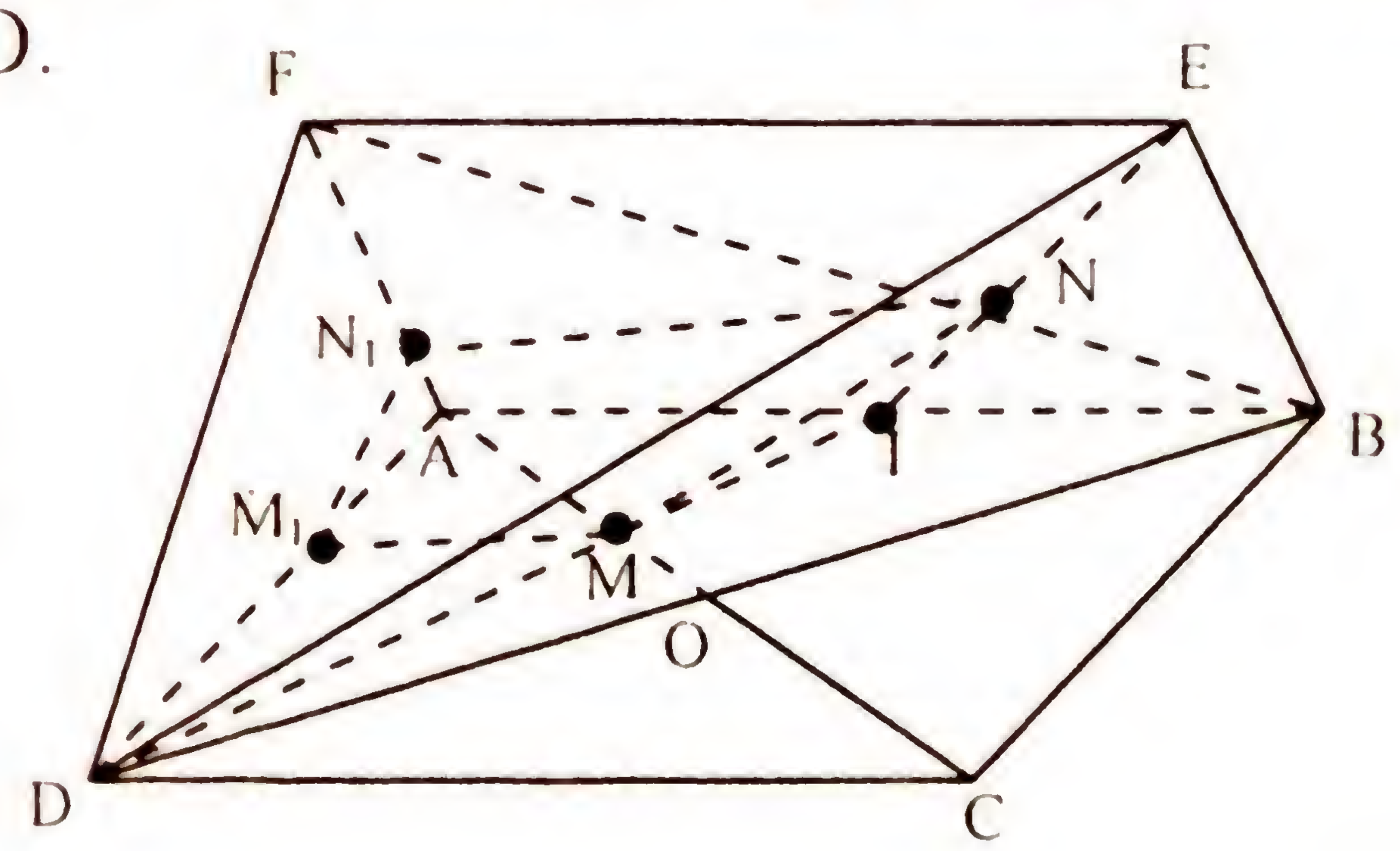
c) Chứng minh rằng: mp($MNN_1M_1$) // mp(DEF).

**Giải**

a) Gọi O là giao điểm của 2 chéo AC và BD.

Vì $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{2}$ nên $AM = \dfrac{2}{3}AO$

Do đó M là trọng tâm tam giác ABD hay M thuộc trung tuyến DI của tam giác ABD. Chứng minh tương tự thì N thuộc đường trung tuyến EI của tam giác ABE. Xét tam giác EID.




Ta có: $\dfrac{IN}{IE} = \dfrac{IM}{ID} \Rightarrow NM$ // DE.

b) Vì $MM_1$ // CD $\Rightarrow \dfrac{AM_1}{M_1D} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{2}$

Vì $NN_1$ // AB $\Rightarrow \dfrac{AN_1}{N_1F} = \dfrac{BN}{NF} = \dfrac{1}{2}$

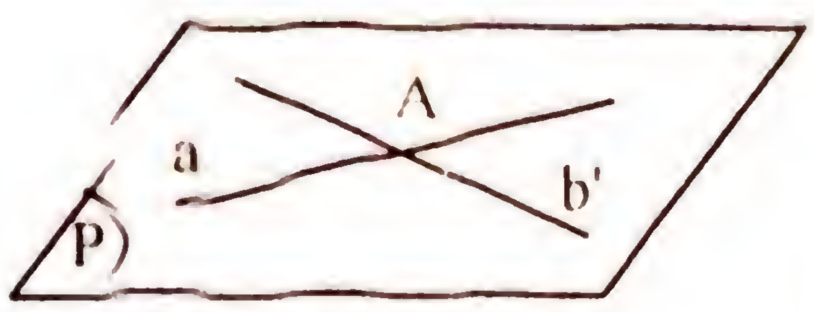
Do đó $\dfrac{AM_1}{M_1D} = \dfrac{AN_1}{N_1F} \Rightarrow M_1N_1$ // DF $\Rightarrow M_1N_1$ // (DEF).

c) Ta có $NN_1$ // EF nên $NN_1$ // (DEF).

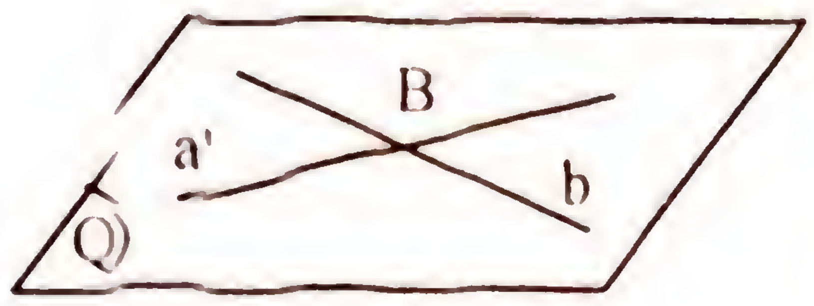
Mặt phẳng ($MM_1N_1N$) chứa 2 đường thẳng cắt nhau $M_1N_1$, $NN_1$ cùng song song với (DEF) nên ($MM_1N_1N$) // (DEF).

**Ví dụ 5**: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

**Giải**



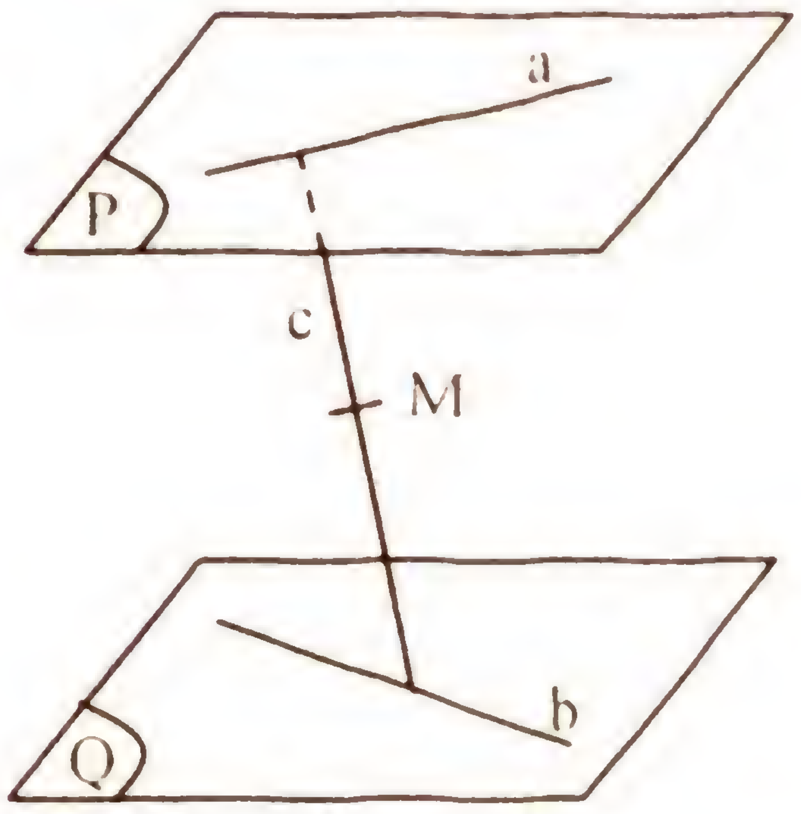

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Qua một điểm A thuộc a, vẽ đường thẳng b' song song với b và qua một điểm B thuộc b vẽ đường thẳng a' song song với a.




Gọi (P) là mp(a; b'), (Q) là mp(b; a') thì (P) // (Q).

Giả sử còn có mp(P') và mp(Q') lần lượt qua a và b và song song với nhau. Khi đó ta có b' // (P') và b // (P) suy ra giao tuyến a của (P) và (P') cũng song song với b, trái với giả thiết. Vậy (P') trùng (P) và do đó (Q') trùng (Q): đpcm.

**Ví dụ 6:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Chứng minh rằng nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.




**Giải**

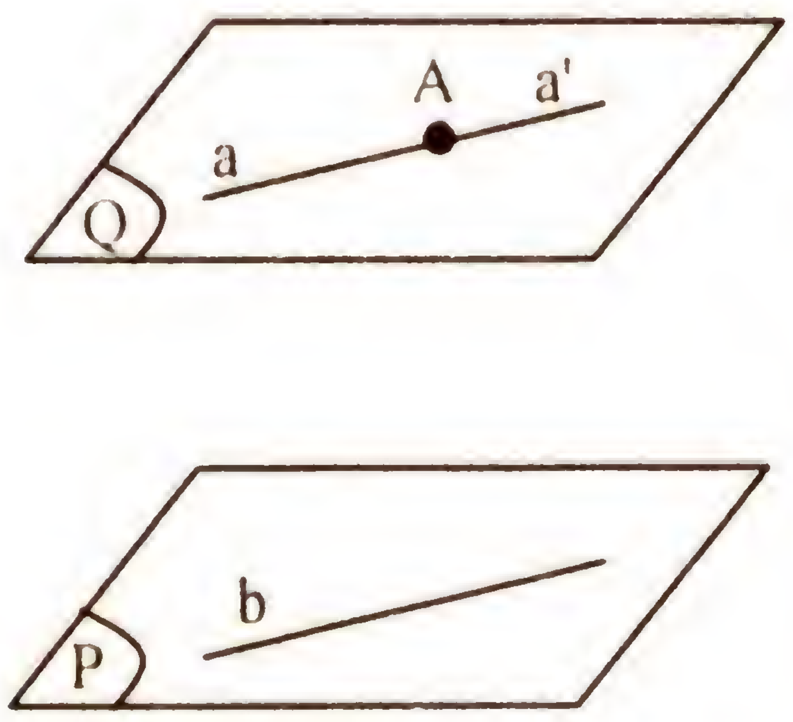
Giả sử c = mp(M; a) ∩ mp(M; b).
Ta cần chứng minh c cắt cả a và b.
Vì c và a phân biệt cùng nằm trên một mặt phẳng nên hoặc c // a hoặc c cắt a. Cũng vậy, hoặc c // b hoặc c cắt b.

Không thể xảy ra ra đồng thời c // a, c // b vì a và b chéo nhau. Giả sử c song song với a thì phải cắt b, tức là c đi qua một điểm của mp(Q) và song song với a, suy ra c phải thuộc mp(Q) và do đó M thuộc (Q) ( trái với giả thiết). Tương tự, không thể có c song song với b. Tóm lại c phải cắt cả a và b.

Giả sử có đường thẳng c' khác c đi qua M, cắt cả a và b thì a và b đồng phẳng: Vô lí.

**Ví dụ 7:** Cho mặt phẳng (P) và một điểm A nằm ngoài (P). Chứng minh rằng tất cả những đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều cùng nằm trong một mặt phẳng (Q) song song với (P).

**Giải**



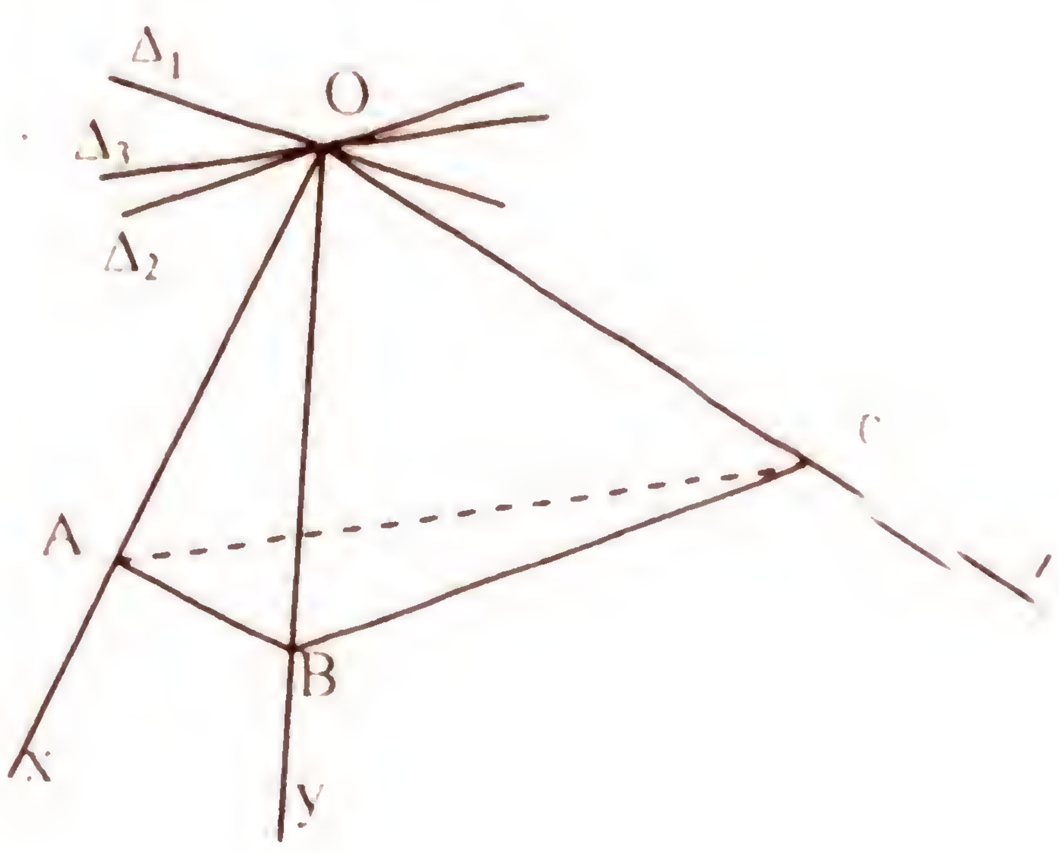

Gọi (Q) là mặt phẳng duy nhất đi qua A và song song với (P). Giả sử a là một đường thẳng bất kì qua A và song song với (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a nằm trên (Q).

Vì a // (P) nên có đường thẳng b thuộc (P) sao cho a và b song song. Vậy mp(a; b) cắt (Q) theo giao tuyến a' qua A và song song với b. Do đó a trùng với a', tức là a nằm trên (Q).

**Ví dụ 8**: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Chứng minh rằng các tia phân giác ngoài của các góc xOy, yOz và zOx đồng phẳng.

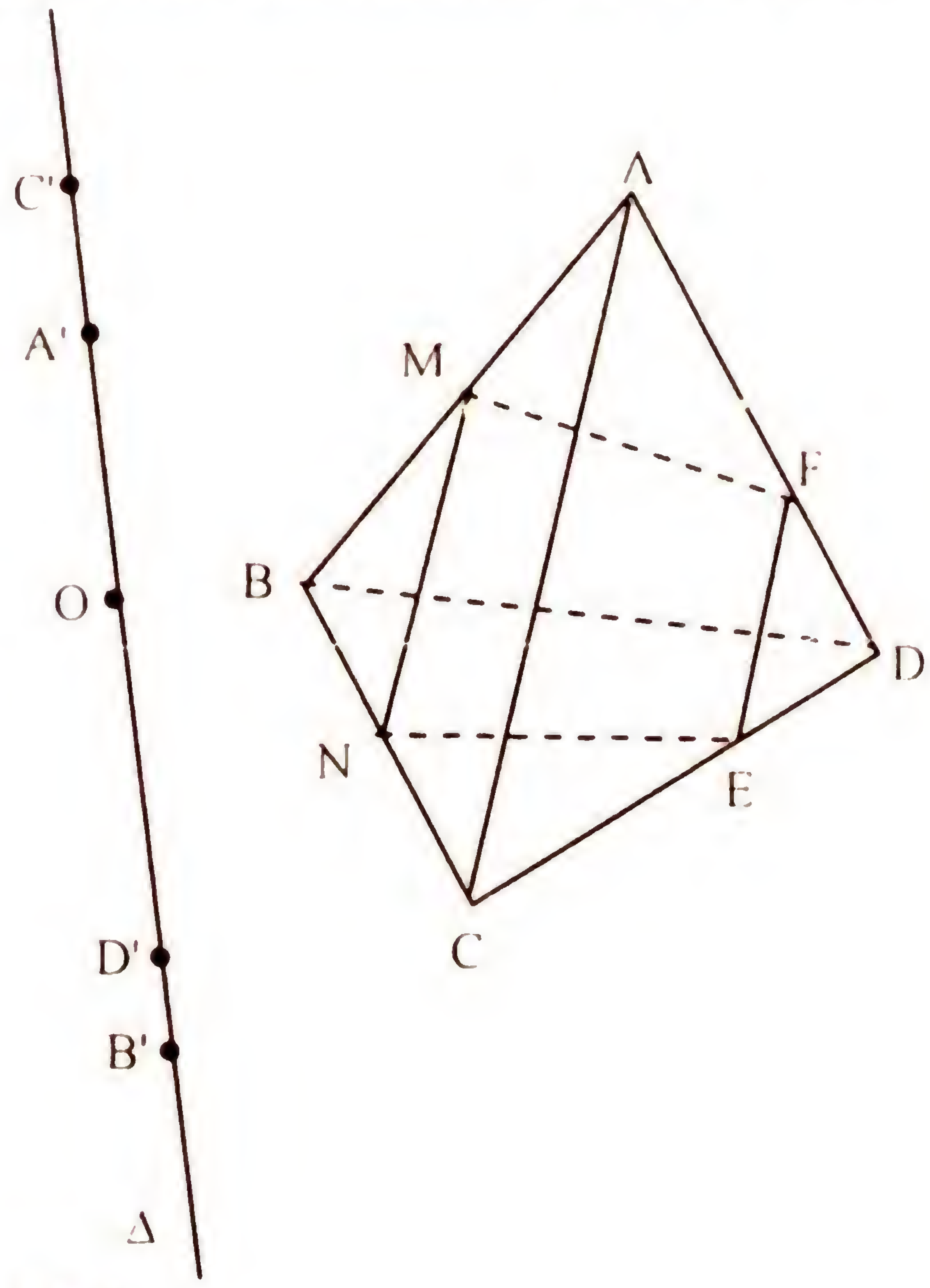
**Giải**

Gọi $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ lần lượt là ba đường phân giác ngoài của các góc xOy, yOz, zOx. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho OA = OB = OC, tam giác cân OAB, OBC, OCA tại O nên phân giác ngoài tại đỉnh song song với cạnh đáy, do đó $\Delta_1$ // AB, $\Delta_2$ // BC, $\Delta_3$ // CA.



Do đó $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ // (ABC) mà chúng qua O nên $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng phẳng trên mặt phẳng qua O, song song với (ABC).

**Ví dụ 9**: Cho tứ diện ABCD và bốn điểm M, N, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng: Nếu bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng thì $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA} = 1$




**Giải**

Vẽ đường thẳng $\Delta$ bất kì cắt mặt phẳng (MNEF) tại một điểm O. Bốn mặt phẳng lần lượt qua A, B, C, D và đồng thời song song với mặt phẳng (MNEF) cắt đường thẳng $\Delta$ theo thứ tự tại A', B', C', D'.

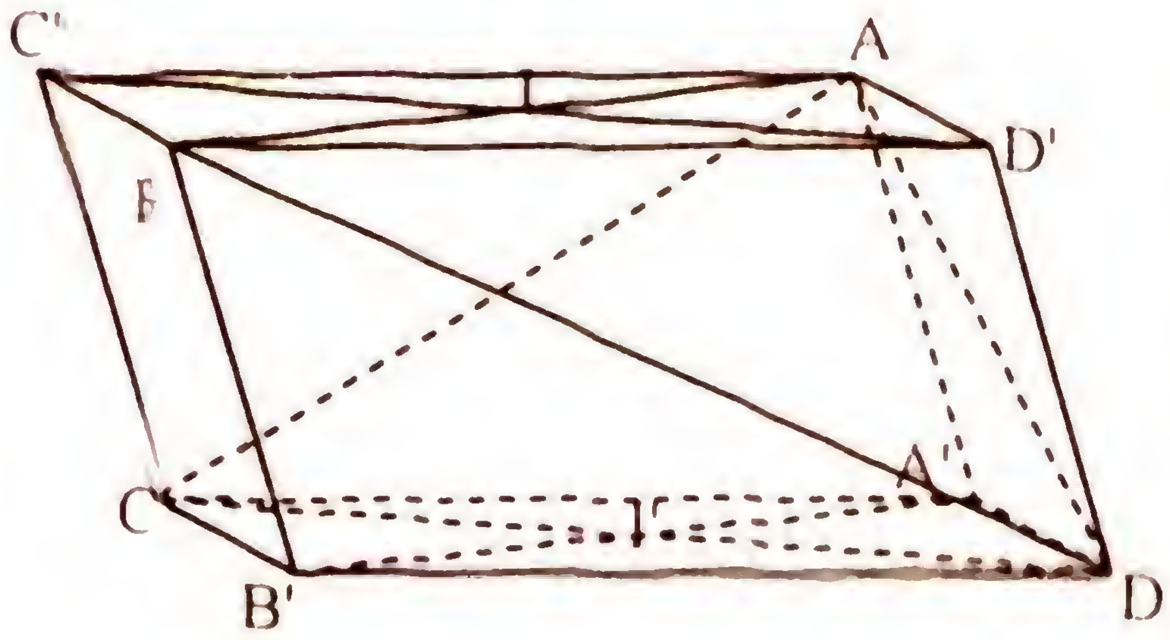
Theo định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'},\ \frac{NB}{NC} = \frac{OB'}{OC'}$$

$$\frac{EC}{ED} = \frac{OC'}{OD'},\ \frac{FD}{FA} = \frac{OD'}{OA'}$$

Vậy: $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA} = \frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD'}.\frac{OD'}{OA'} = 1$.

**Ví dụ 10**: Cho tứ diện ABCD. Hãy dựng một hình hộp ngoại tiếp tứ diện đó (tức là dựng một hình hộp sao cho mỗi cạnh của tứ diện là đường chéo của một mặt của hình hộp).




**Giải**

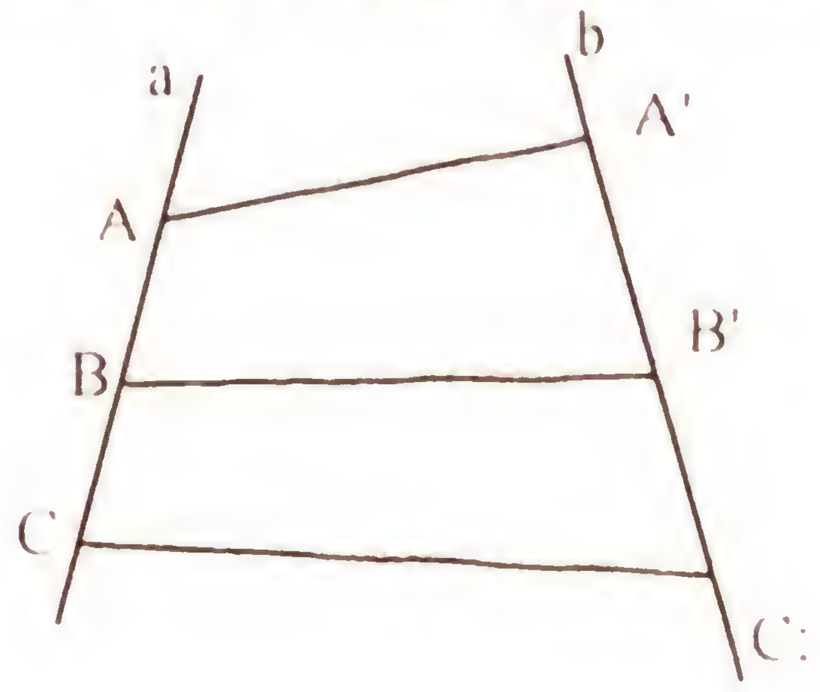
Qua mỗi cạnh của hình tứ diện ABCD ta dựng một mặt phẳng song song với cạnh đối diện. Khi đó sáu mặt phẳng vừa dựng sẽ cắt nhau tạo thành một hình hộp cần tìm có sáu mặt bên nằm trên sáu mặt phẳng nói trên.

Cách khác: Qua trung điểm I của AB ta dựng đoạn thẳng C'D' bằng đoạn CD sao cho C'D' // CD và I là trung điểm của C'D'. Qua trung điểm I' của CD ta dựng đoạn A'B' bằng đoạn AB sao cho A'B' // AB và I' là trung điểm của A'B'. Khi đó AC'BD'.A'CB'D là hình hộp cần dựng.

**Ví dụ 11**: Chứng minh định lý Ta-let đảo: Trên 2 đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$, khi đó ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên 3 mặt phẳng song song, do đó chúng cùng song song với một mặt phẳng.

**Giải**

Vì a và a' chéo nhau nên hai đường thẳng AA' và BB' chéo nhau nên có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song, lần lượt đi qua AA' và BB'. Qua C dựng mp(R) song song với mp(P) cắt a' tại C''. Do (P), (Q) , (R) đôi một song song nên theo định lý Ta-let ta có:



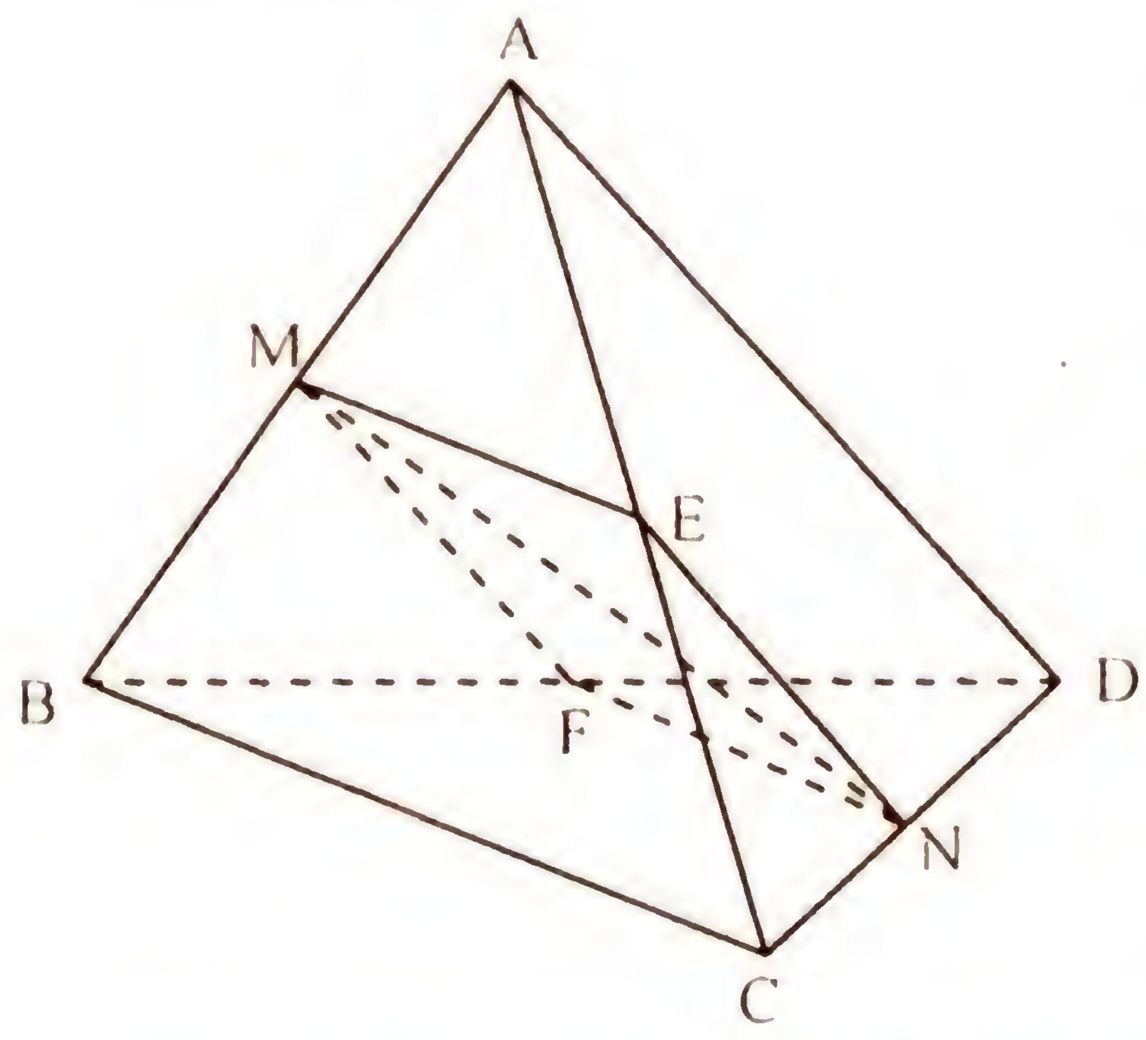

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C''} = \frac{CA}{C''A'}$$

Mà $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$

nên ta có B'C'' = B'C' và C''A' = C'A'.

Vậy C'' ≡ C'. Suy ra ba đường thẳng AA', BB', CC' nằm trên ba mặt phẳng song song. Do đó chúng cùng song song với một mặt phẳng.

**<u>Ví dụ 12:</u>** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi mặt phẳng (P) qua điểm M, song song với cả AD và BC có đi qua trung điểm N của CD không?




**Giải**

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng AD và song song với BC; (R) là mặt phẳng chứa đường thẳng BC và song song với AD. Ta có ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) đôi một song song, nên theo định lí Ta-let ta có:

$$\frac{AM}{DN'} = \frac{MB}{N'C} = \frac{BA}{CD}$$

với N' = CD ∩ (P).

Mặt khác AM = BM nên N' là trung điểm của CD, tức là N' trùng với N.

Vậy mp(P) đi qua N.

## DẠNG 2: LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

- Hình lăng trụ có hai mặt đáy là hai hình đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau, có các mặt bên là những hình bình hành, có các cạnh bên song song và bằng nhau.

- Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

- Trong mỗi hình hộp, bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, điểm cắt nhau đó gọi là tâm hình hộp.

Chú ý: Sử dụng các quan hệ song song, giao tuyến song song, quan hệ các yếu tố trong lăng trụ và hình hộp, kết hợp với kiến thức hình học phẳng để giải toán.

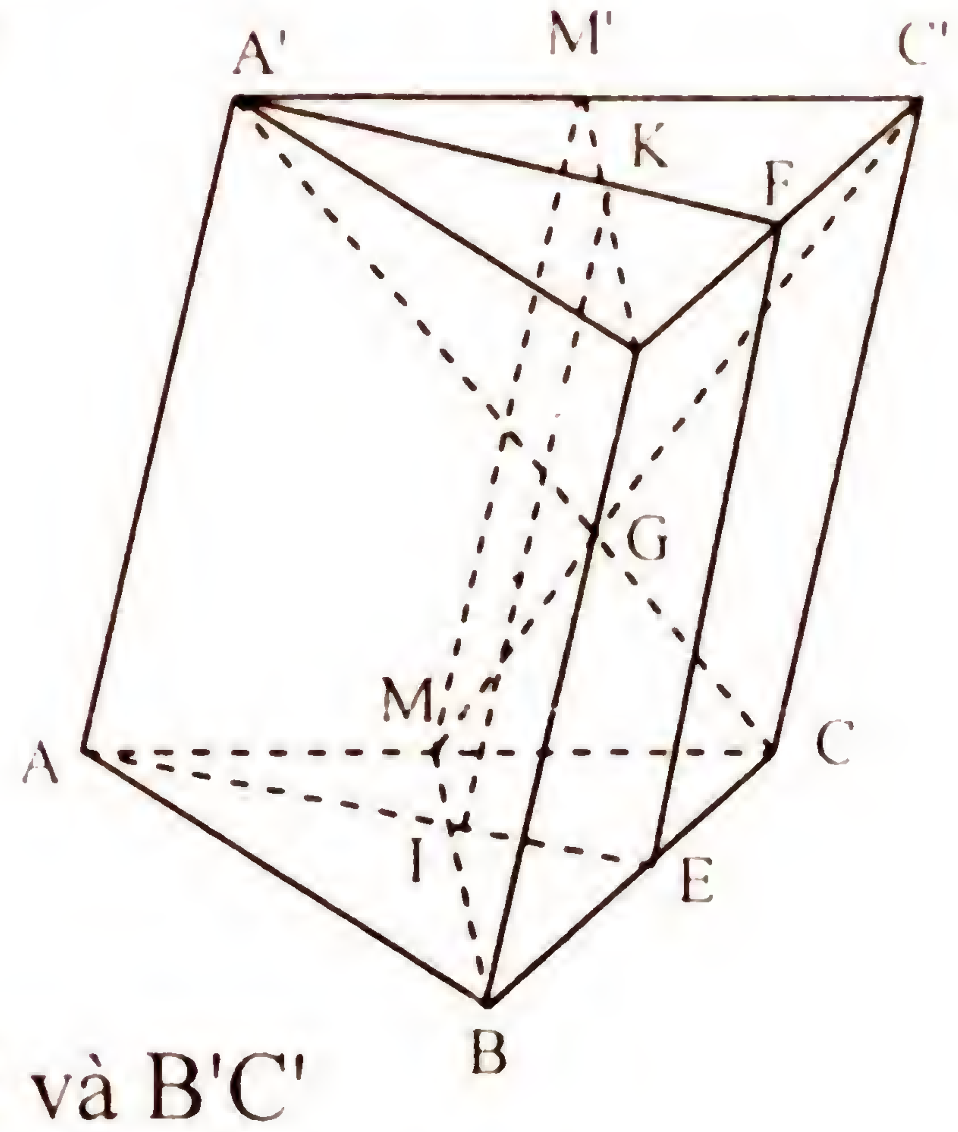
**Ví dụ 1**: Cho lăng trụ tam giác A'B'C'.ABC. Gọi I, G và K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC' và A'B'C'.

Chứng minh: a) (IGK) // (BB'C'C) b) (A'GK) // (AIB').

**Giải**

a) Gọi M và M' tương ứng là trung điểm của AC và A'C'.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có:




$$\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG \,//\, BC'$$

$\Rightarrow IG$ // (BB'CC')

$$\frac{MI}{MB} = \frac{M'K}{M'B'}$$

và MM' // BB' $\Rightarrow$ IK // BB'.

$\Rightarrow$ IK // (BB'C'C).

Vậy (IGK) // (BB'C'C).

b) Gọi E và F tương ứng là trung điểm của BC và B'C'

$\Rightarrow$ B'E // CF $\Rightarrow$ B'E // (A'CF).

Mà AE // A'F $\Rightarrow$ AE // (A'CF).

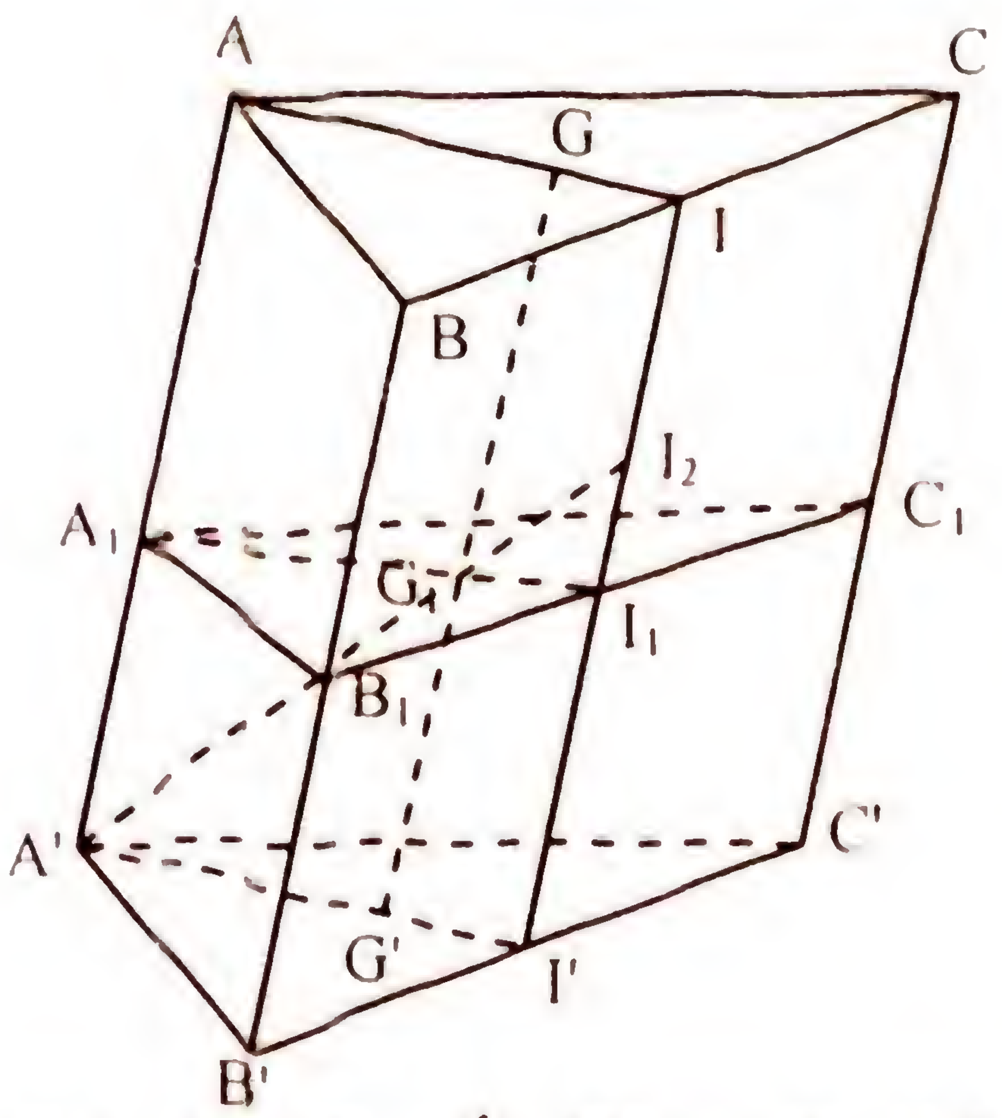
Do đó (AEB') // (A'CF) hay (AIB') // (A'GK).

**Ví dụ 2:** Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Một mặt phẳng ($\alpha$) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại $A_1$, $B_1$, $C_1$ và $G_1$. Chứng minh rằng:

a) GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ.

b) $G_1$ là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

c) $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$; $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.




**Giải**

a) Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B'C' thì II' song song và bằng AA' nên tứ giác AII'A' là hình bình hành, do đó AI song song và bằng A'I'.

Ta có $AG = \frac{2}{3}AI$, $A'G' = \frac{2}{3}A'I'$,

mà AI = A'I' nên AG song song và bằng A'G'.

Do đó tứ giác AGG'A' là hình bình hành.

Vậy GG' song song và bằng AA'.

b) $B_1C_1$ cắt II' tại $I_1$ thì $I_1$ là trung điểm của $B_1C_1$ và ta có $AA_1 \,//\, GG_1 \,//\, II_1$

nên: $\frac{G_1A_1}{A_1I_1} = \frac{GA}{AI} = \frac{2}{3}$. Vậy $G_1$ là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

c) Gọi $I_2$ là giao điểm của hai đường thẳng $A'G_1$ và II'.

Ta có $I_1I_2 = \frac{1}{2}A_1A'$, $I_1I' = \frac{1}{2}(B_1B' + C_1C')$, $G_1G' = \frac{2}{3}I_2I'$

nên: $G_1G' = \frac{2}{3}I_2I' = \frac{2}{3}(I_2I_1 + I_1I') = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}A_1A' + \frac{1}{2}(B_1B' + C_1C')\right]$

$$= \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C').$$

Tương tự $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

**Ví dụ 3**: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có các cạnh bên là AA', BB', CC'. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC và B'C'.

a) Chứng minh rằng AI // A'I'.

b) Tìm giao điểm của IA' với mặt phẳng (AB'C').

c) Chứng minh giao tuyến của (AB'C') và (A'BC) song song với BC.

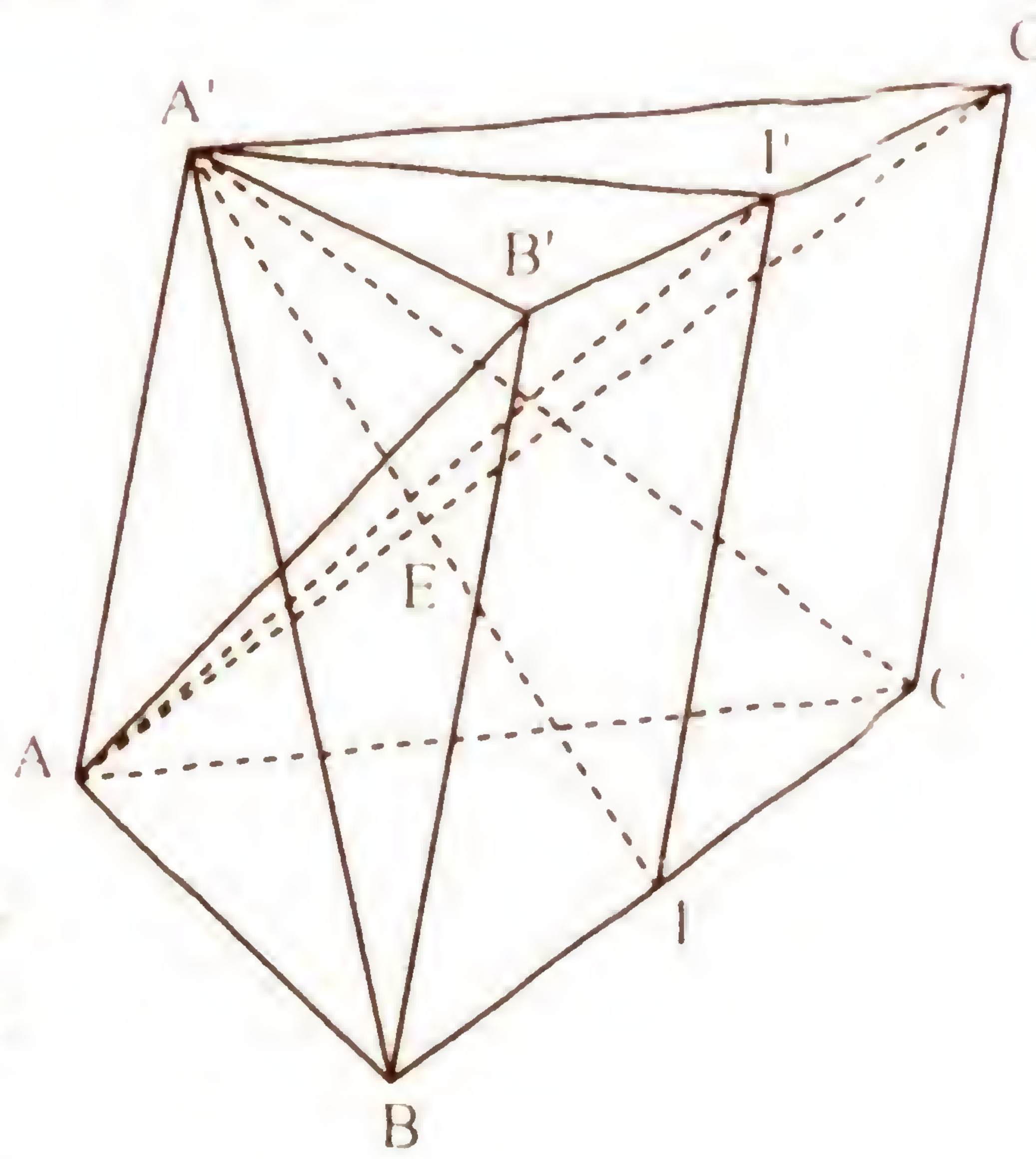
**Giải**

a) Ta có II' // BB' và II' = BB'. Mà AA' // BB' và AA' = BB'

nên: AA' // II' và AA' = II'

⇒ AA'I'I là hình bình hành.

Vậy AI // A'I'.




b) Trong mp(AA', II'): IA' ∩ AI' = E

thì E ∈ IA' ; E ∈ AI'

⇒ E ∈ IA', E ∈ (AB'C').

Do đó IA' ∩ (AB'C') = E.

c) Ta có E thuộc 2 mp (AB'C') và (A'BC). Ba mặt phẳng (AB'C'), (A'BC), (BB'CC') cắt nhau theo 3 giao tuyến BC, B'C', Et phân biệt.

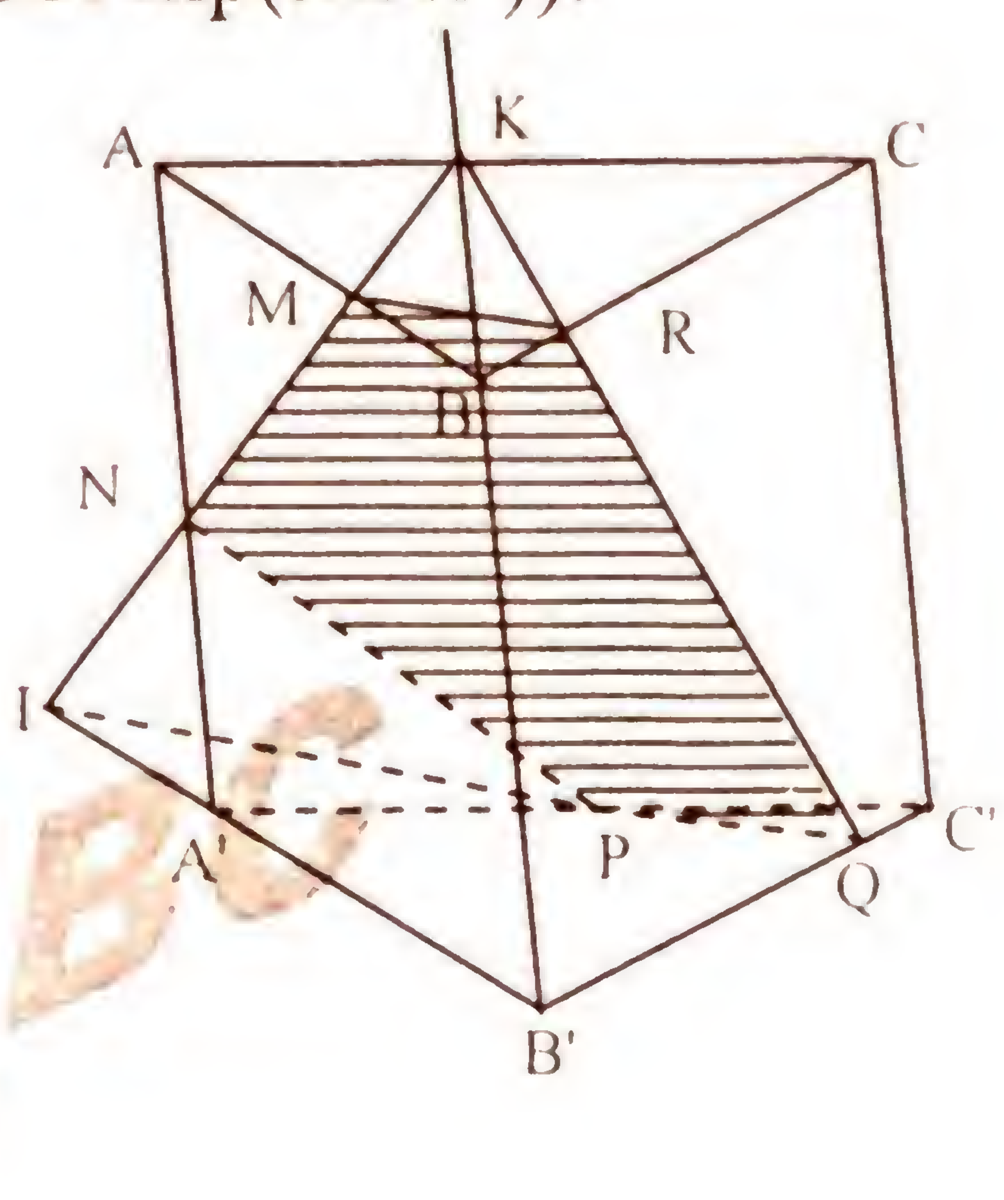
Vì BC // B'C' nên giao tuyến Et // BC, B'C'.

**Ví dụ 4:** Chứng minh rằng nếu hình lăng trụ tam giác có thiết diện là một hình ngũ giác thì hai cạnh của ngũ giác đó song song.

**Giải**

Vì hình lăng trụ tam giác có 5 mặt, nên nếu thiết diện là một ngũ giác thì 5 cạnh ngũ giác đó lần lượt nằm trên 5 mặt của lăng trụ. Do đó có hai cạnh nằm trên hai mặt đáy của lăng trụ là 2 giao tuyến song song.

**Ví dụ 5**: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AA', A'C'. Hãy dựng thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi mp(MNP)).




**Giải**

Trong mp(AA'; BB') đường thẳng MN cắt A'B' và BB' lần lượt tại I và K. Trong mp(A'B'C'), IP cắt B'C' tại Q, và trong mp(BB'; CC') KQ cắt BC tại R.

Vậy thiết diện là ngũ giác MNPQR.

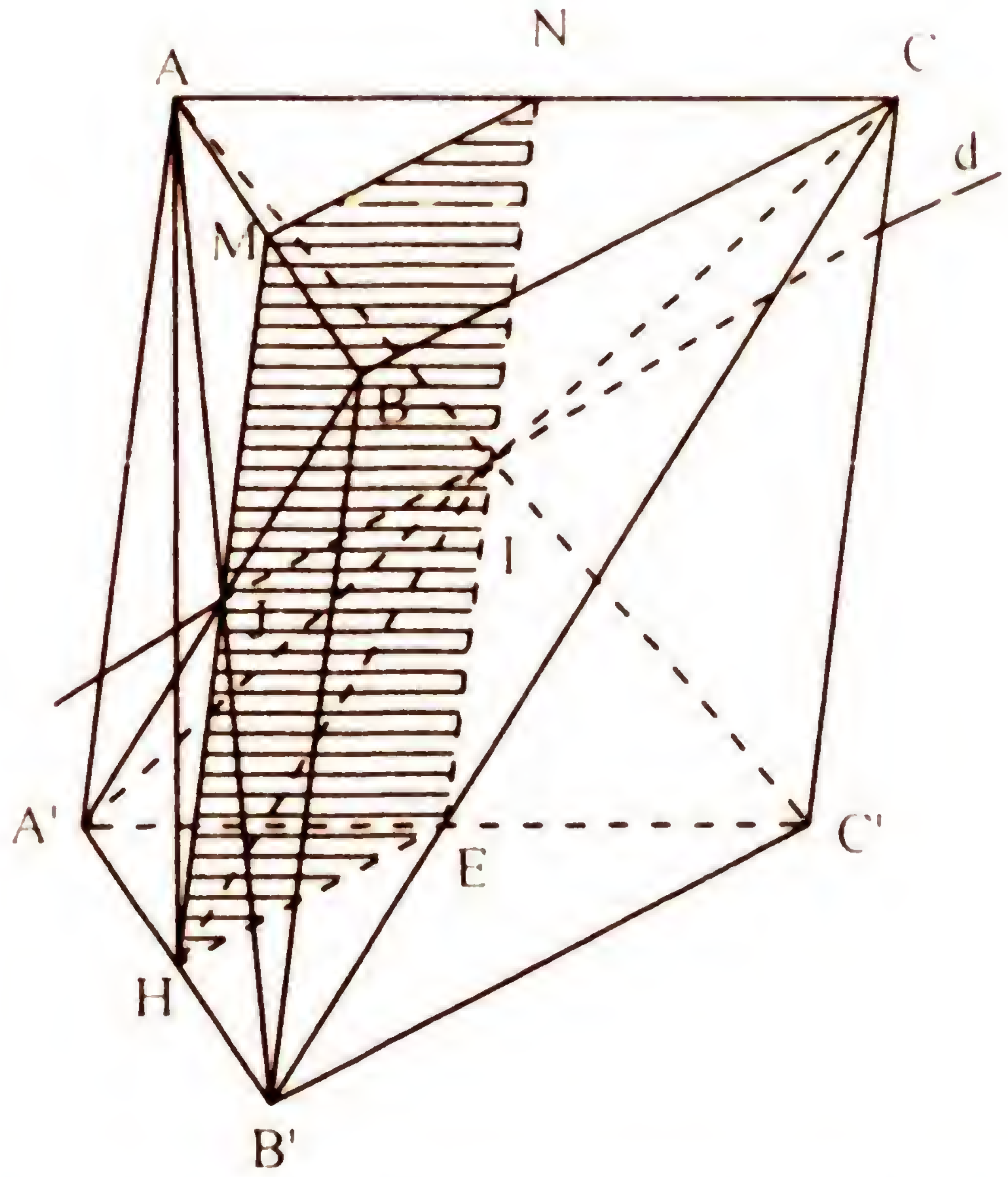
**Ví dụ 6**: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

a) Chứng minh rằng đường thẳng CB' song song với mp(AHC').

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mp(BB'C'C).

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mp(H; d).

**Giải**



a) Gọi I là tâm của hình bình hành AA'C'C. Xét tam giác A'B'C thì HI là một đường trung bình của nó, nên CB' // HI. Mặt khác HI nằm trong mặt phẳng (AHC') nên CB' // mp(AHC').

b) Gọi J là tâm của hình bình hành AA'B'B. Ta có I, J là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Vậy giao tuyến d của chúng là đường thẳng IJ. Vì d // B'C' nên d // (BB'C'C).

c) Đường thẳng HJ cắt AB tại M. Ta có AA' // HM, suy ra AA' // mp(H; d) nên mp(AA'C'C) cắt mp(H; d) theo giao tuyến qua I và song song với AA'. Giao tuyến này cắt AC và A'C' lần lượt tại N và E. Vậy thiết diện là hình bình hành MNEH.

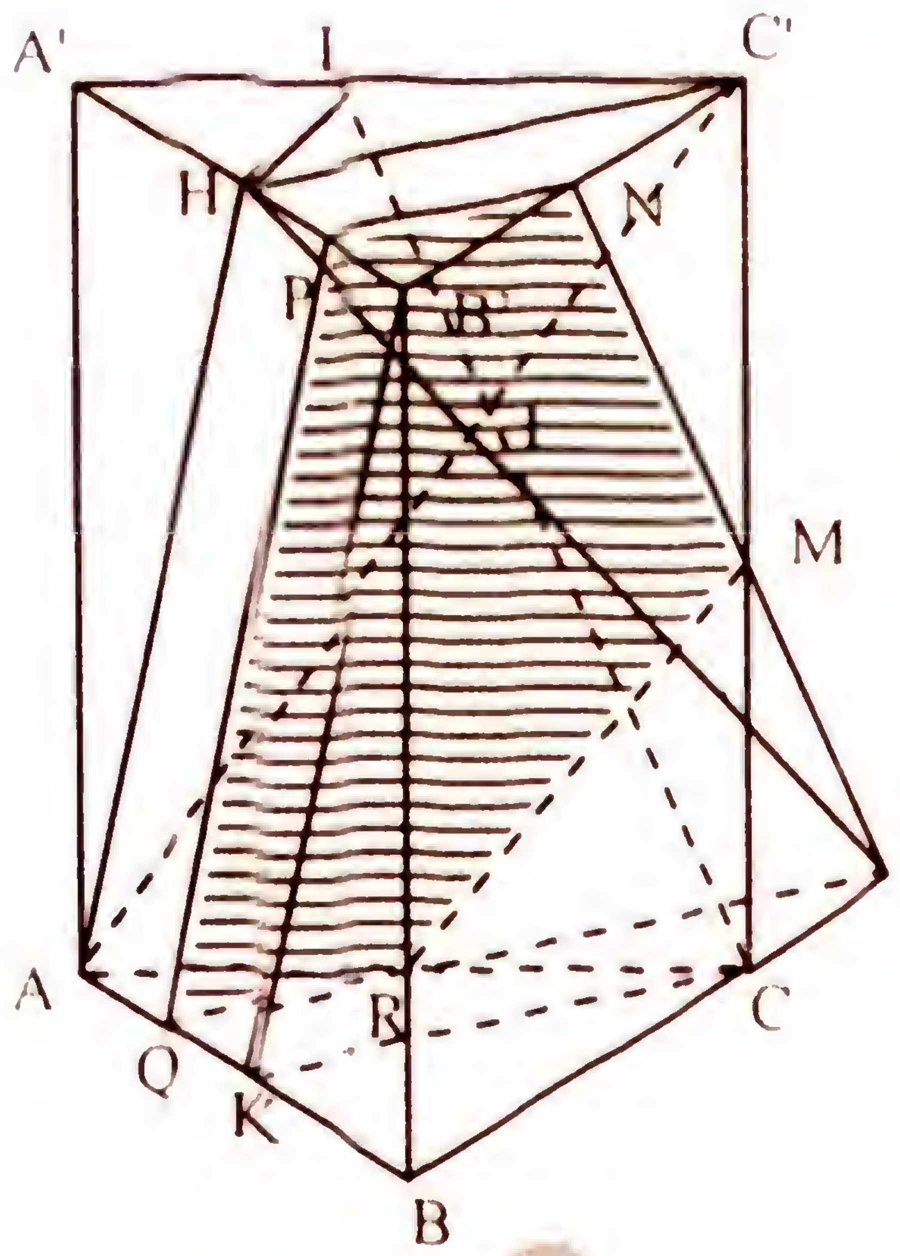
**Ví dụ 7**: Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của A'B'.

a) Chứng minh CB' song song với mặt phẳng (AHC').

b) Tìm giao điểm của AC' với (BCH).

c) Mặt phẳng ($\alpha$) qua trung điểm M của CC' và song song với AH và CB'. Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia cạnh tương ứng của lăng trụ.

**Giải**



a) Gọi K là trung điểm của AB, ta có:

B'K // AH $\Rightarrow$ B'K // (AHC'),

KC // HC' $\Rightarrow$ KC // (AHC')

Mặt phẳng (B'KC) chứa 2 đường thẳng B'K, KC cùng song song với mp(AHC') nên (B'KC) // (AHC').

mà CB' $\subset$ (B'KC) nên CB' // (AHC').

b) Mặt phẳng (BCH) cắt (A'B'C') theo giao tuyến HL // BC (vì 2 đáy song song). Nối CL cắt AC' tại I, thì I là giao điểm của AC' với mặt phẳng (BCH).

c) Ta có (B'KC) // (AHC') và ($\alpha$) // AH, ($\alpha$) // CB' $\Rightarrow$ ($\alpha$) // (B'KC) và (AHC'). Do đó ($\alpha$) cắt (BCC'B') theo giao tuyến MN song song với CB', cắt (A'B'C') theo giao tuyến NP song song với C'H, cắt (ABB'A) theo giao tuyến PQ song song với AH, cắt (ABC) theo giao tuyến QR song song với CK. Vậy thiết diện là ngũ giác MNPQR.

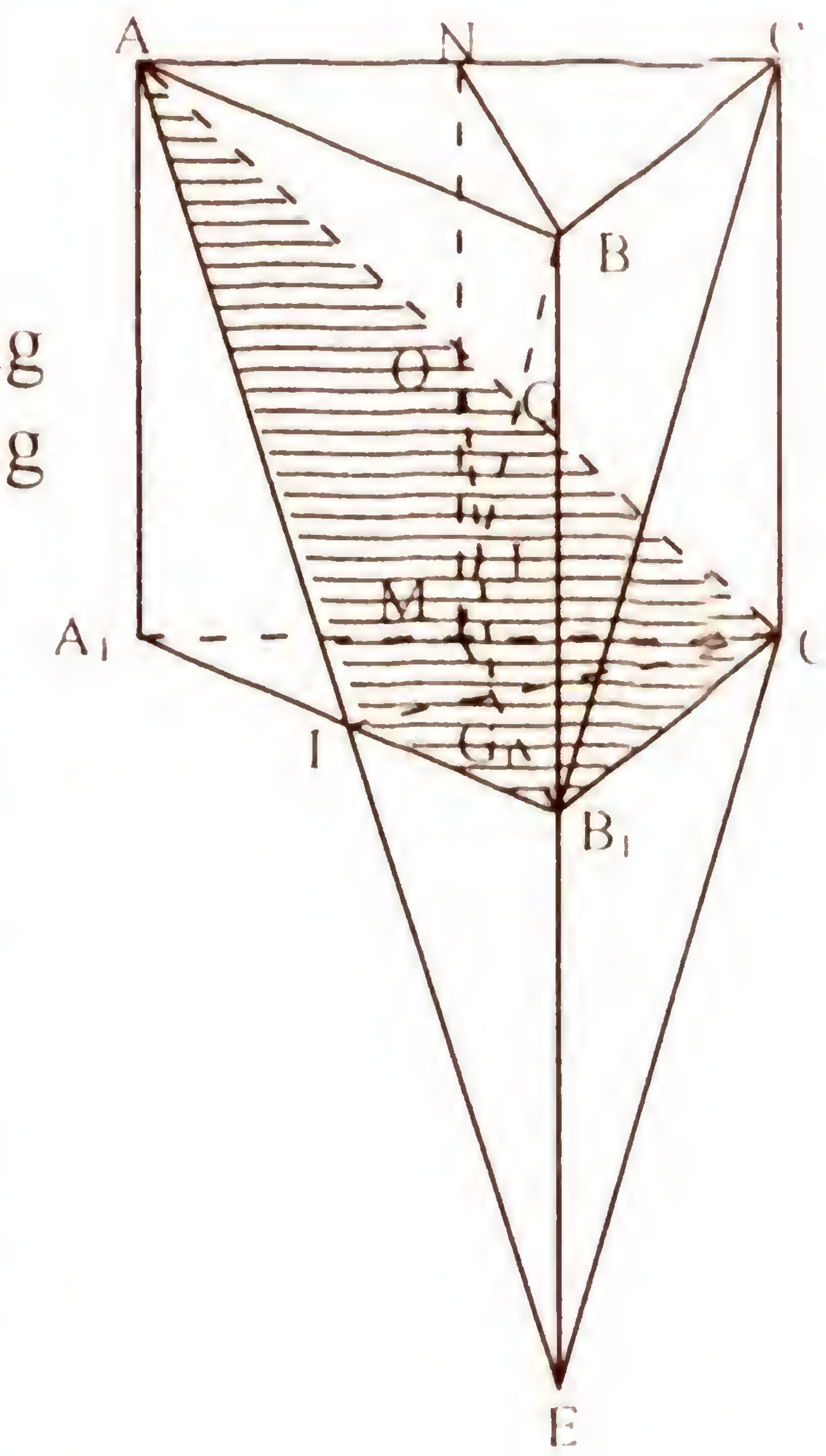
Ta có M là trung điểm CC', theo cách dựng thì ta có N, P, Q, K lần lượt là trung điểm của C'B', B'H, AK, AC nên M, N, P, Q, R theo thứ tự chia các đoạn CC', B'C', A'B', AB, AC theo các tỉ số 1, 1, 3, $\frac{1}{3}$, 1.

**Ví dụ 8:** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$.

a) Dựng thiết diện của hình lăng trụ với mp($\alpha$) đi qua $AC_1$ và song song với $CB_1$

b) Gọi $G_1$ là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. Xác định giao tuyến của mp($\alpha$) và mp($BB_1G_1$).

c) Xác định giao điểm J của đường thẳng BM với mp($\alpha$) trong đó M là trung điểm của cạnh $A_1C_1$. Tính tỉ số $\frac{JG_1}{JO}$

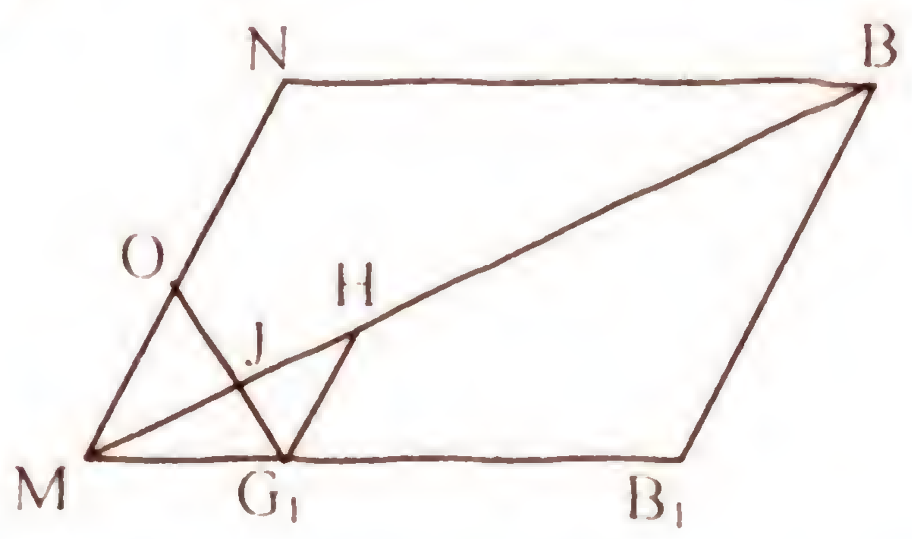



**Giải**

a) Theo tính chất giao tuyến song song, trong mp($BCC_1B_1$) vẽ qua $C_1$ đường thẳng song song với $CB_1$, cắt $BB_1$ tại E, thì $B_1E = CC_1 = BB_1$.
Trong mp($ABB_1A_1$) $AE \cap A_1B_1 = I$ thì I là trung điểm của $A_1B_1$. Tam giác $AC_1I$ là thiết diện cần dựng.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A_1C_1$, AC. Đường thẳng MN cắt $AC_1$ tại O.
Ta có O và $G_1$ thuộc hai mặt phẳng ($\alpha$) và ($BB_1G_1$) nên đường thẳng $OG_1$ là giao tuyến của chúng;

c) Giao điểm J của đường thẳng BM với mp($\alpha$) chính là giao điểm J của BM và $OG_1$.



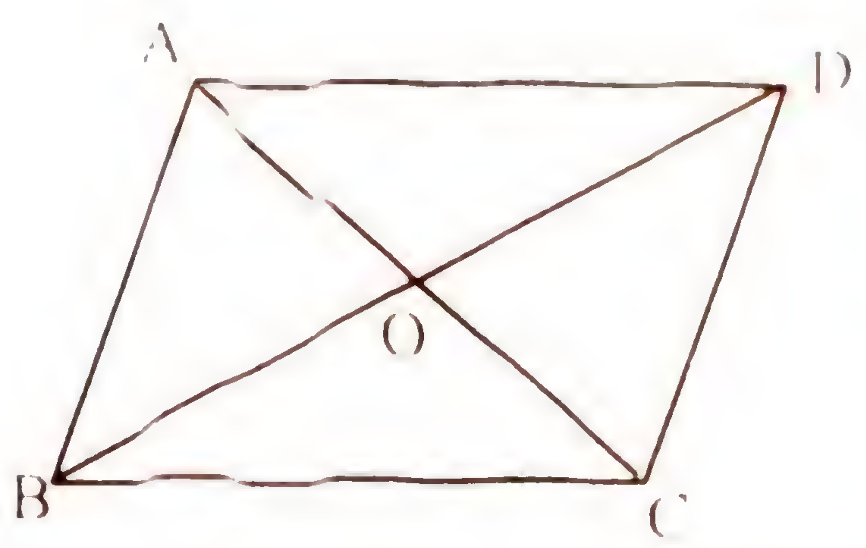

Vẽ $G_1H$ // $B_1B$ thì $\frac{JG_1}{JO} = \frac{G_1H}{OM} = \frac{\frac{1}{3}BB_1}{\frac{1}{2}MN} = \frac{2}{3}$

**Ví dụ 9**: Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

**Giải**

Ta chứng minh trong một hình bình hành, tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh.

Tam giác ABD có trung tuyến AO:




$$AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + \frac{BD^2}{2} = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2}$$

Do đó: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

Áp dụng đối với 2 hình bình hành ACC'A' và BDD'B'

$AC'^2 + CA'^2 = 2(AC^2 + AA'^2)$

và $BD'^2 + DB'^2 = 2(BD^2 + BB'^2)$

Nên $AC'^2 + CA'^2 + BD'^2 + DB'^2 = 2[(AC^2 + BD^2) + (AA'^2 + BB'^2)]$

$= 2[(2(AB^2 + AD^2) + 2AA'^2] = 4(AB^2 + AD^2 + AA'^2)$

Vì 12 cạnh hình hộp chia làm 3 nhóm song song và bằng nhau $\Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 10**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh mặt phẳng (BDA') song song (B'D'C).

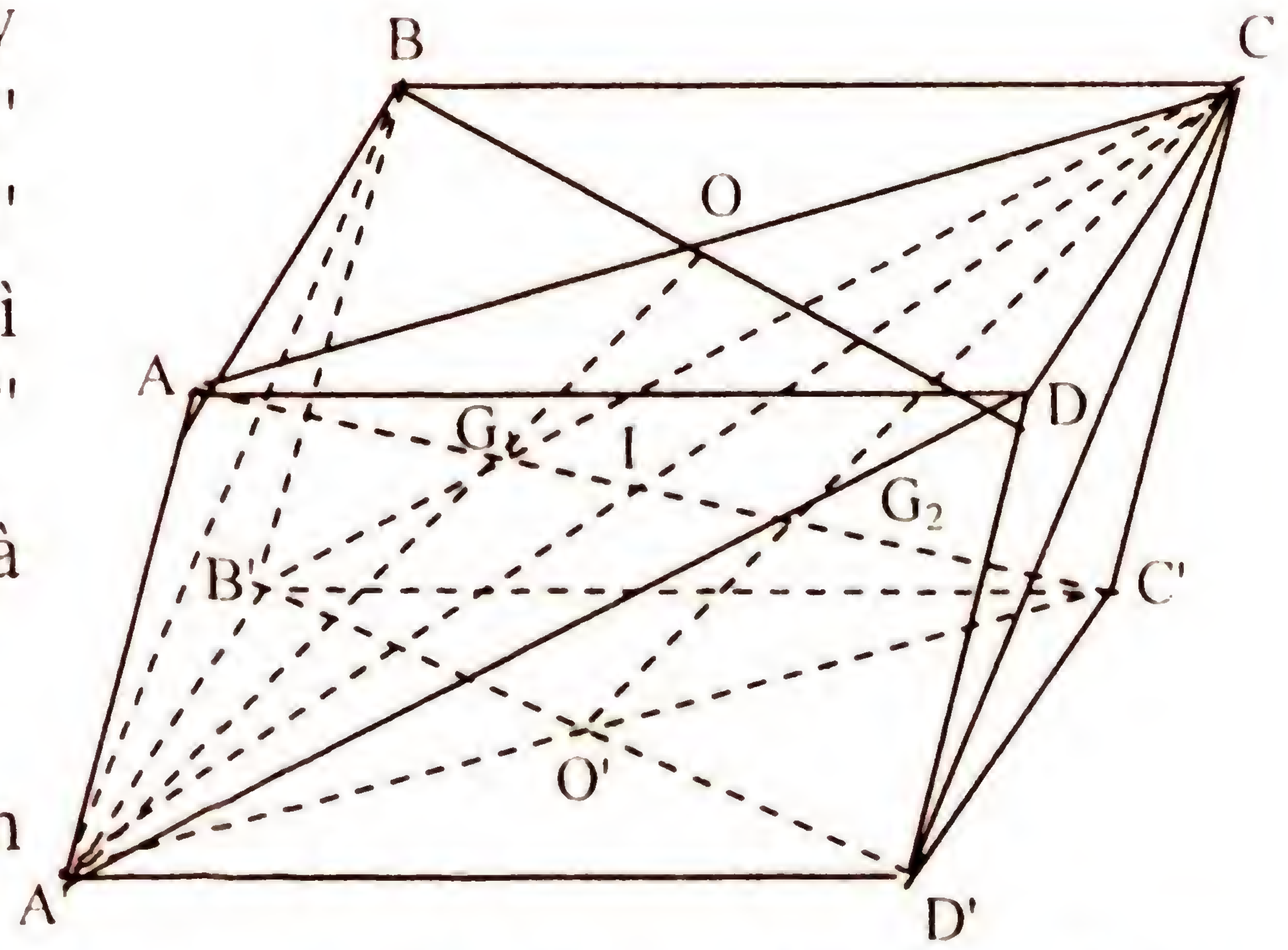
b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm $G_1$ và $G_2$ của hai tam giác BDA' và B'D'C, hơn nữa $G_1$ và $G_2$ chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B cùng nằm trên một mặt phẳng

**Giải**

a) Hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song vì ta có BD // B'D', BA' // D'C $\Rightarrow$ BD, BA' // (B'D'C).

b) Gọi O và O' lần lượt là tâm của đáy ABCD và A'B'C'D'. Đường chéo AC' nằm trong mặt phẳng (AA'C'C), AC' cắt A'O tại $G_1$. Xét tam giác BDA' thì A'O là một trung tuyến và AO // A'C' nên $\dfrac{G_1O}{G_1A'} = \dfrac{AO}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$, do đó $G_1$ là trọng tâm của tam giác BDA'.

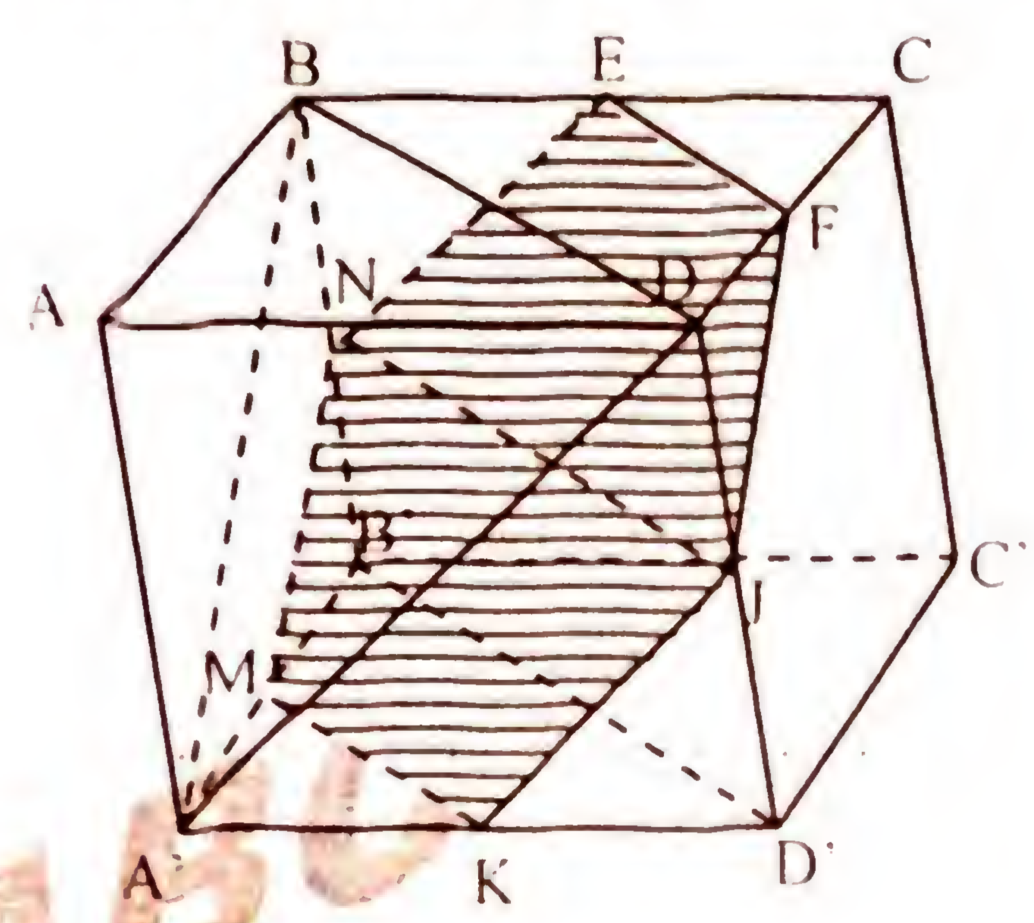



Tương tự thì $G_2$ là trọng tâm của tam giác B'D'C

Ta có A'O // O'C và O trung điểm AC, O' trung điểm A'C' nên $G_1$ là trung điểm của $AG_2$ và $G_2$ là trung điểm của $C'G_1$.

Vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$ .

c) Gọi E, F, J, K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B.

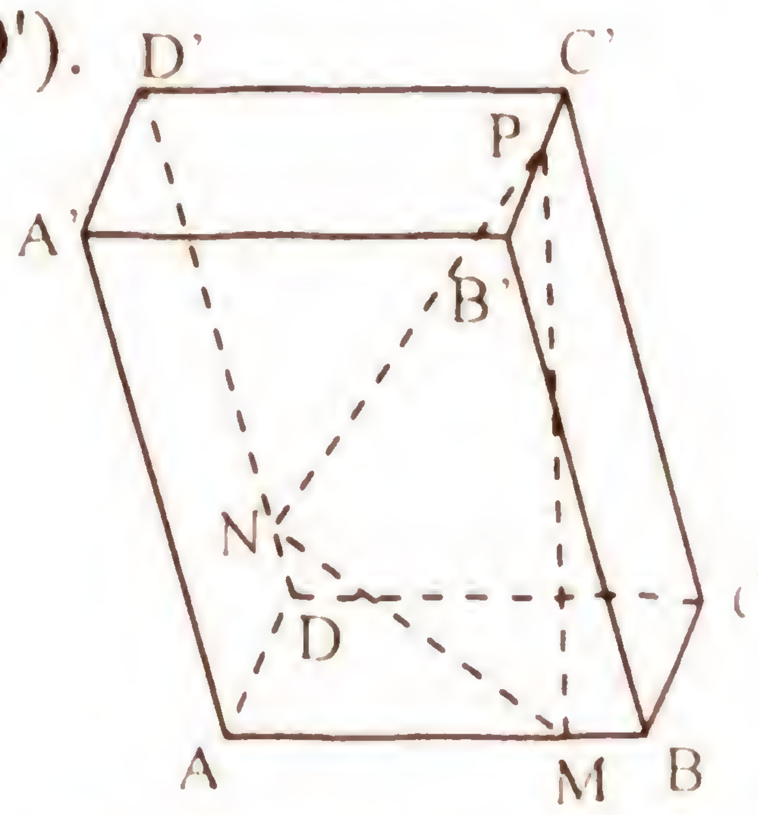



Ta có EF // JN, JN // KM và EF // BD, FJ // BA', KM // BD, MN // BA'. Do đó hai mặt phẳng (EFJN) và (JKMN) đều song song với mp(A'BD).

Nhưng hai mặt phẳng (EFJN), (JKMN) có chung điểm J nên chúng phải trùng nhau.

Vậy sáu điểm E, F, J, K, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

**Ví dụ 11**: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trên AB, DD', C'B' lấy ba điểm M, N, P sao cho AM = D'N = B'P. Chứng minh rằng mp(MNP) song song mp(AB'D').




**Giải**

Vì các cạnh của hình hộp bằng nhau và AM = D'N = B'P nên MB = PC' = ND.

Ta có: $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{C'P}{PB'} \Rightarrow \dfrac{MB}{PC'} = \dfrac{MA}{PB'} = \dfrac{AB}{C'B'}$

Theo định lí Ta lét đảo, các đường thẳng BC', MP, AB' cùng song song với một mặt phẳng hay MP // mp(AB'D').

Tương tự thì được MN // mp(AB'D').

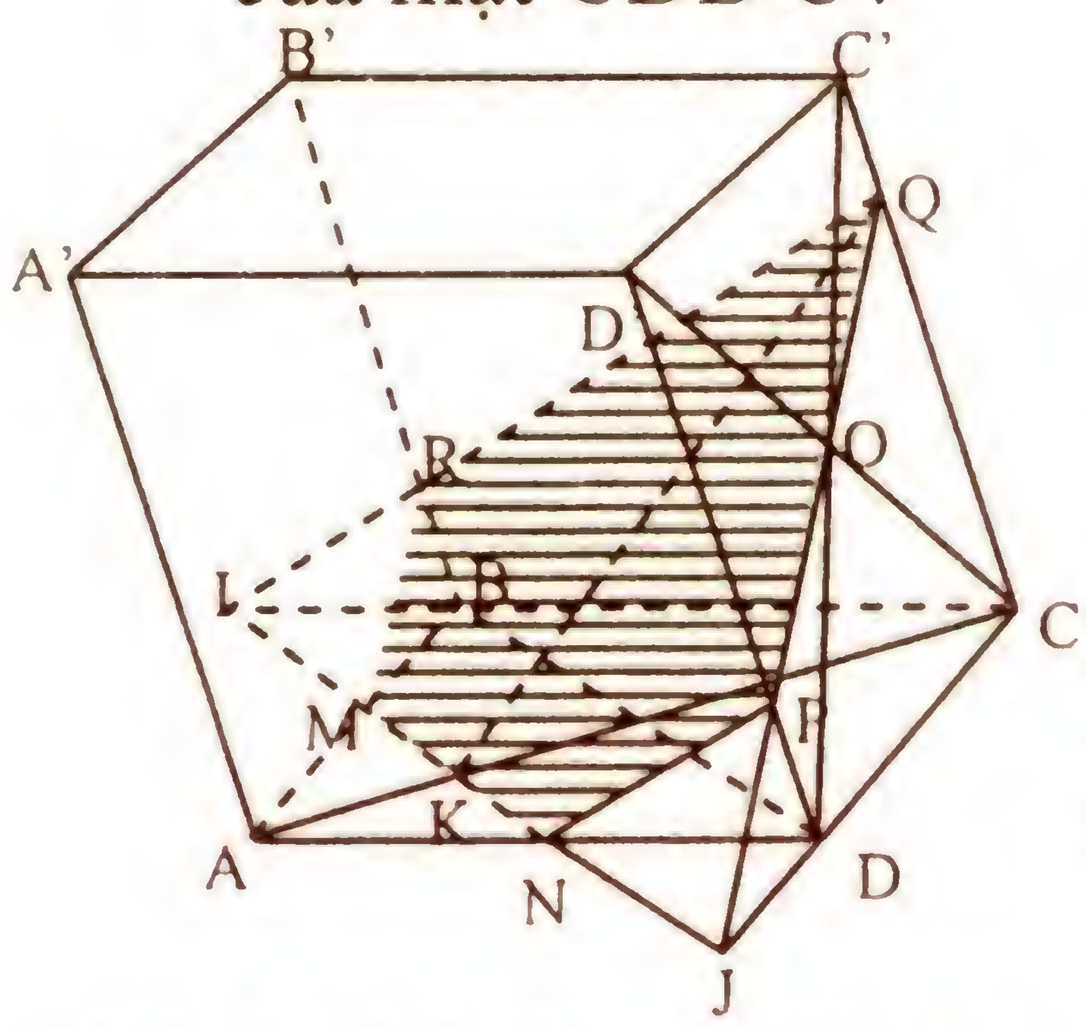
Vậy mp(MNP) // mp(AB'D')

**Ví dụ 12**: Chứng minh rằng nếu thiết diện của hình hộp là một lục giác, thì các cạnh đối của lục giác đó phải song song với nhau.

**Giải**

Hình hộp có 6 mặt, trong đó hai mặt đối diện song song với nhau. Nếu thiết diện là lục giác thì phải có 6 cạnh nằm trên 6 mặt của hình hộp. Suy ra lục giác đó có các cạnh đối song song là các giao tuyến của các mặt đối song song.

**Ví dụ 13**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của mặt CDD'C'.




**Giải**

Gọi I và J lần lượt là các giao điểm của đường thẳng MN với BC và CD. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của đường thẳng JO với các cạnh DD', CC'. Gọi R là giao của BB' và đường thẳng IQ. Vậy thiết diện là ngũ giác MNPQR.

Cách khác: Phối hợp với giao tuyến song song:

PR // MN, BD.

**Ví dụ 14**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên ba cạnh AB, DD', C'B' lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{D'N}{D'D} = \dfrac{B'P}{B'C'}$.

a) Chứng minh rằng mp(MNP) và mp(AB'D') song song với nhau.

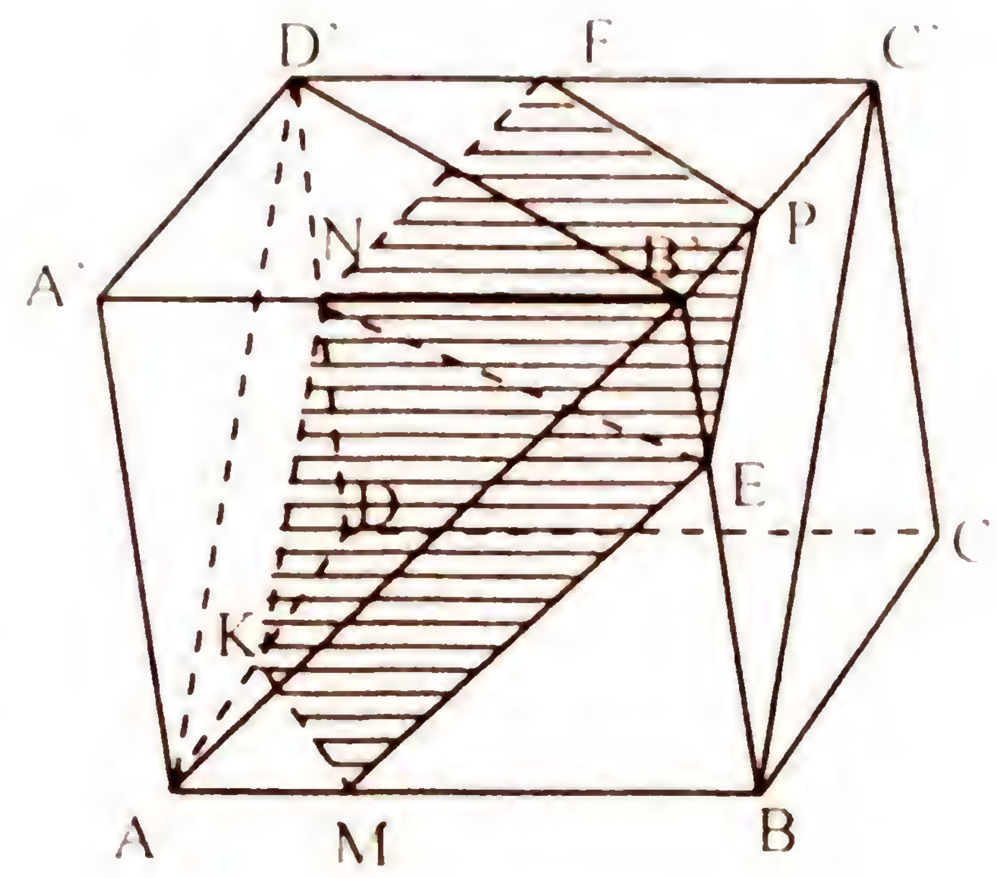
b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNP).

**Giải**

a) Ta có: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{D'N}{DD'} = \dfrac{B'P}{B'C'}$

$\Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MB}{ND} = \frac{BA}{DD'}$

và $\frac{AM}{B'P} = \frac{MB}{PC'} = \frac{BA}{C'B'}$




Theo định lí Ta-lét đảo, thì MN song song với mp($\alpha$); với mp($\alpha$) song song với AD', BD và MP song song với mp($\beta$); với mp($\beta$) song song với AB', BC.

Vì BD // B'D', BC' // AD' nên hai mp($\alpha$) và mp($\beta$) đều song song với mp(AB'D) do đó MN và MP đều song song với mp(AB'D'). Vậy mp(MNP) // mp(AB'D').

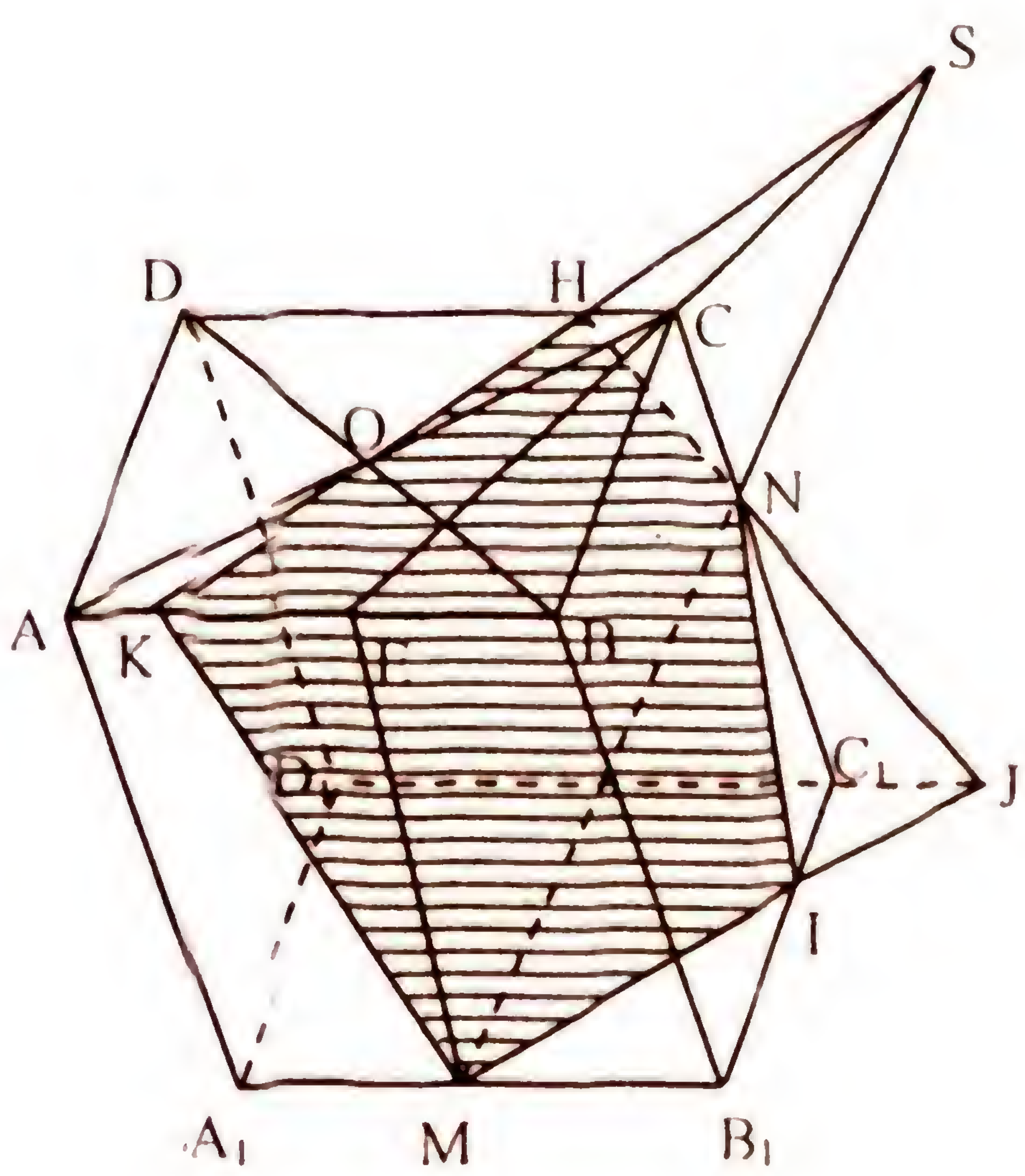
b) Từ M vẽ ME song song với AB', từ P vẽ PF song song với B'D'. Từ N vẽ NK song song với AD' cắt AD tại K. Thiết diện là lục giác MEPFNK có các cạnh đối song song.

**Ví dụ 15**: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N và O lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_1B_1$, $CC_1$ và tâm của đáy ABCD

a) Xác định giao điểm S của đường thẳng MN và mp(ABCD);

b) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNO);

c) Gọi I là giao điểm của $B_1C_1$ và mp(MNO). Tính tỉ số $\frac{IB_1}{IC_1}$




**Giải**

a) Gọi E là trung điểm của AB, thì ME // CN.
Trong mp(MNCE): S = MN $\cap$ CE do đó S cũng là giao của MN với mp(ABCD).

b) SO cắt CD tại H và AB tại K. HN cắt $C_1D_1$ tại J, JM cắt $B_1C_1$ tại I. Ngũ giác HKMIN là thiết diện cần dựng.

c) NC // ME, NC = $\frac{1}{2}$ME $\Rightarrow$ AK = CH = $\frac{1}{2}$KE

$\Rightarrow$ CH = $\frac{1}{3}$AE = $\frac{1}{6}$AB = $C_1J$.

Vậy $\frac{IB_1}{IC_1} = \frac{MB_1}{C_1J} = \frac{1}{3}$.

## DẠNG 3: YẾU TỐ CỐ ĐỊNH - TẬP HỢP ĐIỂM

• Yếu tố cố định:

- Đường thẳng hoặc mặt phẳng đi qua điểm cố định: điểm cố định là giao điểm của 2 đường thẳng cố định hoặc giao điểm của một đường thẳng cố định với một mặt phẳng cố định khác.

- Mặt phẳng song song một đường thẳng cố định: mặt phẳng chứa một giao tuyến song song với một đường thẳng; dùng định lý Ta-lét đảo, đưa về các mặt phẳng song song.

• Tập hợp điểm:

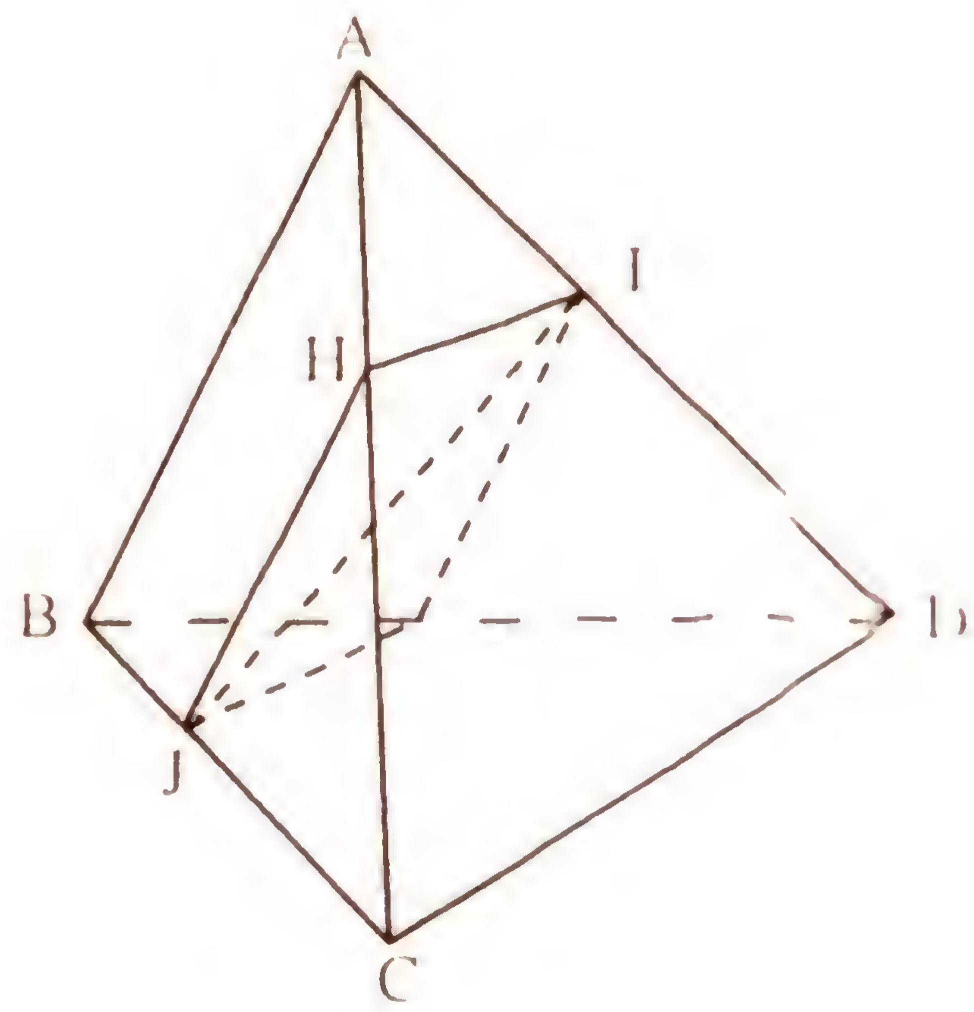
- Xác định mặt phẳng cố định chứa điểm đó.

- Chứng minh điểm thuộc mặt phẳng hoặc một miền, một đường của mặt phẳng.

- Giới hạn quỹ tích và làm phần đảo.

**Ví dụ 1**: Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$. Chứng minh rằng IJ luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

**Giải**




Qua I vẽ đường thẳng song song với CD, cắt AC tại H, ta có:

$$\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC} \Rightarrow HJ \,//\, AB;\ HI \,//\, CD.$$

Do đó AB và CD song song (IJH)

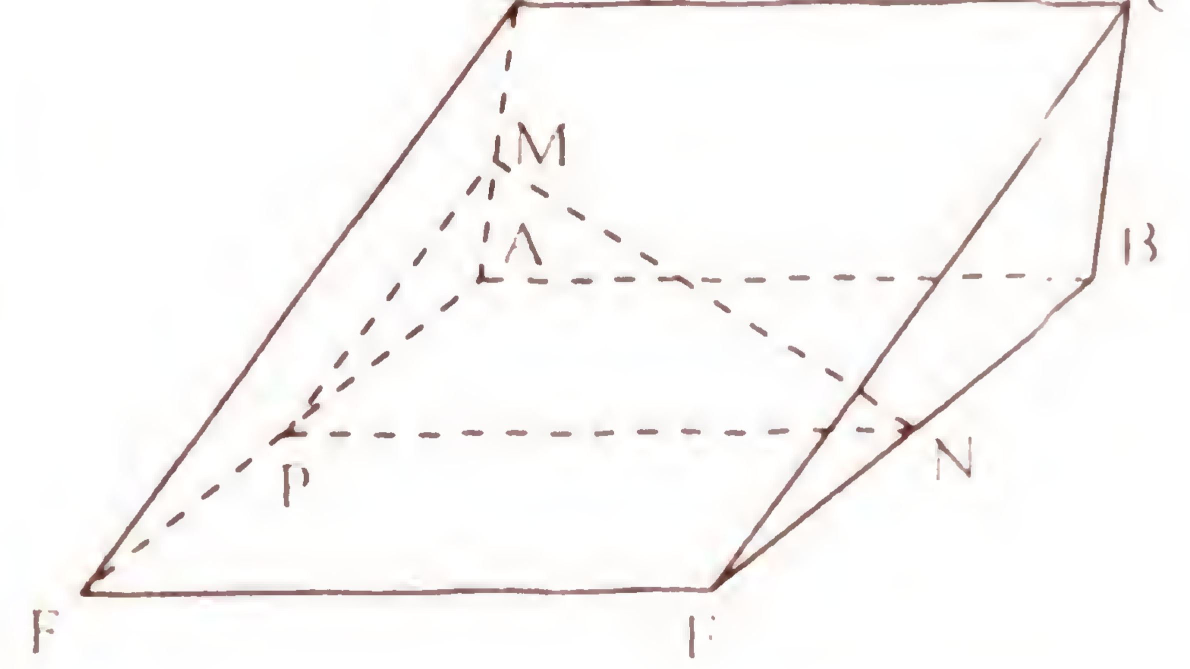
Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và song song với CD thì (IJH) // (P) cố định.

Mà $IJ \subset (IJH) \Rightarrow IJ \,//\, (P)$ cố định.

Cách khác: Dùng định lý Ta-lét đảo.

**Ví dụ 2**: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N là hai điểm di động tương ứng trên AD và BE sao cho: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

**Giải**




Trong mặt phẳng (ADF) qua M vẽ đường thẳng MP song song với DF, cắt AD tại M.

Ta có $\frac{AP}{PF} = \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}$

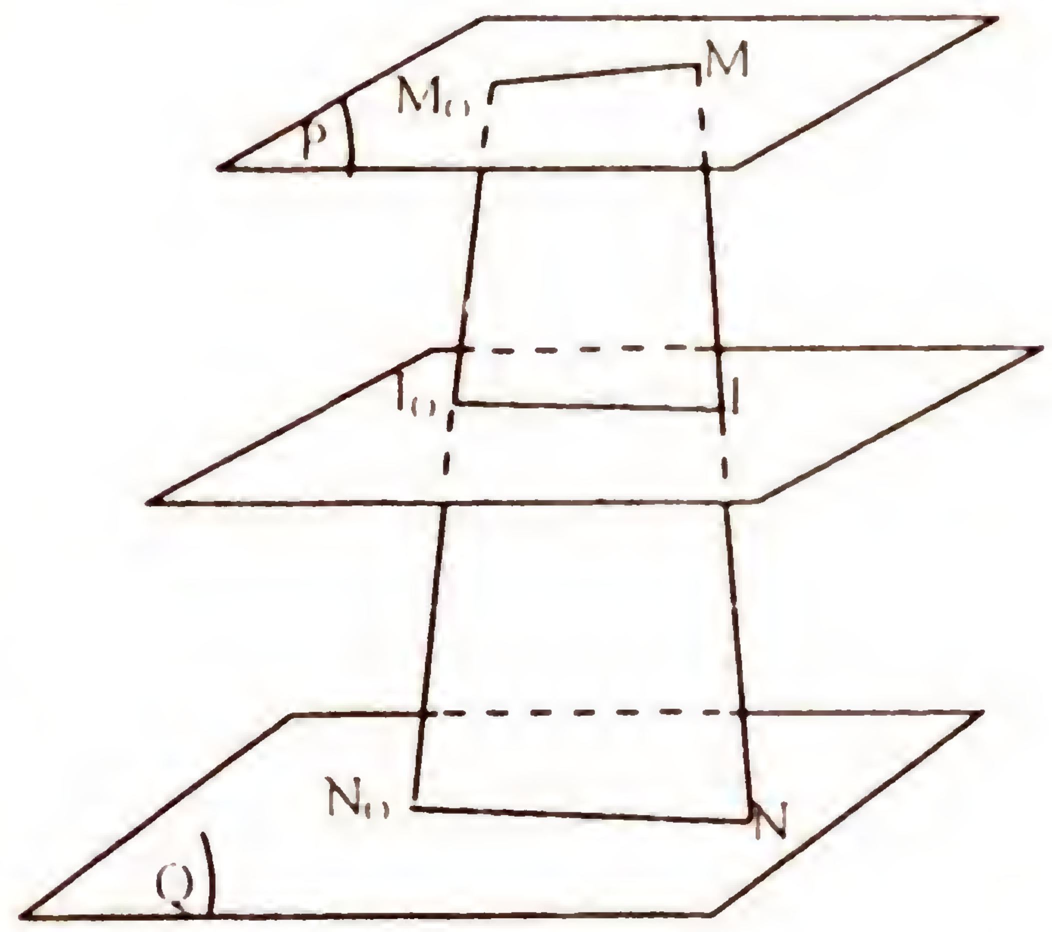
nên PN // FE. Do đó (MNP) // (DEF).

Vì $MN \subset (MNP)$ nên MN song song với mặt phẳng (DEF) cố định.

**Ví dụ 3**: Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp những điểm I chia đoạn thẳng MN theo một tỉ số k cho trước, $k \neq 0$.

**Giải**

Lấy trên (P) và (Q) lần lượt hai điểm $M_0$, $N_0$ cố định. Gọi $I_0$ chia đoạn thẳng $M_0N_0$ theo tỉ số k thì $I_0$ cố định.




Ta có $\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$

$$\Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N_0} = \frac{IM + IN}{I_0M_0 + I_0N_0} = \frac{MN}{M_0N_0}$$

Theo định lí Ta-lét đảo thì $M_0M$, $I_0I$, $N_0N$ nằm trên ba mặt phẳng song song. Suy ra điểm I nằm trên mp(R) đi qua $I_0$ và song song với (P) và (Q) cố định.

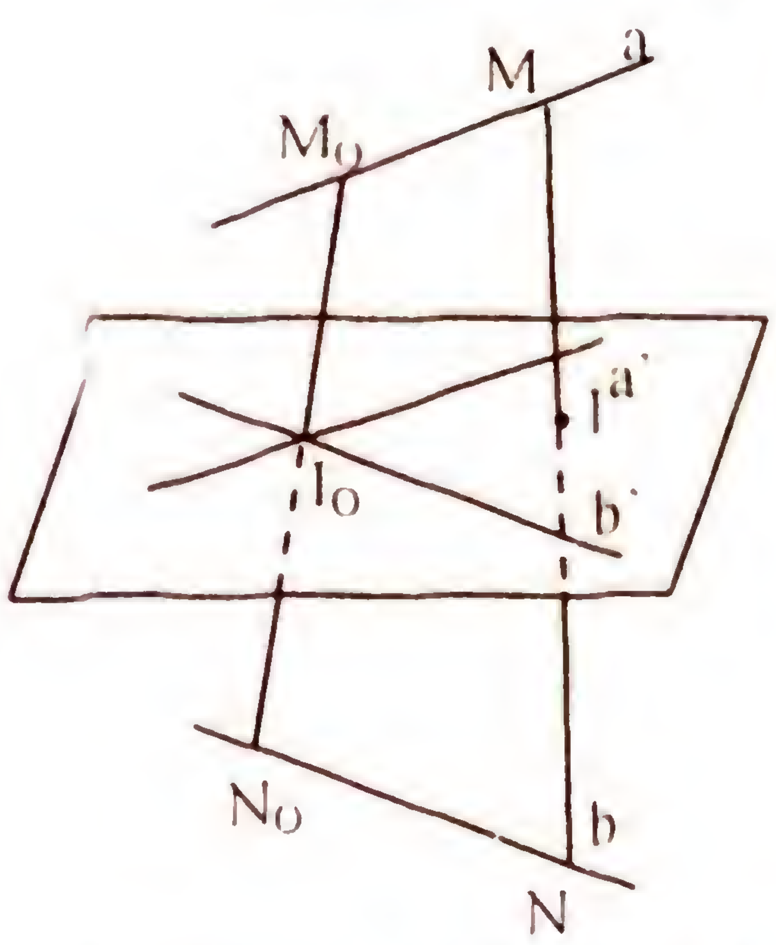
Đảo lại, lấy điểm $I \in mp(R)$ và vẽ qua I một đường thẳng nào đó cắt (P) và (Q) lần lượt tại M và N thì theo định lí Ta-lét thuận $\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$. Vậy cuỹ tích của điểm I là mặt phẳng (R).

**Ví dụ 4:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên a và b. Tìm tập hợp những điểm I chia đoạn thẳng MN theo một tỉ số k cho trước, $k \neq 0$.

**Giải**

Lấy hai điểm cố định $M_0$, $N_0$ lần lượt nằm trên a, b và điểm $I_0$ chia $M_0N_0$ theo tỉ số k cho trước thì $I_0$ cố định.

Ta có $\frac{IM}{IN} = k = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} \Rightarrow \frac{IM}{I_0M_0} = \frac{IN}{I_0N} = \frac{MN}{M_0N_0}$




Áp dụng định lý Ta-lét đảo thì ba đoạn thẳng $I_0I$, $M_0M$, $N_0N$ nằm trên ba mặt phẳng song song. Do đó I nằm trên mp(R) đi qua $I_0$ và song song với a và b, mặt phẳng này được xác định bởi 2 đường thẳng qua $M_0$ là a' // a, b' // b.

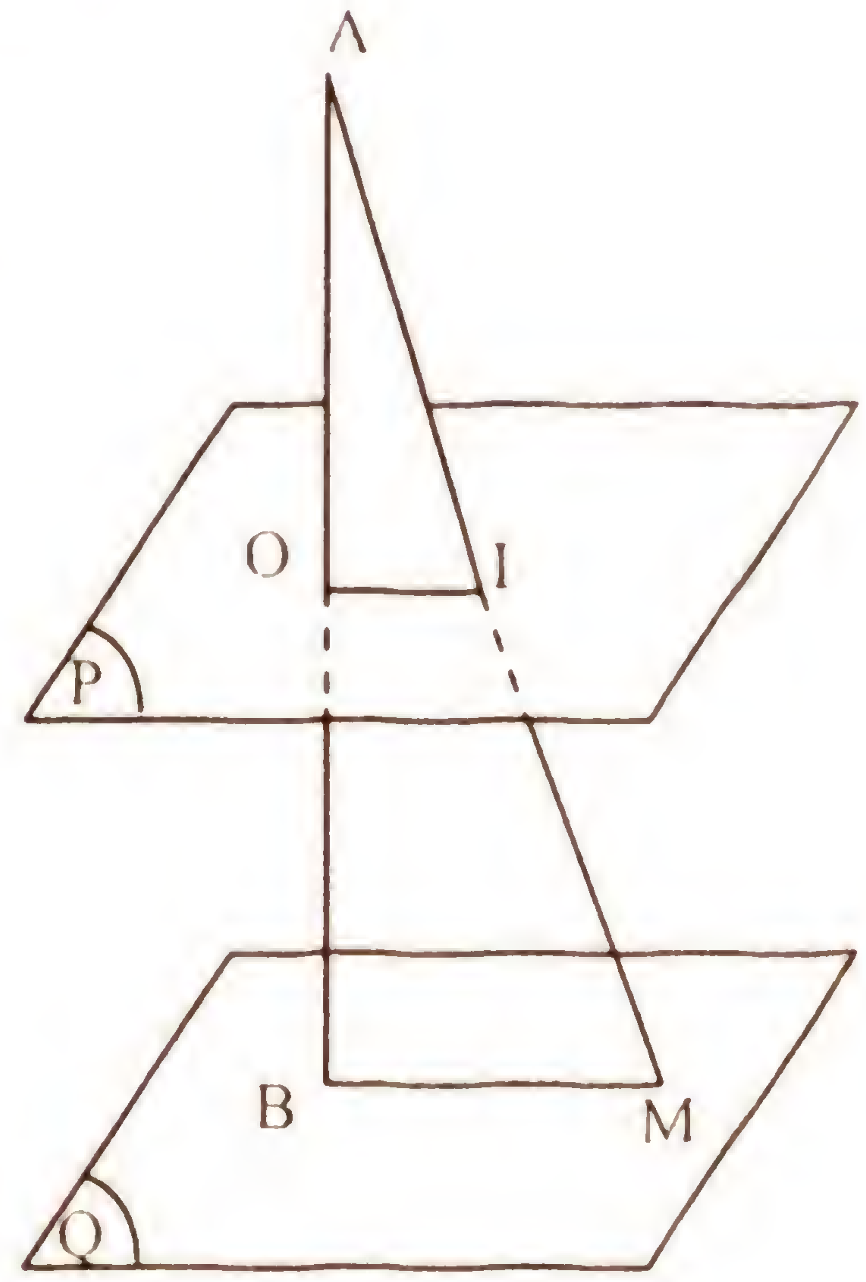
Đảo lại, lấy điểm $I \in mp(R)$, hai mp(I; a) và (I; b) cắt nhau theo giao tuyến, giao tuyến này cắt a và b tại M, N.

Theo định lý Ta-lét thì: $\frac{IM}{IN} = \frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$.

Vậy quỹ tích các điểm I là mặt phẳng (R).

**Ví dụ 5**: Cho điểm A cố định nằm ngoài mặt phẳng (P). Điểm M lưu động trên (P). Tìm tập hợp các trung điểm I của AM.

**Giải**




Lấy điểm B cố định trên (P)

Gọi O là trung điểm của AB thì O cố định.

Ta có OI // BM ⇒ OI // (P) do đó I nằm trên mặt phẳng (Q) cố định, đi qua O và song song (P).

Đảo lại, với I bất kỳ trên (Q), AI cắt (P) tại M. Vì (P) // (Q) nên mp(ABM) cắt 2 mặt phẳng (P) và (Q) theo 2 giao điểm OI // BM

$\Rightarrow \dfrac{IA}{IM} = \dfrac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow$ I trung điểm AM.

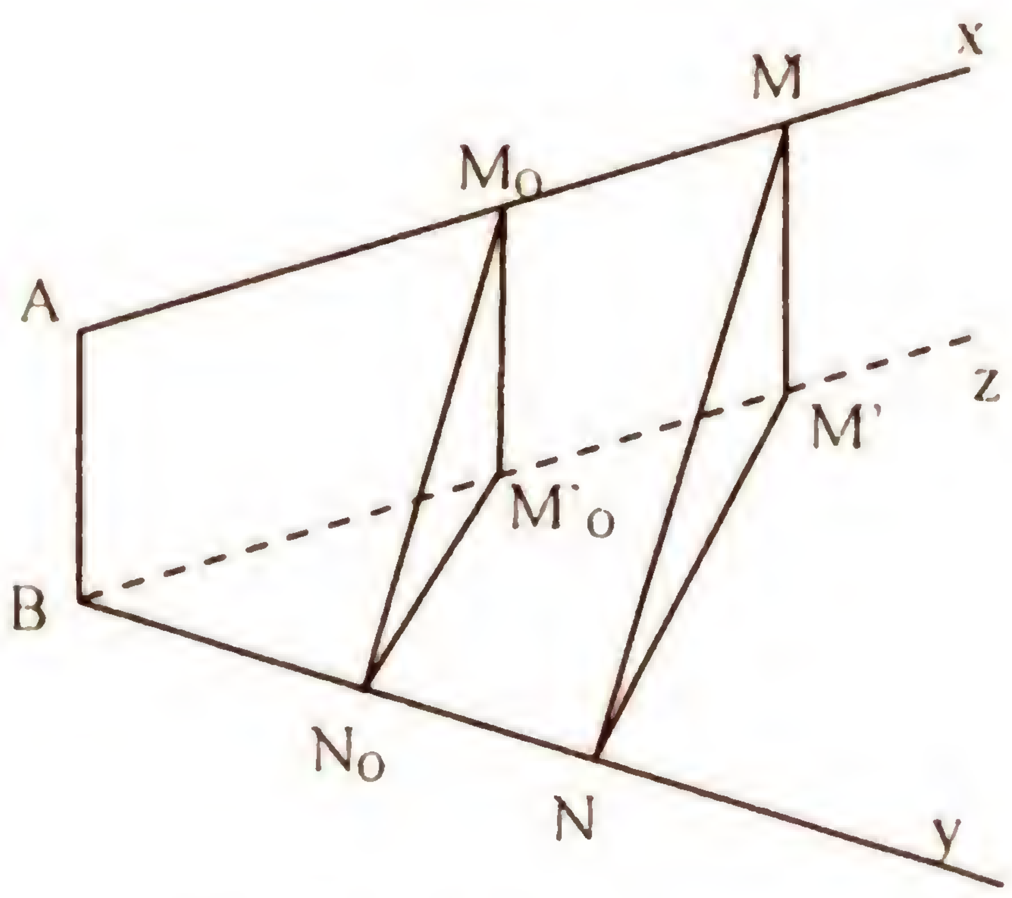
Vậy quỹ tích các điểm I là mặt phẳng (Q).

**Ví dụ 6**: Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho AM = kBN (k > 0 cho trước).

a) Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho IM = kIN.

**Giải**




a) Vẽ tia Bz song song và cùng hướng với tia Ax. Trên các tia Ax, By và Bz lần lượt lấy các điểm cố định $M_0$, $N_0$ và $M'_0$ sao cho $\dfrac{AM_0}{BN_0} = k$ và $BM'_0 = AM_0$.

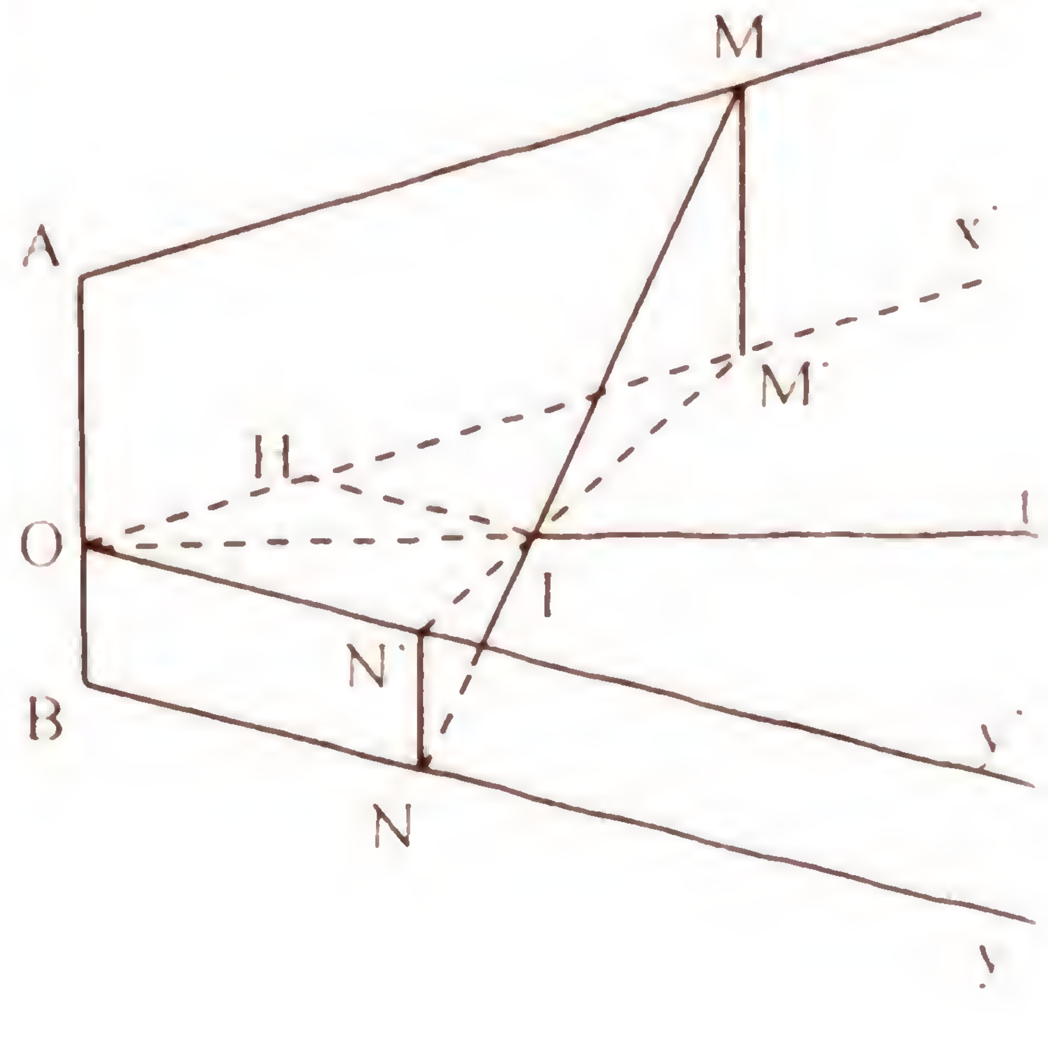
Lấy điểm M' thuộc tia Bz sao cho BM' = AM thì MM' // $M_0M'_0$ và NM' // $N_0M'_0$.

Do đó (MNM') // mp($M_0N_0M'_0$).

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định ($M_0N_0M'_0$).

Cách khác: Dùng định lý Ta-lét đảo.

b) Gọi O là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\dfrac{OA}{OB} = k$ nên O cố định. Từ O ta vẽ hai tia Ox' và Oy' sao cho Ox' // Ax, Oy' // By. Vẽ MM' // AB, M' ∈ Ox' và NN' // AB, N' ∈ Oy'.




Ta có $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{M'M}{N'N} = \dfrac{OA}{OB} = k$

$\Rightarrow MN \cap M'N' = I$

Trong tam giác M'ON: $\frac{IM'}{IN'} = k = \frac{OM'}{ON'}$, do đó I nằm trên tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

Đảo lại, lấy I là một điểm bất kì thuộc tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

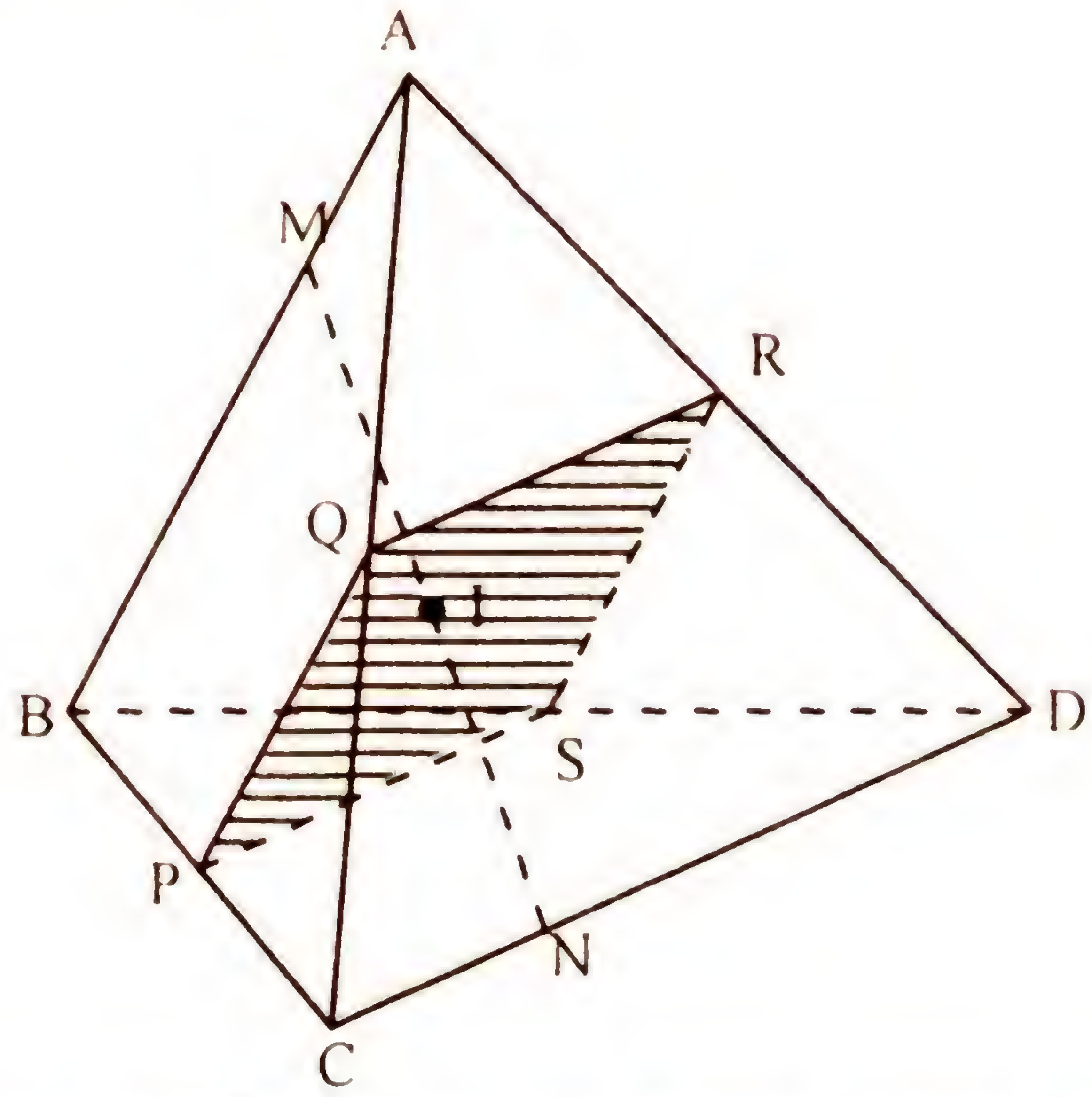
Vẽ IH // Oy', H ∈ Ox'. Lấy M' ∈ Hx' sao cho HM' = kHO.

M'I cắt Oy' tại N' thì IM' = kIN'.

Gọi M và N lần lượt là những điểm thuộc các tia Ax, By sao cho AM = OM'; BN = ON'. Ta có I, M, N thẳng hàng và $\frac{IM}{IN} = k$. Vậy tập hợp các điểm I là tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai cạnh AB và CD. Tìm tập hợp các trung điểm của MN.

**Giải**




Gọi I là trung điểm của MN. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BC, CA, AD và DB.

Vì $\frac{PB}{IM} = \frac{PC}{IN} = \frac{BC}{MN}$ nên BM, PI, CN cùng song song với một mặt phẳng, mặt phẳng này song song với AB và CD. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng qua P và song song với mặt phẳng đó thì $I \in (\alpha)$ cố định.

Mặt phẳng này cắt tứ diện ABCD theo thiết diện là hình bình hành PQRS. Vì M chỉ chạy trên đoạn AB, N chỉ chạy trên đoạn CD nên điểm I luôn nằm trong tứ diện, tức là I luôn nằm trong hình bình hành PQRS.

Đảo lại, lấy một điểm I nằm trong hình bình hành PQRS. Hai mặt phẳng (IAB), (ICD) cắt nhau theo giao tuyến qua I, cắt cạnh AB, CD tại M, N. Theo định lý Ta-lét thì I là trung điểm của MN. Vậy tập hợp các điểm I là hình bình hành PQRS cùng với các điểm trong của nó.

**Ví dụ 8**: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{IC}$. Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước.

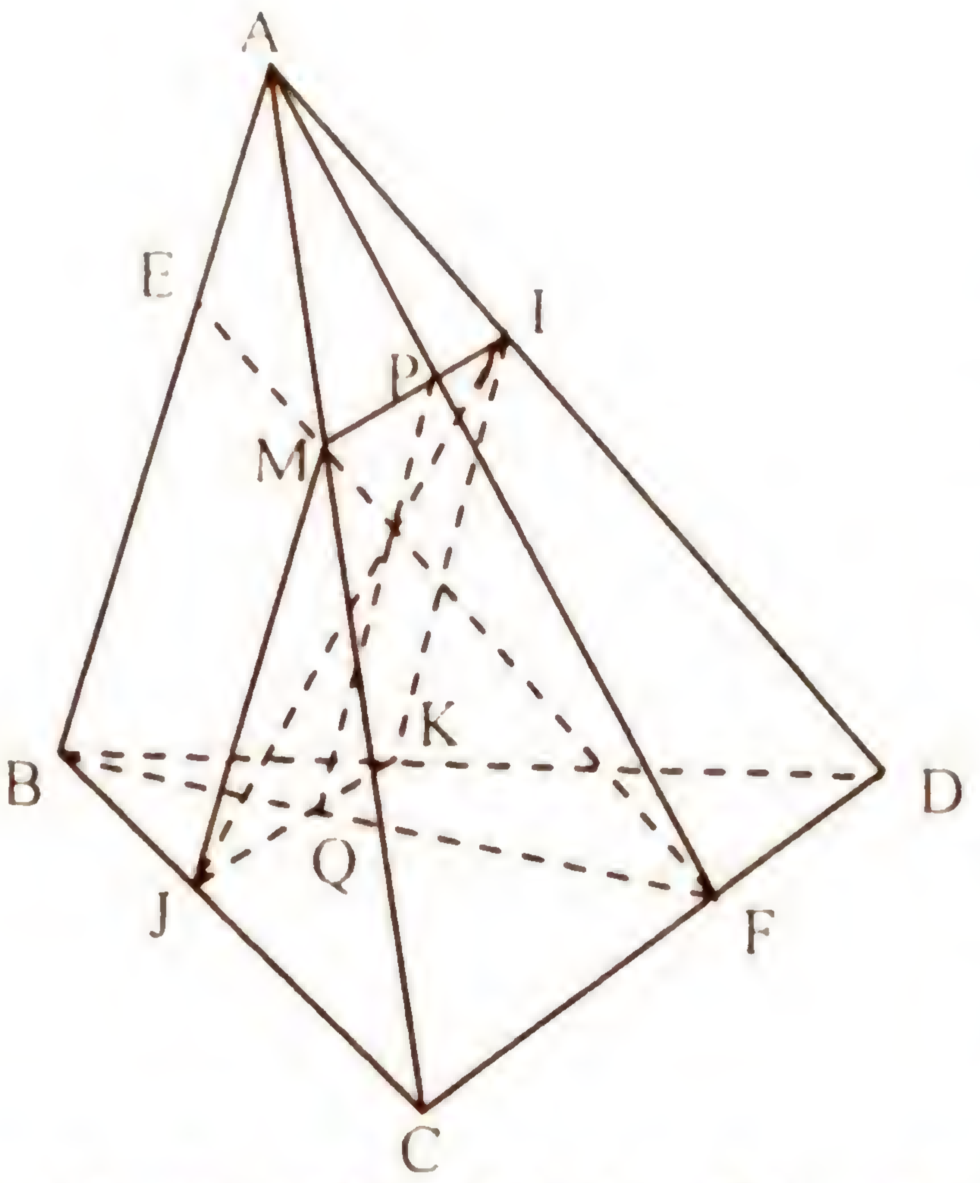
**Giải**

Qua I vẽ IH // CD, H ∈ AC, ta có:

$$\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC} \Rightarrow HJ \,//\, AB.$$

Do đó AB, CQ // (IHJ).

Mặt phẳng (IJH) cắt BD tại K nên tứ giác IHJK là hình bình hành. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt HI tại P, JK tại Q.




Ta có: $\frac{IP}{PH} = \frac{RQ}{QJ} = \frac{IM}{MJ} = k$ mà HI // JK // CD.

Do đó P, Q lần lượt thuộc đoạn AF và BF với F là điểm chia CD theo tỉ số k. Gọi E là điểm chia AB theo tỉ k. Do đó E, F cố định.

Ta có PQ // AB, $\frac{PM}{MQ} = \frac{IM}{MJ} = k \Rightarrow M \in EF$ cố định.

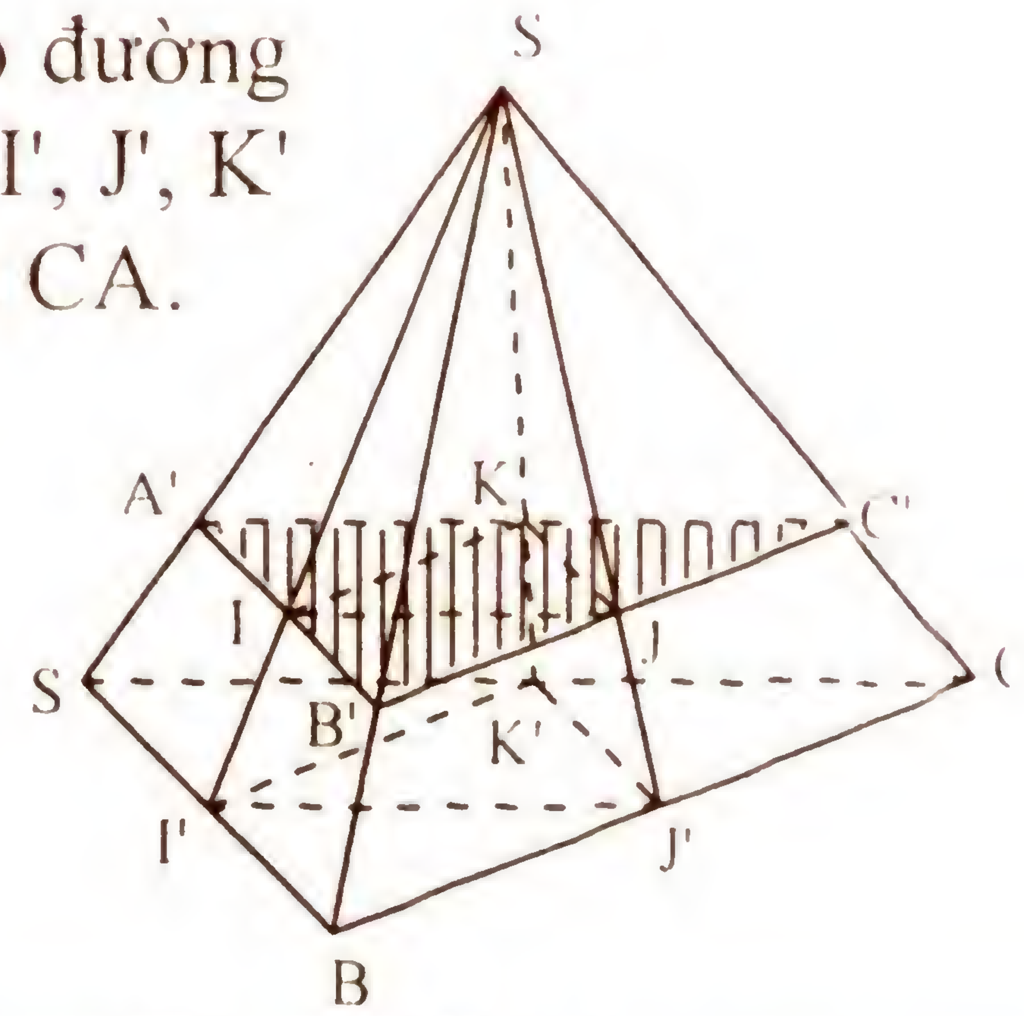
Từ đó suy ra tập hợp những điểm M là đoạn EF.

**Ví dụ 9**: Cho hình chóp S.ABC. Các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCA.

a) Chứng minh rằng (IJK) // (ABC).

b) Tìm tập hợp các điểm M nằm trong hình chóp S.ABC sao cho KM song song với mp(ABC).

**Giải**




a) Gọi I', J', K' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng SI và AB, SJ và BC, SK và CA. Khi đó I', J', K' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA.

Ta có: $\frac{SI}{SI'} = \frac{SK}{SK'} = \frac{SJ}{SJ'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ IK // I'K', KJ // K'J'

$\Rightarrow$ IK, KJ // mp(I'J'K').

$\Rightarrow$ mp(IJK) // mp(I'J'K').

Vậy (IJK) // (ABC).

b) Ta có KM // (ABC) khi và chỉ khi KM thuộc mp(P) qua K và song song với mp(ABC). Vậy KM // (ABC) khi và chỉ khi M $\in$ (P) cố định.

Gọi A', B', C' lần lượt là các giao điểm của (P) với các cạnh SA, SB, SC. Ta có các giao tuyến A'B' // AB, B'C' // BC, C'A' // CA.

Theo giả thiết M chỉ nằm trong hình chóp S.ABC, nên tập hợp các điểm M sao cho KM // (ABC) là tam giác A'B'C'.

## DẠNG 4: TỔNG HỢP SONG SONG

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong các điều kiện sau đây:
  - Mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
  - Mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.
  - Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau.
  - Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng song song.
  - Mặt phẳng đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng chéo với đường thẳng ấy.
  - Mặt phẳng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng không chứa điểm ấy.

• Hình chóp cụt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song; các mặt bên đều là hình thang; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

Chú ý: Sử dụng hình học phẳng, quan hệ song song và các vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, mặt phẳng để giải toán.

**Ví dụ 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

c) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

d) Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng thì có duy nhất một mặt phẳng song song với đường thẳng đó.

**Giải**

Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề b) đúng và c) đúng.

**Ví dụ 2:** Trong các mệnh, mệnh đề nào đúng?

a) Nếu hai mặt phẳng song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

b) Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

c) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

d) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng thì có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

**Giải**

Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề c) đúng và d) đúng.

**Ví dụ 3**: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hình hộp là một hình lăng trụ

b) Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song.

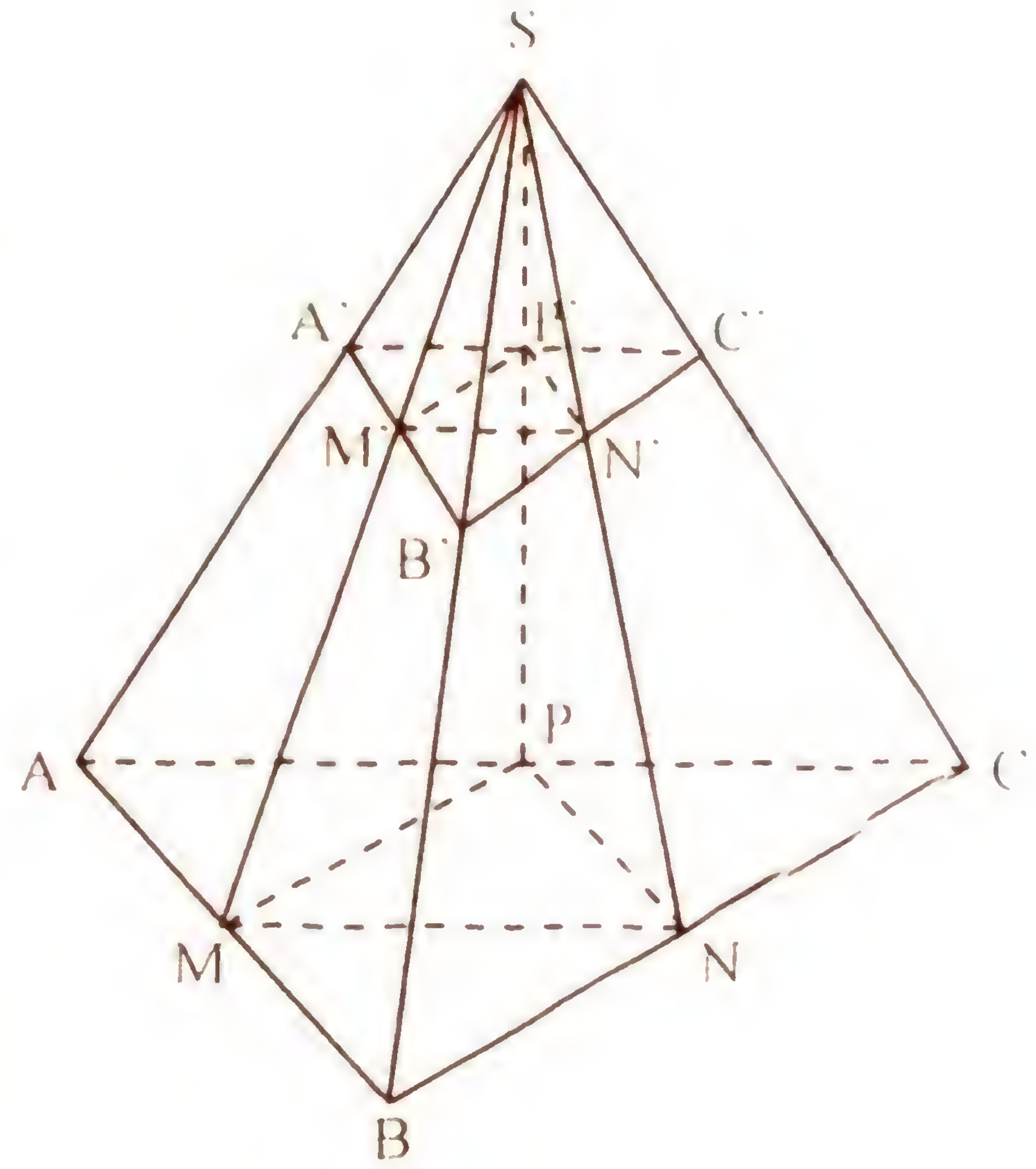
c) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.

d) Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau,

**Giải**

Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề a) đúng và d) đúng.

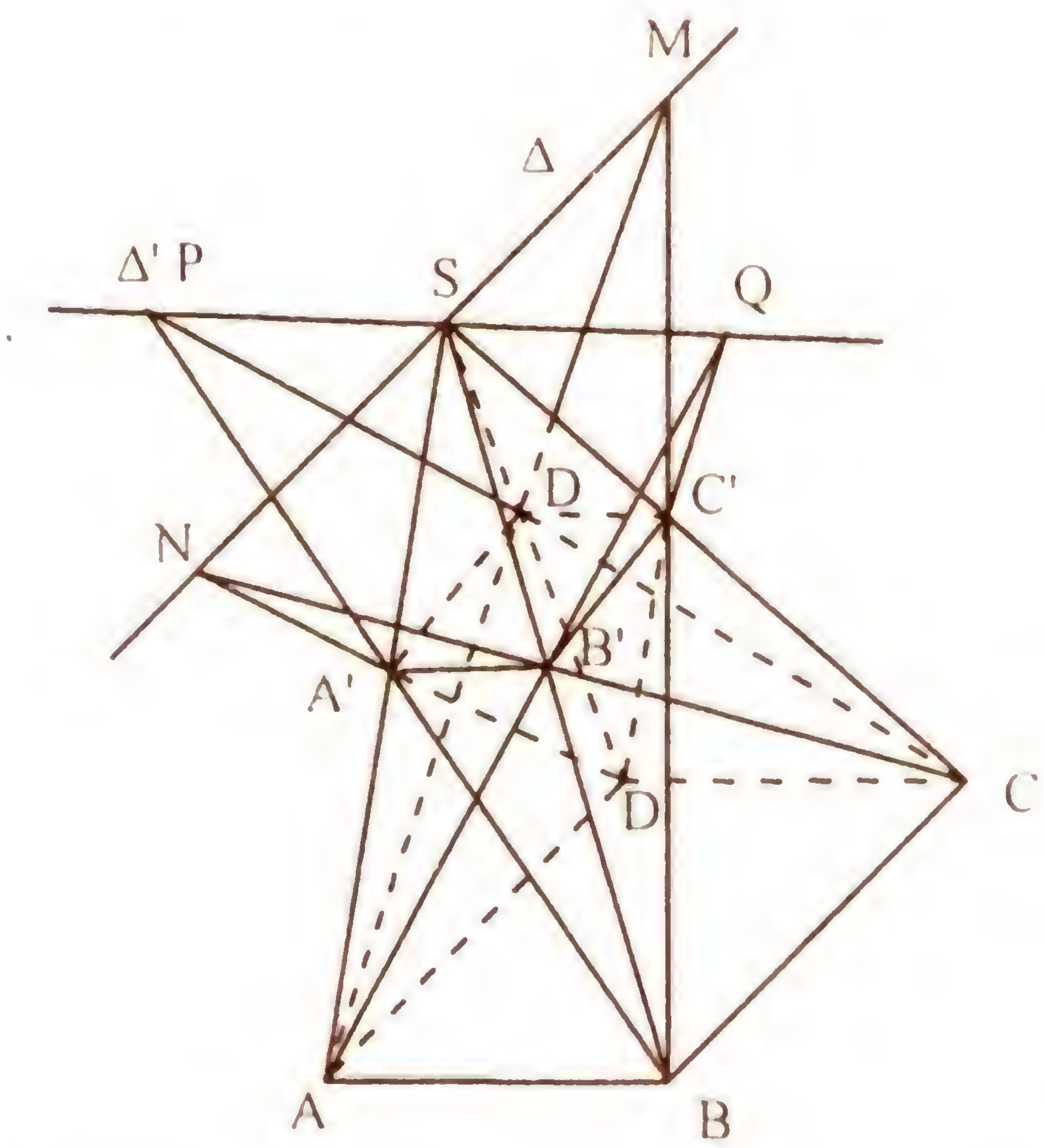
**Ví dụ 4:** Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C' có đáy lớn ABC và các cạnh bên AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', B'C', C'A'. Chứng minh MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.




**Giải**

Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB' và CC'. Ta có các đường thẳng MM', NN', PP' cũng đồng quy tại S và M'N' // MN, M'P' // MP nên mp(M'N'P') song song với mp(MNP).
Vậy MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.

**Ví dụ 5**: Cho hình chóp cụt tứ giác ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bên là AA', BB', CC', DD' và có đáy lớn ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AD' và BC', CB' và DA', BA' và CD', AB' và DC'. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.




**Giải**

Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC', DD'. Vì BC song song với AD nên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (BB'C'C), (AA'D'D) đi qua S và song song với BC. Ta có M, N là hai điểm chung của hai mặt phẳng nói trên nên M, N đều thuộc Δ.
Lí luận tương tự, hai điểm P, Q thuộc giao tuyến Δ' của hai mặt phẳng (ABB'A') và (CDD'C) (giao tuyến này đi qua S và song song với AB). Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên mp(Δ, Δ').

**Ví dụ 6**: Một mặt phẳng song song với mặt đáy của một hình chóp và cắt hình chóp theo một thiết diện. Có nhận xét gì về thiết diện và đa giác đáy.

**Giải**

Thiết diện là một đa giác có các cạnh song song với đa giác đáy và tỉ số các cạnh song song của hai đa giác bằng nhau. Ngoài ra các góc tương ứng của hai đa giác đó bằng nhau. Vậy thiết diện là đa giác đồng dạng với đáy.

**Ví dụ 7:** Cho ba mặt phẳng ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$) đôi một song song với nhau. Hai đường thẳng a và a' cắt ba mặt phẳng ấy theo thứ tự nói trên tại A, B, C và A', B', C'. Cho AB = 3cm, BC = 4cm, A'C' = 14cm. Tính độ dài A'B', B'C'.

**Giải**

Vì 3 mặt phẳng đôi một song song nên theo định lý Ta-lét:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Do đó: $A'B = \frac{A'C'.AB}{AC} = \frac{14.3}{6} = 6$ cm

Suy ra B'C' = A'C' – A'B' = 8 (cm).

**Ví dụ 8**: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O có AC = a, BD = b. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng ($\alpha$) di động song song với mặt phẳng (SBD) và qua điểm I tên đoạn AC.

a) Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng ($\alpha$).

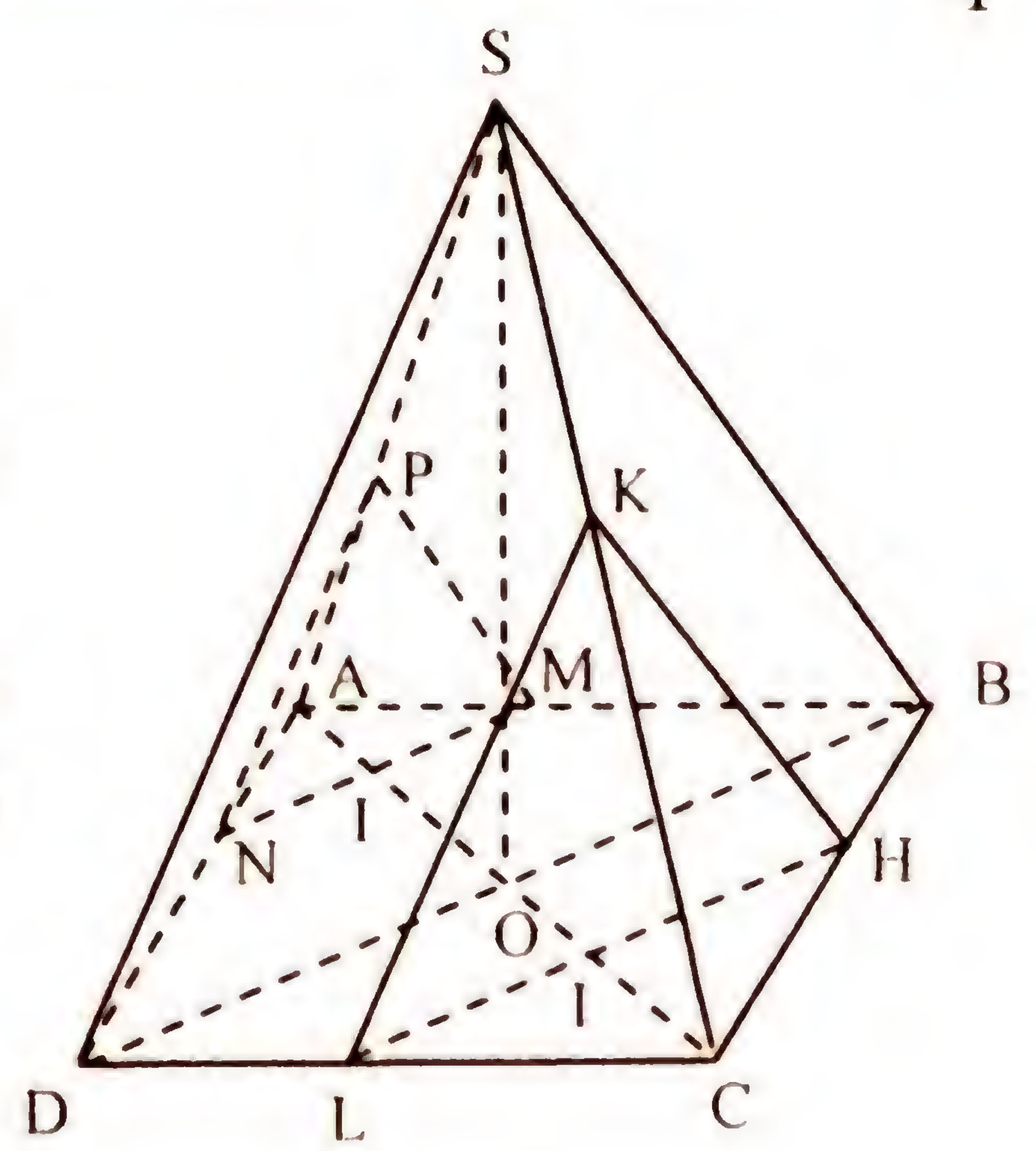
b) Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

**Giải**

a) Ta xét 3 trường hợp

- Nếu I trùng O thì thiết diện là tam giác đều SBD cạnh b có $S_{SBD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

- Nếu I thuộc đoạn OA: $0 < x < \frac{a}{2}$.




Vì ($\alpha$) // (SBD) nên theo tính chất giao tuyến song song thì (ABCD) cắt theo giao tuyến MN qua I, song song với BD.

Tương tự ($\alpha$) cắt (SAB) theo giao tuyến MP song song với SB và cắt (SAD) theo giao tuyến NP song song với SD.

Thiết diện là tam giác đều MNP đồng dạng với tam giác đều SBD.

Ta có: $\frac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\frac{MN}{BD}\right)^2$

Do MN // BD $\Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a}$

$$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$$

- Nếu I thuộc đoạn OC: $\frac{a}{2} < x < a$

Tương tự như trên thì thiết diện là tam giác đều HKL đồng dạng với tam giác đều SBD.

$$\frac{S_{HKL}}{S_{BCD}} = \left(\frac{HL}{BD}\right)^2 = \left(\frac{CI}{CO}\right)^2 = \left(\frac{2(a-x)}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{HKL} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.\frac{4(a-x)^2}{a^2} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$$

b) So sánh 3 kết quả trên

Nếu $0 < x < \frac{a}{2}$ thì $S_{MNP} = \frac{b^2.x^2\sqrt{3}}{a^2} < \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

Nếu $\frac{a}{2} < x < a$ thì $S_{HKL} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2} < \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

Nếu $x = \frac{a}{2}$ thì $S_{SBD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy diện tích thiết diện lớn nhất khi $x = \frac{a}{2}$.

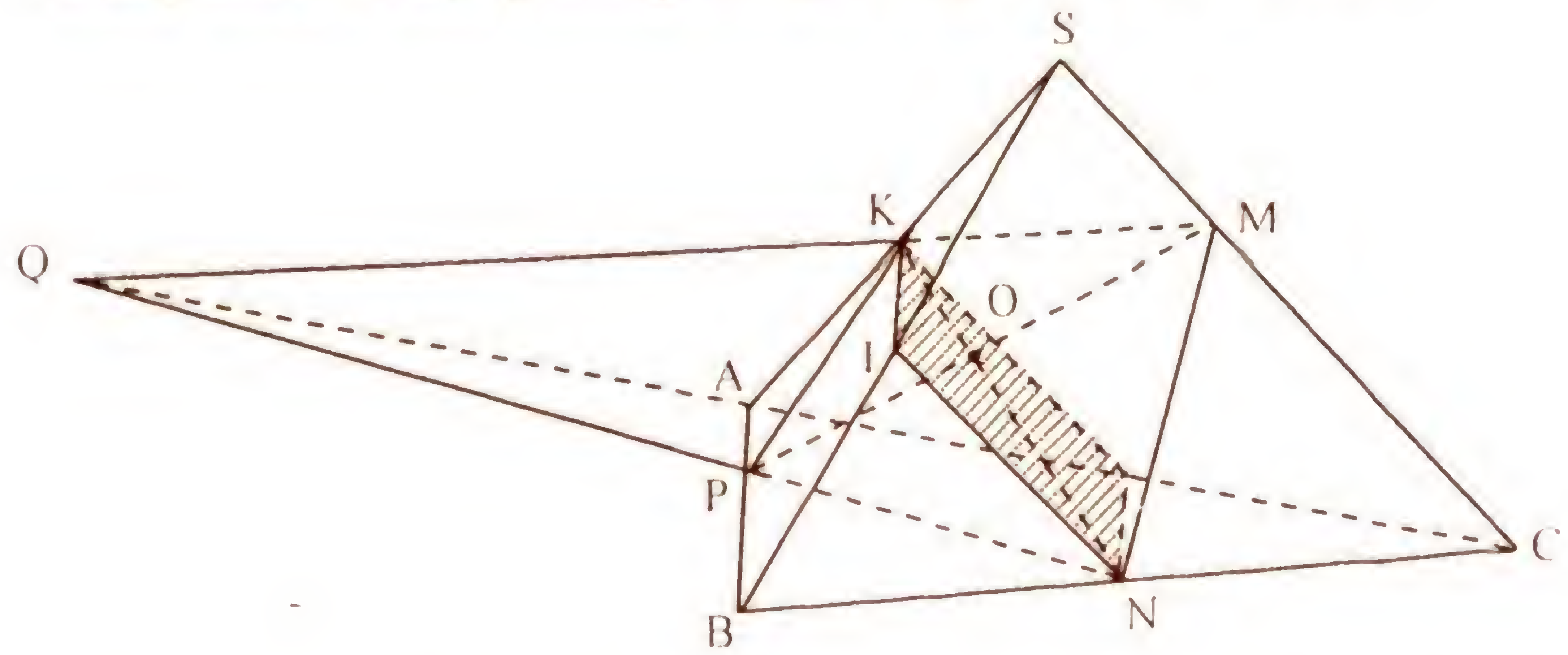
**Ví dụ 9:** Cho hình chóp S.ABC. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC; M là điểm nằm giữa S và C.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua K, song song với AB và SC thì đi qua điểm N.

b) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(KMN). Chứng minh KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

**Giải**

a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SB và AC thì các điểm K, I, N, J cùng thuộc mặt phẳng song song với AB và SC.




b) Nếu M là trung điểm của SC thì thiết diện là hình bình hành MKPN, trong đó P là trung điểm của AB. Đường chéo KN chia hình bình hành MKPN thành hai phần có diện tích bằng nhau.

- Nếu M không là trung điểm của SC. Gọi Q là giao điểm của KM và AC, P là giao điểm của QN và AB. Khi đó thiết diện là tứ giác MKPN. Gọi I, J là trung điểm của SB, AC thì IKJN là hình bình hành, KI // AB và IN // SC nên AB, SC // (IKJN).

Do đó ba mặt phẳng đôi một song song lần lượt chứa KN, AB, SC. Gọi O là giao điểm của MP và KN thì O là giao điểm của MP với (IKJN). Các mặt phẳng song song lần lượt cắt SA tại K, A, S và cắt MP tại O, P, M. Theo định lí Ta-lét $\frac{OM}{ON} = \frac{KS}{KA} = 1$ nên O là trung điểm của MP.

Vì O là trung điểm của MP nên $S_{MKN} = S_{PKN} \Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 10:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên AB, CC', C'D' và AA' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = C'N = C'P = AQ = x $(0 \le x \le a)$.

a) Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

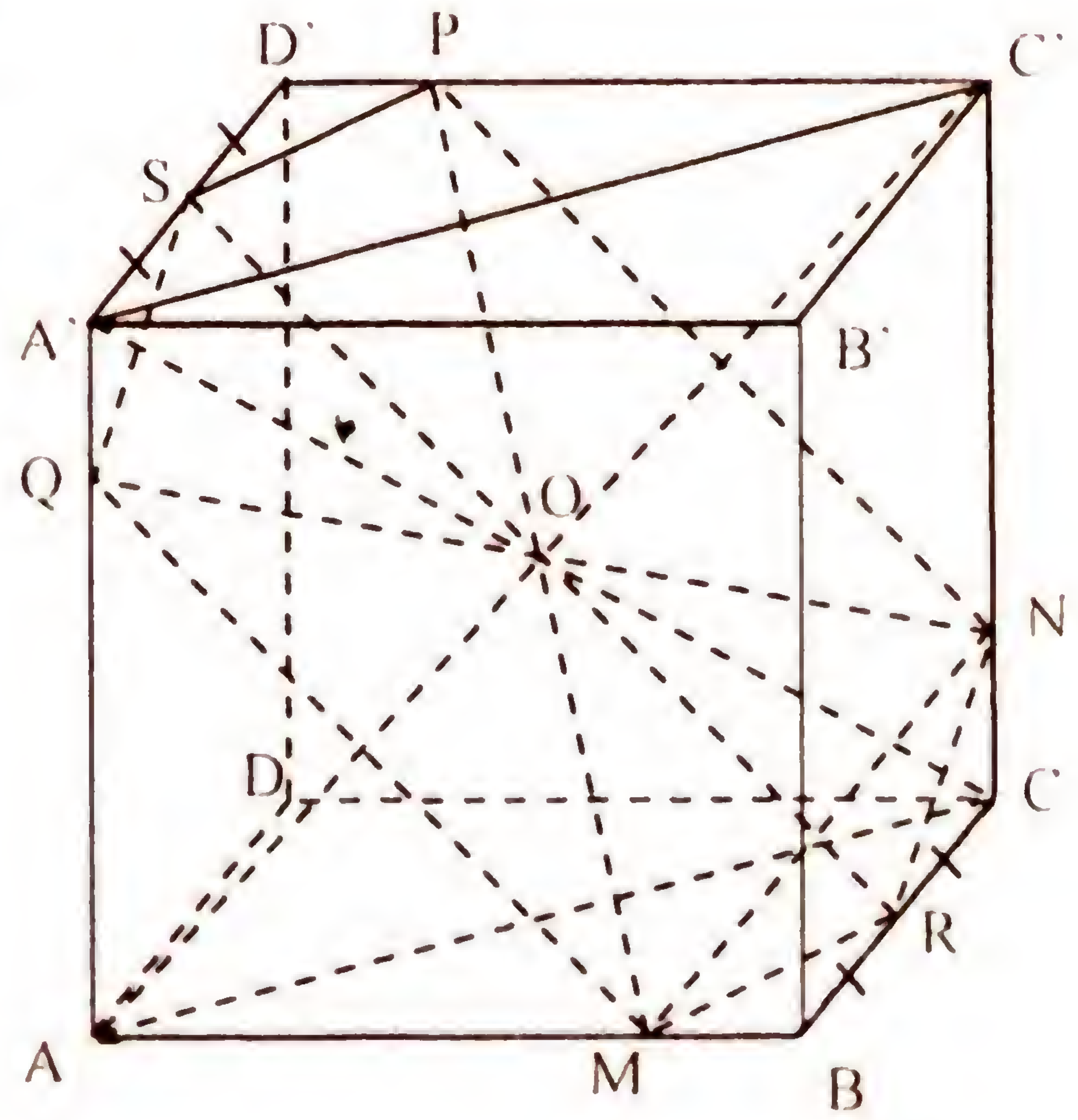
b) Chứng minh mặt phẳng (MNPQ) luôn chứa một đường thẳng cố định. Định x để (MNPQ) // (A'BC').

c) Dựng thiết diện của hình lập phương cắt bởi (MNPQ). Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

**Giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{NC'}$ do đó NQ đi qua trung điểm của A'C, tức qua tâm O của hình lập phương.

Tương tự $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC'}$, do đó MP đi qua trung điểm O của A'C. Vậy MP, NQ cắt nhau tại tâm O của hình lập phương và có M, N, P, Q đồng phẳng.




b) Ta có: AM = AQ = x và AB = AA' = a
$\Rightarrow$ MQ // A'B $\Rightarrow$ A'B // (MNPQ)
Vậy (MNPQ) chứa đường thẳng cố định qua O và song song với AB. Đường này đi qua trung điểm R và S của BC và A'D'.
(MNPQ) // (A'BC') $\Rightarrow$ BC' // (MNPQ)
$\Rightarrow$ BC' // RN $\Rightarrow \frac{BR}{BC} = \frac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Đảo lại, nếu $x = \frac{1}{2}$ thì MQ // A'B; RN // BC'

$\Rightarrow$ (MNPQ) // (A'BC'). Vậy $x = \frac{1}{2}$.

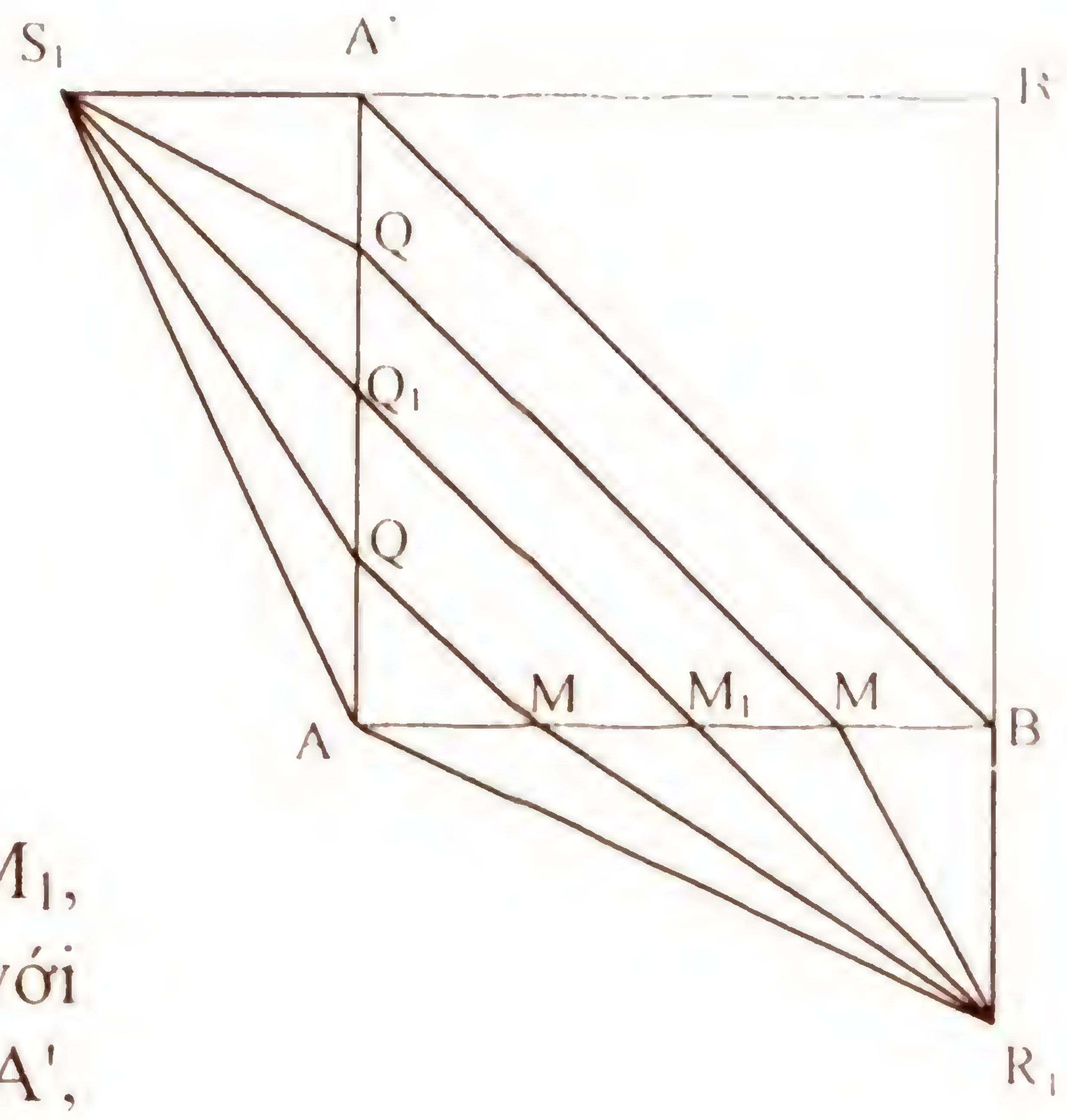
c) Thiết diện là lục giác MRNPSQ có tâm đối xứng là O. Suy ra các cặp cạnh MQ và NP, MR và SP, RN và SQ bằng nhau.

Ta có: $MR = RN = SP = SQ = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a - x)^2}$

$MQ = NP = x\sqrt{2}$.

Kéo dài B'B một đoạn $BR_1 = \frac{a}{2}$,

kéo dài B'A' một đoạn $A'S_1 = \frac{a}{2}$ thì:




$MR = MR_1 = QS = QS_1$.

Chu vi thiết diện p bằng 2 lần độ dài đường gấp khúc $S_1QMR_1$. Độ dài $S_1QMR_1$ ngắn nhất khi $S_1$, Q, M, $R_1$ thẳng hàng.

Chu vi thiết diện ngắn nhất khi $M \equiv M_1$, $Q \equiv Q_1$, với M là giao điểm của $S_1R_1$ với AB và Q là giao điểm của $S_1R_1$ với AA', tức M, Q là trung điểm của AB, AA'.

Vậy $\min(p) = 6M_1Q_1 = 3a\sqrt{2}$.

Khi $M \in AM_1$ thì $p \le S_1A + AR_1 = 2\sqrt{AB^2 + BR_1^2} = a\sqrt{5}$

Khi $M \in BM_1$ thì $p \le S_1A' + A'B + BR_1$

$$= \frac{a}{2} + a\sqrt{2} + \frac{a}{2} = a(\sqrt{2} + 1)$$

Vì $a\sqrt{5} < a(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow$ Chu vi $p \le a(\sqrt{2} + 1)$ với mọi M. Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B \equiv A'$. Vậy $\max(p) = 2a(\sqrt{2} + 1)$.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**1.** Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SD.

a) Chứng minh mặt phẳng (MNP) song song với (ABCD).

b) Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP).

**HD:** b) dùng tính chất giao tuyến song song

**2.** Chứng minh hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

**3.** Trong (P) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (P). Trên a, b, c lần lượt lấy 3 điểm A', B', C' tuỳ ý.

a) Hãy xác định giao điểm D' của d với mặt phẳng (A'B'C').

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành và AA' + CC' = BB' + DD'.

c) Khi các điểm A', B', C' thay đổi, tìm quỹ tích giao điểm của A'C' với B'D'.

**ĐS:** c) đường thẳng qua tâm của hình bình hành ABCD va song song với đường thẳng a, b, c, d.

4. Cho điểm O nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi M là một điểm thay đổi trên (P). Tìm quỹ tích các điểm M chia OM theo tỉ k cho trước.

5. Cho 2 điểm M, N thay đổi trên 2 mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.

**ĐS:** mặt phẳng song song với (P) và (Q), đi qua trung điểm của đoạn cố định có 2 mút thuộc (P) và (Q).

6. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên a và b. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.

7. Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho AM= BN.

a) Chứng minh MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các trung điểm I của MN.

**HD:** Gọi O là trung điểm của AB cố định, vẽ Ox' song song Ax, Oy' song song với By. Chuyển về mặt phẳng x'Oy'.

8. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, đáy lớn AB = 3a, AD = CD = a. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với SA=2a, (Z) là mặt phẳng di động song song với (SAB), cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh : MNPQ là hình thang cân.

b) Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp những điểm I khi M di động trên AD

c) Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh: IJ có phương không đổi và J di động trong một mặt phẳng cố định.

**ĐS:** b) giao tuyến của mp(SAD) và mp(SBC).

9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua 3 trung điểm của AB, AD và CC'.

**HD:** mặt phẳng cắt 2 mặt song song theo 2 giao tuyến song song

10. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.Gọi I, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, BCC'B'. Xác định thiết diện của mặt phẳng (A'IK) với hình hộp đã cho.

11. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên 3 cạnh AB, DD', C'B'' lần lượt lấy M, N, P sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{D'N}{D'D} = \dfrac{B'P}{B'C'}$.

a) Chứng minh (MNP) // (AB'D').

b) Xác định thiết diện cắt bởi (MNP).

12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.Gọi E, F, K là trung điểm của AB, DD', B'C'.Xác định thiết diện cắt bởi :

a) mp(EFB)

b) mp(EFC)

c) mp(EFC )

d) mp(EFK)

**13**. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của cạnh BC và B'C'.

a) Chứng minh: AM//A'M'.

b)Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB'C') với đường thẳng A'M.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AMA'). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

**14.** Cho một hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D', đáy là hình thang có AD = CD = BC = a, AB = 2a. Mặt phẳng (P) qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác AMNP là hình gì? So sánh AM và NP.

b) Tìm tập hợp giao điểm của AN và MP khi (P) di động.

c) Chứng minh BM+2DP=2CN.

**HD:** b) tập hợp là giao tuyến của 2 mặt phẳng cố định lần lượt chứa hai đường thẳng AN và MP

**15**. Cho một hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'.Chứng minh

a) Hai đường chéo AC' và A'C cắt nhau, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau.

b) Khoảng cách giữa 2 giao điểm của hai cặp đường chéo nói trên bằng độ dài đoạn nối trung điểm của hai đường chéo 2 đáy.

**16**. Cho hình chóp cụt tam giác ABC.A'B'C' trong đó ABC là đáy lớn. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC'. Chứng minh : $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SC'}{SC}$.

**HD:** dùng định nghĩa về hình chóp cụt

**17**. Cho hình chóp S.ABCD. Tứ giác đáy có AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F, AC và BD cắt nhau tại G. Gọi (P) là mặt phẳng cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'.

a) Hãy tìm giao điểm D' của cạnh SD với (P).

b) Có bao nhiêu mặt phẳng (P) để tứ giác A'B'C'D' là một hình bình hành?

**18**. Cho tứ diện ABCD. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi luôn luôn đi qua các trung điểm I và K của các cạnh DA và DB. Giả sử (P) cắt các cạnh CA, CB lần lượt tại M và N.

a) Tứ giác MNKI có tính chất gì? Với vị trí nào của (P) tứ giác đó là hình bình hành.

b) Chứng minh giao điểm O của MI và NK thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (OAB). Chứng minh d luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

**HD:** b) dùng giao tuyến song song

**19.** Cho tứ diện ABCD có AB=AC=CD=a và AB vuông góc với CD. Lấy một điểm M trên cạnh AC với AM=x ($0<x<a$). Mặt phẳng (W) đi qua M song song với AB và CD cắt BC, BD, AD tại N, P, Q.

a) Chứng minh: MNPQ là một hình chữ nhật.

b) Tính diện tích hình chữ nhật này theo a và x.

c) Xác định x để diện tích của hình chữ nhật MNPQ là lớn nhất.

**ĐS:** b) $S = x(a - x)$

**20.** Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (P) tại A và B. Gọi m là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (P) và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua điểm N vẽ đường thẳng c song song với a cắt (P) tại điểm C.

a) Tứ giác MNCA là hình gì?

b) Chứng minh điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

c) Xác định vị trí của đường thẳng m để độ dài MN nhỏ nhất.

**21.** Cho hai hình vuông ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng cắt nhau. Trên các đường chéo AC và BF ta lấy các điểm M, N sao cho AM=BN. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AB cắt AD và AF lần lượt tại M' và N'.

a) Tứ giác MNN'M' là hình gì?

b) Chứng minh: M'N' song song với EC.

c) Chứng minh: MN song song với mặt phẳng (DEF).

d) Tính đoạn AM để DM, AB và EN đồng quy theo a = AB.

**ĐS:** d) $AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

**22.** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và CC'. Một điểm M nằm trên cạnh bên DD'.

a) Xác định giao điểm Q của đoạn thẳng BB' và mp(MNP).

b) Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo một thiết diện gì?

c) Tìm giao tuyến của (MNP) với (ABCD) .

**23.** Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và AC.

a) Dựng thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNB').

b) Gọi P là trung điểm của cạnh B'C'. Dựng thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (MNP).

**24.** Cho lăng trụ ABC.A'B'C' đáy tam giác đều cạnh a. Gọi M, N, P à 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn AB', AC', B'C sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{C'N}{AC'} = \frac{CP}{CB'} = x$.

a) Định x để (MNP)//(A'BC'). Khi đó hãy tính diện tích của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

b) Tìm tập hợp trung điểm của NP khi x thay đổi.

**ĐS:** a) $x = \frac{1}{3}$, $S = \frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$

**25.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Hai điểm lưu động M trên BD và N trên A'C' .Tìm tập hợp trung điểm của :

a) đoạn MA'                b)đoạn MN

**HD:** a) đường trung bình                b) hình vuông

**26.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên AB, CC', C'D' và AA' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = C'N = C'P = AQ = x ( $0 \le x \le a$ )

a) Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh mặt phẳng (MNPQ) luôn chứa một đường thẳng cố định.

c) Định x để mặt phẳng (MNPQ)// mp(A'BC').

d) Dựng thiết diện cắt bởi (MNPQ). Thiết diện có đặc điểm gì về cạnh? Tính gía trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

**ĐS:** c) $x = \frac{1}{2}$

**27.** Cho tứ diện ABCD, gọi $G_1$, $G_2$, $G_3$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACD, ADB.

a) Chứng minh: mặt phẳng ($G_1G_2G_3$) // (BCD).

b) Tìm thiết diện cắt bởi mặt phẳng ($G_1G_2G_3$). Tính diện tích thiết diện biết diện tích tam giác BCD là s.

c) M là điểm di động bên trong tứ diện sao cho $G_1M$ luôn song song với mặt phẳng (ACD). Tìm tập hợp các điểm M.

**28.** Từ điểm O bất kỳ trong tứ diện, vẽ 6 đường thẳng song song với 6 cạnh tứ diện có độ dài lần lượt là a, b, c, d, e, f . Sáu đường thẳng này bị các cặp mặt tương ứng chắn thành các đoạn dài a', b', c', d', e', f'.

Chứng minh : $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} + \frac{e'}{e} + \frac{f'}{f} = 3$.

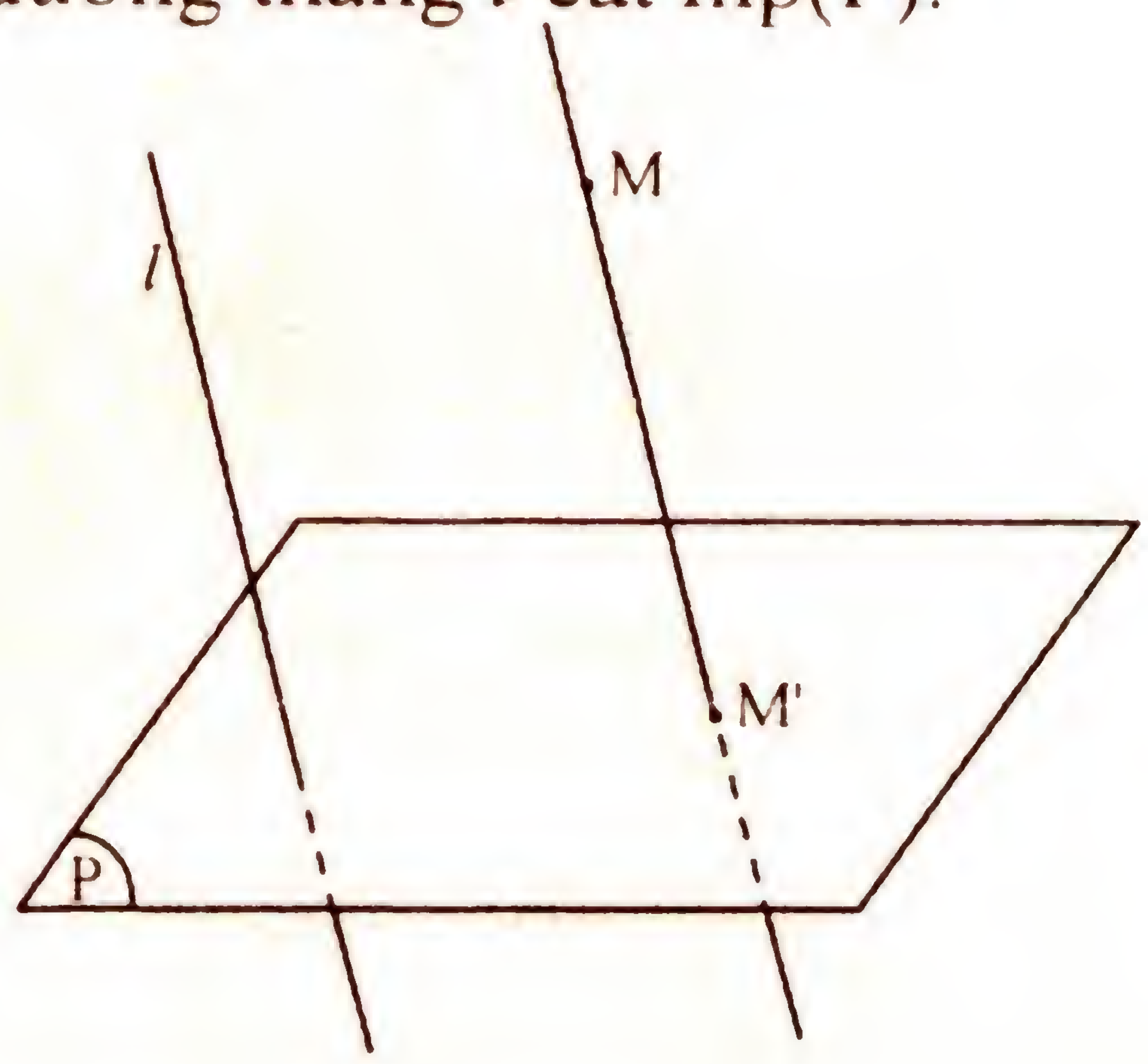
**HD:** ghép các cặp tương ứng và chứng minh $\frac{a'}{a} + \frac{c'}{c} = 1$.

# §4. PHÉP CHIẾU SONG SONG

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Trong không gian cho mặt phẳng (P) và đường thẳng $l$ cắt mp(P).

Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với $l$. Đường thẳng này cắt mp(P) tại một điểm M'.




Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) như trên gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương $l$.

- Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng $l$ gọi là phương chiếu; điểm M' gọi là hình chiếu song song hoặc ảnh của điểm M qua phép chiếu song song.

- Cho hình (H). Tập hợp (H') gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc (H) gọi là hình chiếu song song hoặc ảnh của hình (H) qua phép chiếu nói trên.

• Tính chất của các đường thẳng không song song hoặc trùng phương chiếu:

- Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng, của một tia là một tia.

- Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

• Hình biểu diễn của một hình (H) trong không gian là hình chiếu song song của hình (H) trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

- Nếu trên hình (H) có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì chúng được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau, mà tỉ số của hai đoạn thẳng này còn phải bằng tỉ số của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình (H).

- Hình chiếu song song của một đường tròn là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

## B. CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau;

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

**Giải**

Theo các định nghĩa thì mệnh đề c) đúng.

**Ví dụ 2**: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau;

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau;

d) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó.

**Giải**

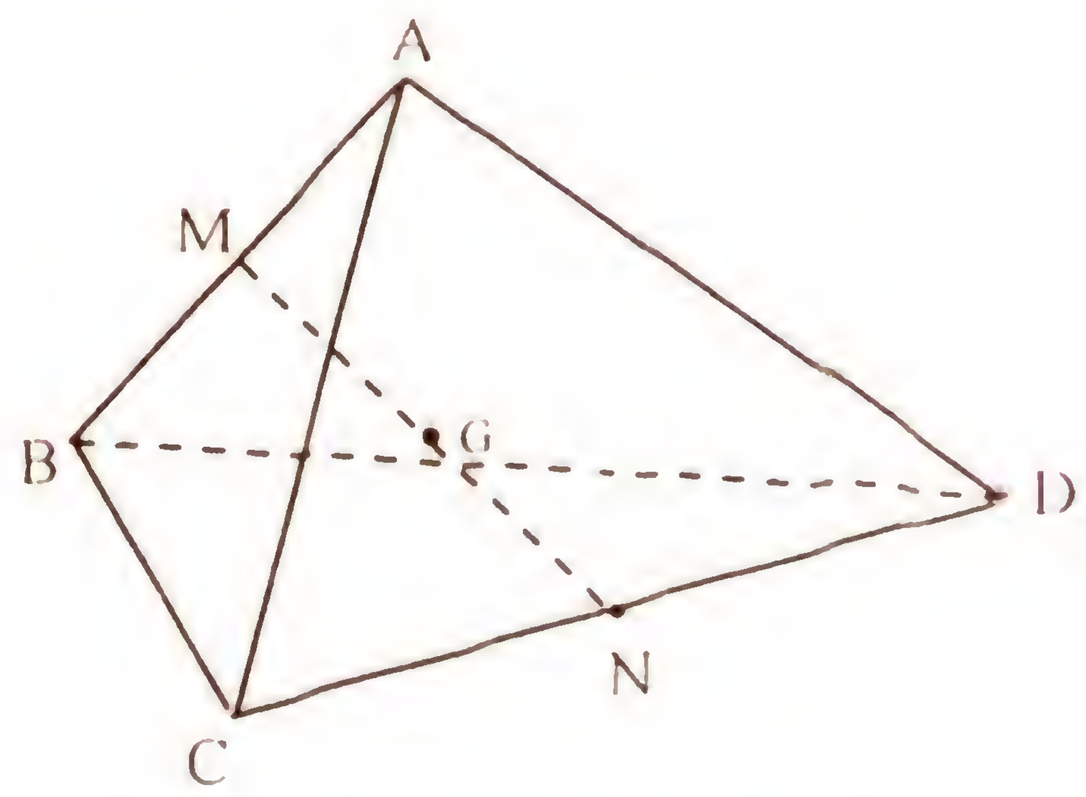
Dựa vào các định nghĩa thì mệnh đề b) đúng và c) đúng.

**Ví dụ 3:** Vẽ hình biểu diễn của:

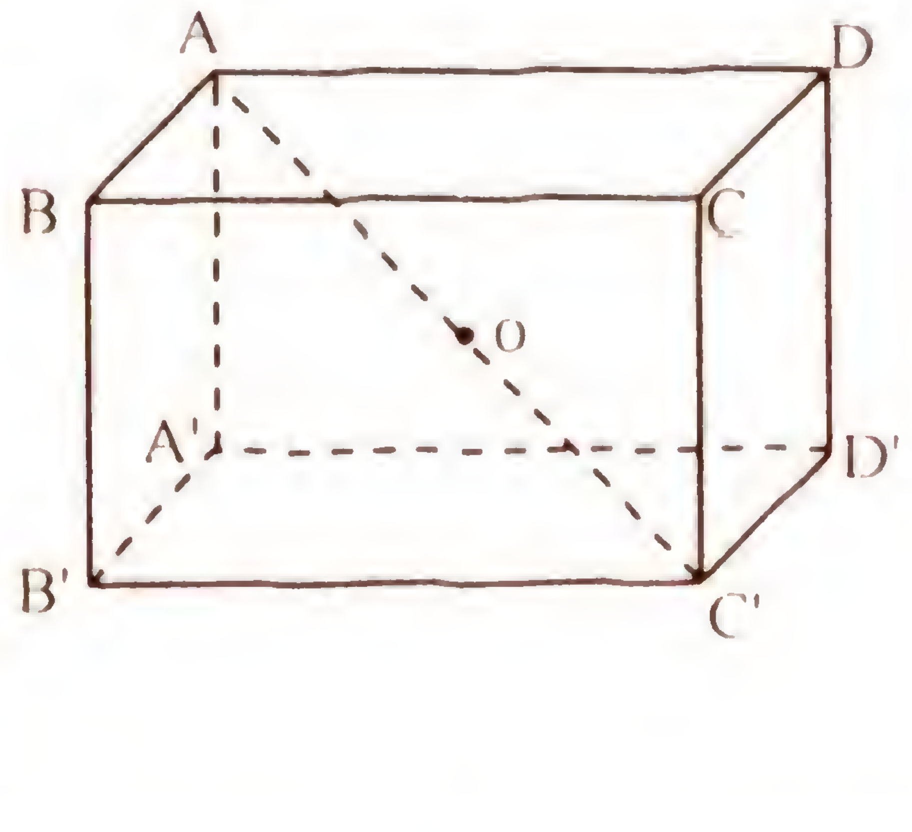
a) Một tứ diện và trọng tâm của nó.

b) Một hình hộp và tâm của nó.

**Giải**




a) Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện ABCD. Lấy M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì trung điểm G của MN sẽ biểu diễn cho trọng tâm của tứ diện.



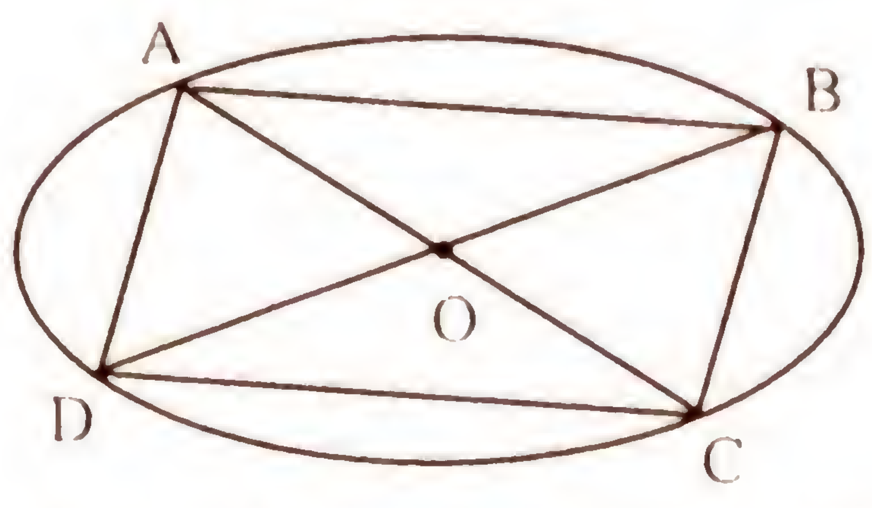

b) Vẽ hình biểu diễn của một hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tâm của hình hộp là trung điểm O của đường chéo AC'.

**Ví dụ 4**: Vẽ hình biểu diễn của:

a) Một tam giác vuông nội tiếp đường tròn.

b) Một hình chữ nhật nội tiếp đường tròn.

**Giải**




a) Vẽ elip tâm O là hình biểu diễn của đường tròn đã cho. Lấy B và C là hai điểm trên elip sao cho B, O, C thẳng hàng và một điểm A thuộc elip sao cho A khác B và C.

Khi đó, tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.

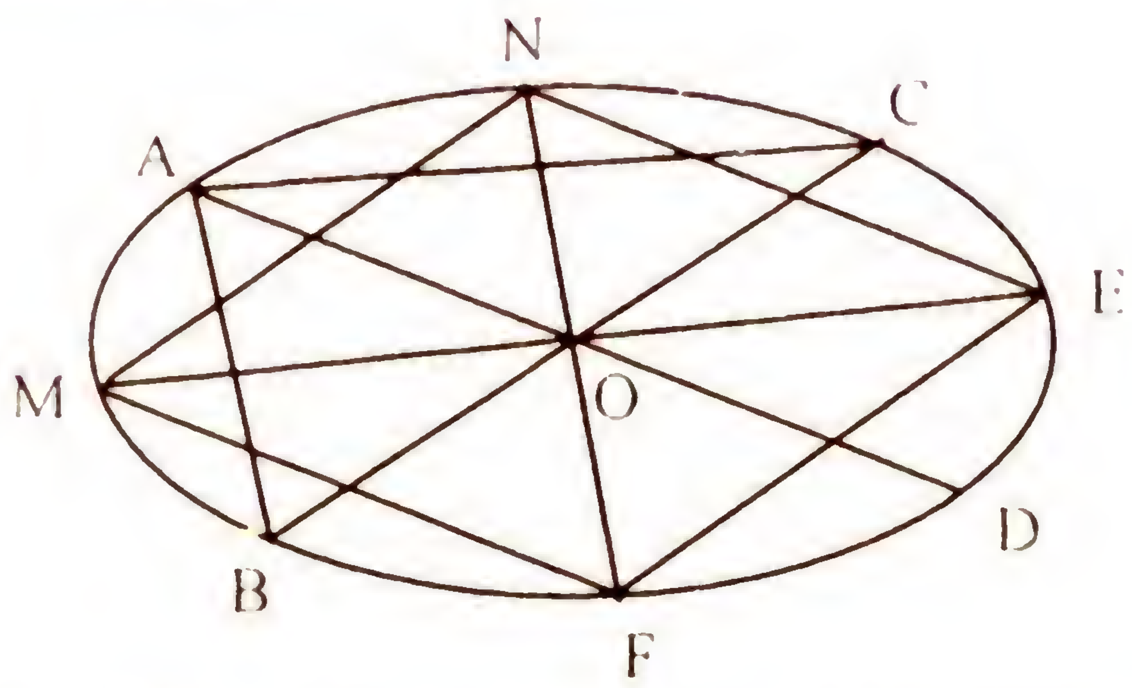
b) Hình chữ nhật ABCD có 2 đường chéo là 2 đường kính đồng quy tại tâm O của đường tròn.

**Ví dụ 5:** Vẽ hình biểu diễn của:

a) Một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

b) Một lục giác đều.

**Giải**



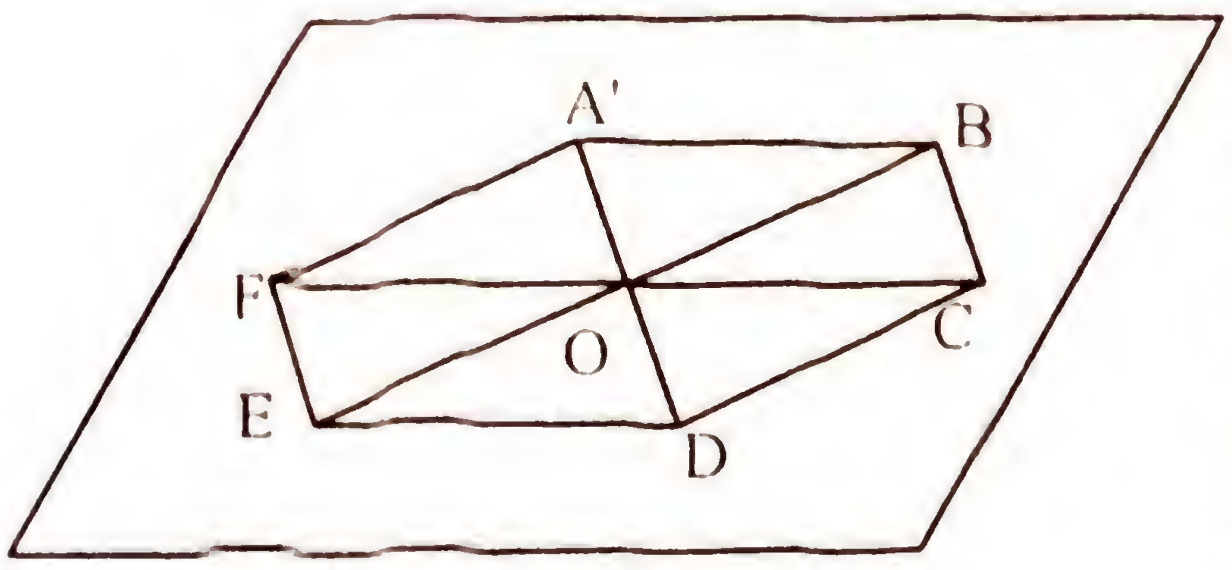

a) Hình vuông MNEF nội tiếp (O) khi có 2 đường chéo là 2 đường kính vuông góc nhau, do đó ME và NF song song với 2 cạnh của tam giác vuông nội tiếp (O).

Trước hết, vẽ tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông tại nội tiếp trong một đường tròn. Qua O ta kẻ hai dây ME và NF của elip lần lượt song song với AC và AB.

Khi đó tứ giác MNEF là hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

b) Lục giác đều ABCDEF có tứ giác OABC là hình thoi và các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O.

**Giải**




Trước hết, vẽ hình bình hành biểu diễn cho hình hình thoi OABC. Lấy các điểm D, E, F lần lượt đối xứng với các điểm A', B', C' qua O thì được hình biểu diễn của hình lục giác đều ABCDEF.

Cách khác: ABDE là hình chữ nhật và OC cắt BD tại trung điểm của mỗi đường.

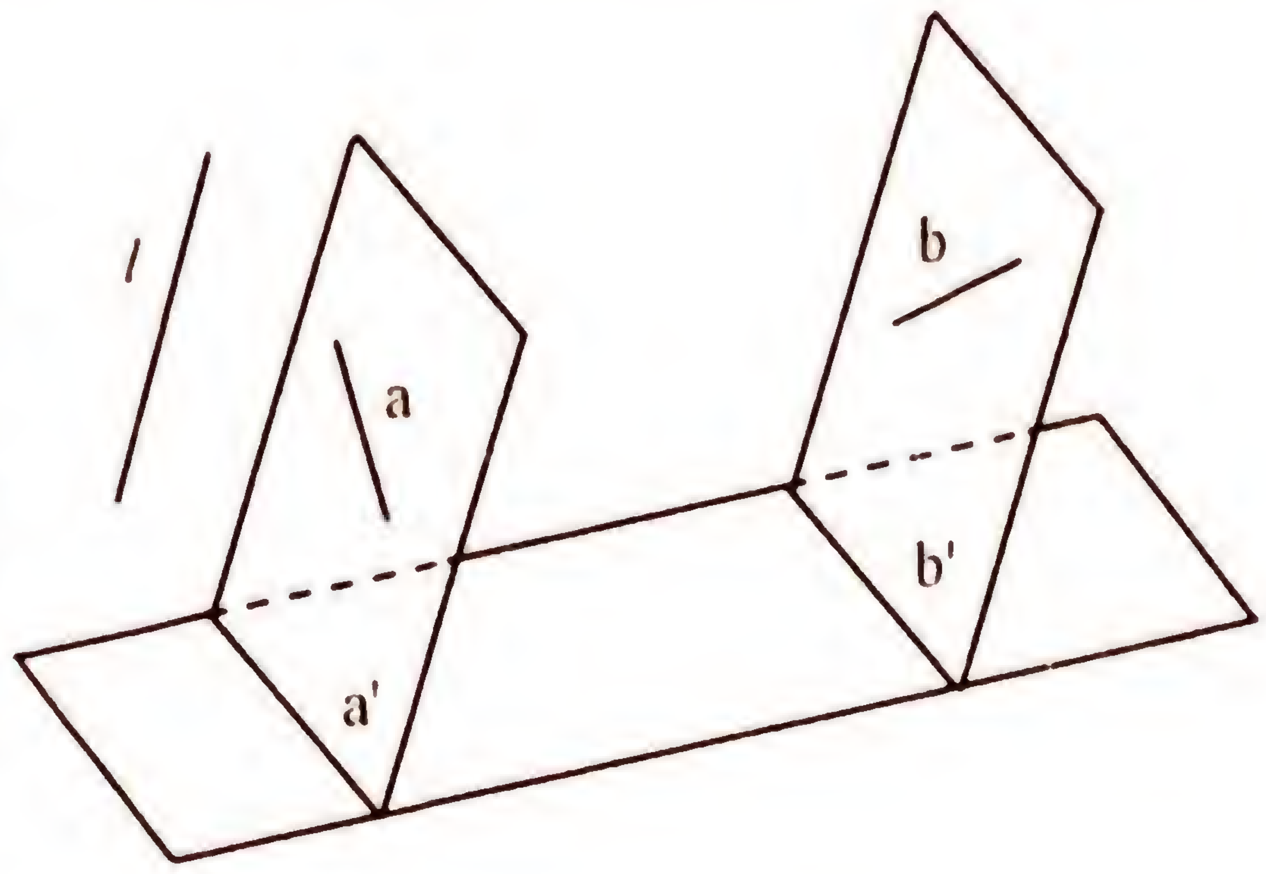
**Ví dụ 6**: Hình thang có thể là hình biểu diễn của hình bình hành không?

**Giải**

Hình thang không thể là hình biểu diễn của hình bình hành vì hai cạnh bên của hình thang không song song trong khi đó cặp cạnh đối của hình bình hành thì song song.

**Ví dụ 7:** Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau hay không?

**Giải**

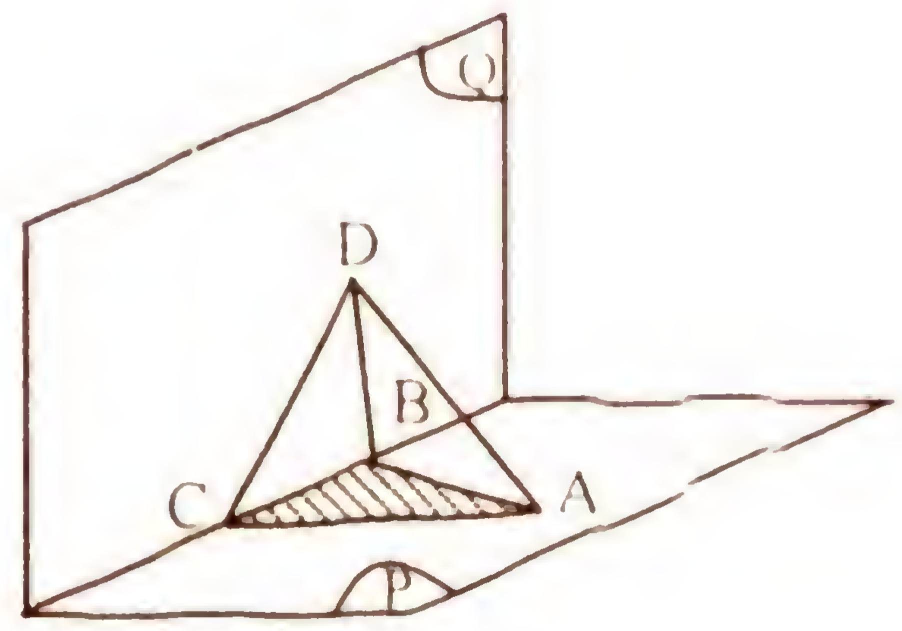



Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau có hình chiếu là a' và b'. Nếu mặt phẳng (a, a') và mặt phẳng (b, b') song song với nhau thì chọn phương chiếu *l* song song với 2 mặt phẳng đó và mặt phẳng chiếu cắt 2 mặt song song theo 2 giao tuyến a' // b'.

Vậy hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song.

**Ví dụ 8**: Trong mặt phẳng (P) cho một tam giác ABC bất kì. Chứng minh rằng có thể xem tam giác ABC là hình chiếu song song của một tam giác đều nào đó.

**Giải**

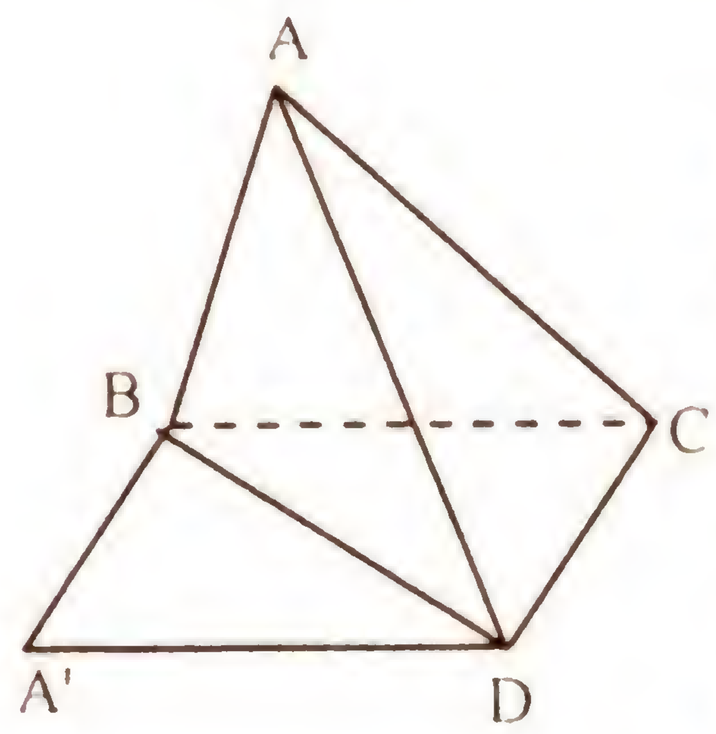



Gọi (Q) là mặt phẳng qua BC và khác với (P). Trong (Q) ta vẽ tam giác đều BCD. Vậy ta có thể xem tam giác

ABC cho trước là hình chiếu song song của tam giác đều DBC theo phương chiếu DA lên mặt phẳng (P).

**Ví dụ 9**: Chứng minh có thể chọn phương chiếu thích hợp để hình chiếu của một hình tứ diện là một hình bình hành, một hình tam giác.

**Giải**

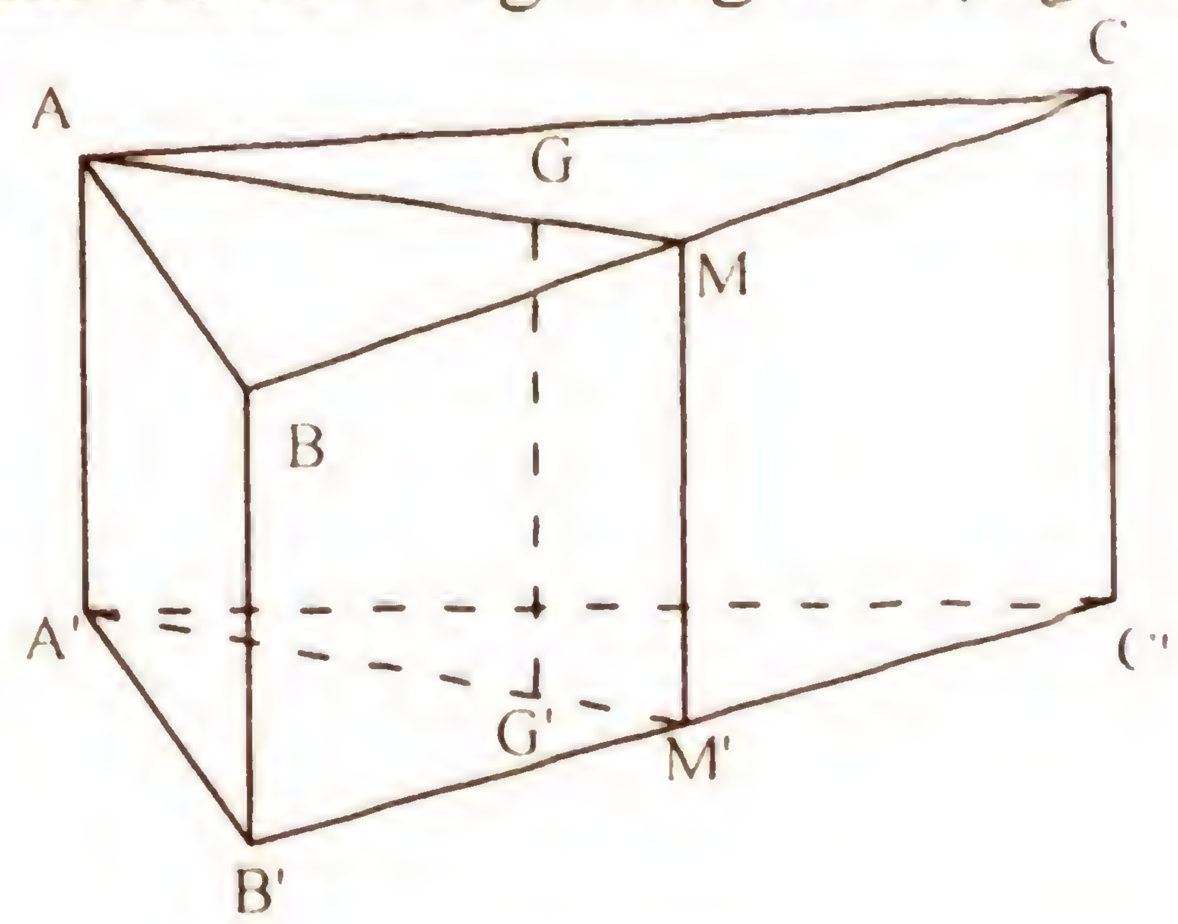



Vẽ hình tứ diện ABCD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B, C, D lấy điểm A' trên (P) sao cho A'BCD là hình bình hành. Chiếu tứ diện ABCD lên mp(P) theo phương chiếu AA' ta được hình chiếu là hình bình hành A'BCD.

Chiếu tứ diện đó lên mp(P) theo phương chiếu AB ta được hình chiếu là tam giác BCD.

**Ví dụ 10**: Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác A'B'C'.

**Giải**




Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và G' là hình chiếu song song của nó. Gọi M là trung điểm của BC thì A, G, M thẳng hàng. Gọi M' là hình chiếu của M. Khi đó, theo tính chất của phép chiếu song song ta có:

B', M', C' thẳng hàng và $\frac{B'M'}{M'C'} = \frac{BM}{MC} = 1$ nên M' là trung điểm của B'C'.

A', G', M' thẳng hàng và $\frac{A'G'}{A'M'} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$

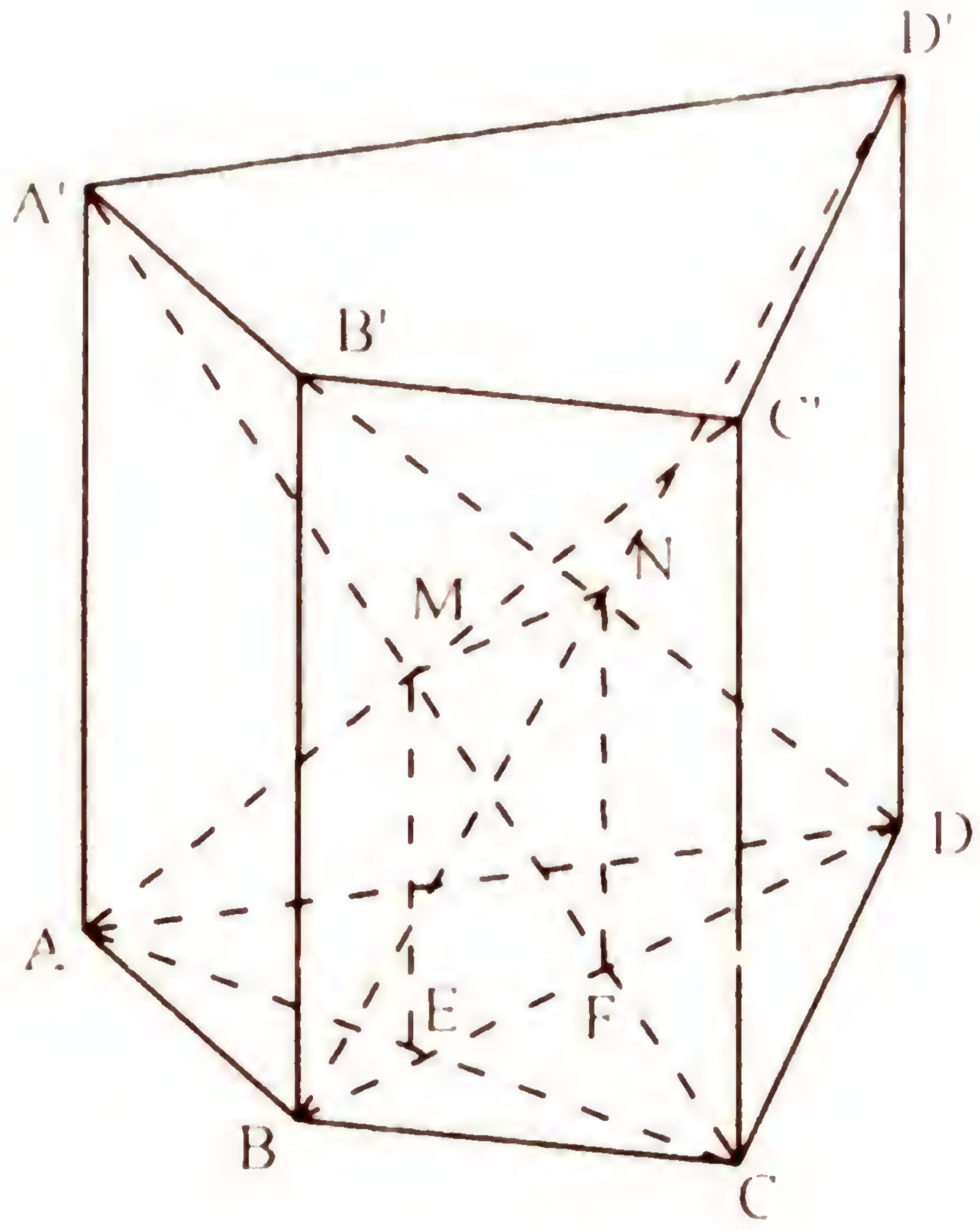
Vậy G' là trọng tâm tam giác A'B'C'.

**Ví dụ 11**: Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng hai đường chéo AC' và A'C cắt nhau, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm M, N mỗi đường.

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh MN = EF.

**Giải**

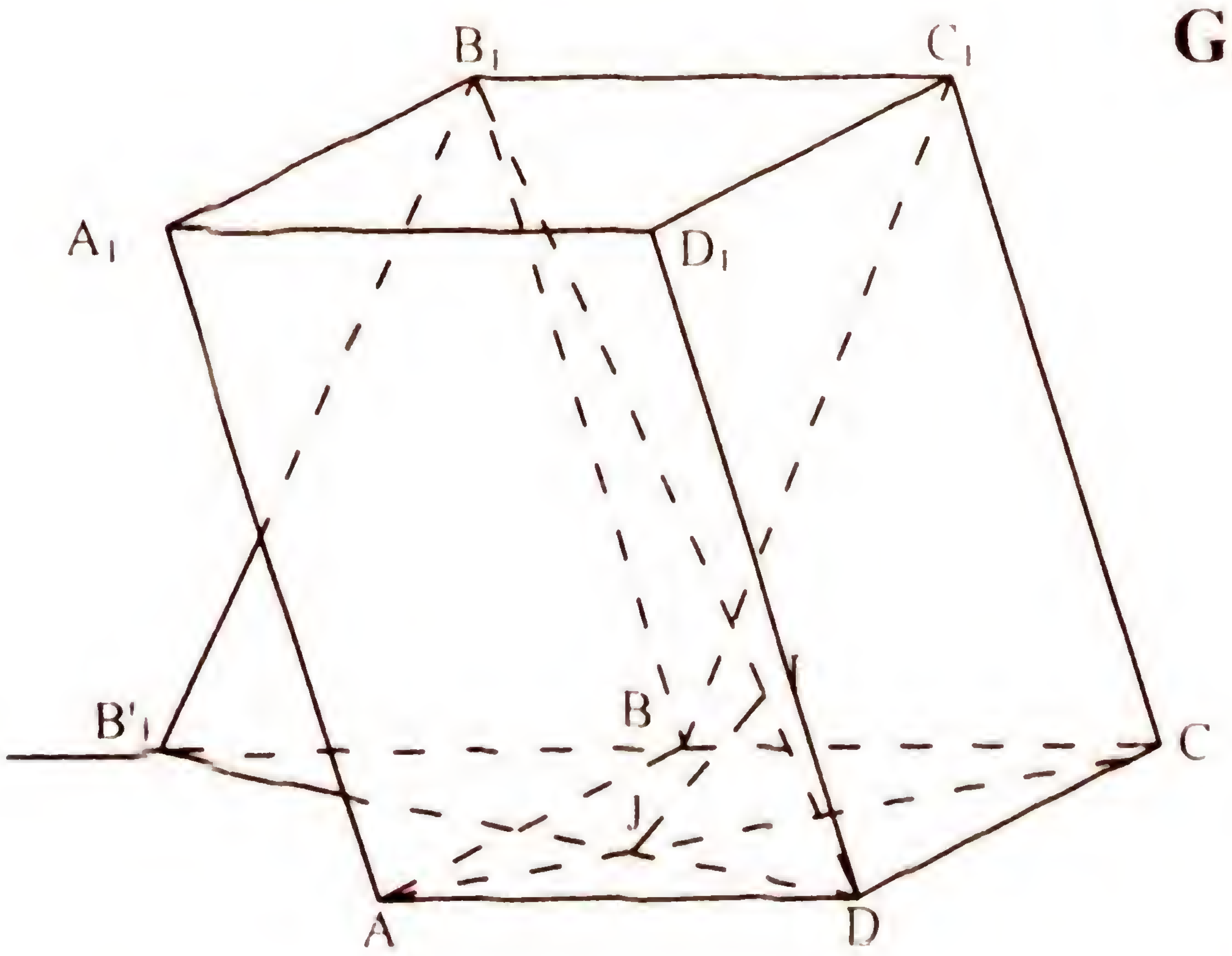



a) Hình bình hành ACC'A' có hai đường chéo là AC' và A'C cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường.

b) Phép chiếu theo phương AA'. Trung điểm E của AC là hình chiếu của trung điểm M của AC'. Tương tự, trung điểm F là hình chiếu trung điểm N của đường chéo BD' trên BD.

Ta có EM // CC' và $EM = \frac{CC'}{2}$. Mà FN // DD' và $FN = \frac{DD'}{2}$ nên tứ giác MNFE là hình bình hành và MN = EF.

**Ví dụ 12**: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm điểm I trên đường chéo $B_1D$ và điểm J trên đường chéo AC sao cho IJ // $BC_1$. Tính tỉ số $\frac{ID}{IB_1}$.




**Giải**

Giả sử đã tìm được $I \in B_1D$, $J \in AC$ sao cho IJ // $BC_1$. Xét phép chiếu song song theo phương $C_1B$ lên mp(ABCD). Khi đó hình chiếu của các điểm D, I, $B_1$ thẳng hàng là D, J, $B'_1$ thẳng hàng. Vậy J chính là giao điểm của hai đường thẳng $B'_1D$ và AC.

Từ đó ta có J như sau:

Vẽ $\overrightarrow{B_1B_1'} = \overrightarrow{C_1B}$, $B'_1D \cap AC = J$.

Trong mp($B_1B'_1D$), vẽ JI song song với $B_1B'_1$ cắt $B_1D$ tại I.

Ta có $B'_1$ thuộc đường thẳng BC và $AD = \frac{1}{2}B'_1C$.

$$\Rightarrow \frac{ID}{IB_1} = \frac{JD}{JB_1'} = \frac{AD}{B_1'C} = \frac{1}{2}.$$

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Vẽ hình biểu diễn của:
   a) một hình chóp đáy tam giác
   b) một hình chóp đáy tứ giác

2. Vẽ hình biểu diễn của:

a) một tứ diện và các trung điểm của các cạnh

b) một tứ diện và trọng tâm của một mặt.

**HD:** dùng tính chất thẳng hàng và tỉ lệ cùng phương

3. Vẽ hình biểu diễn của:

a) hai tam giác vuông cùng cạnh huyền nội tiếp đường tròn

b) một lục giác đều nội tiếp đường tròn .

4. Trong mặt phẳng (P) cho một tam giác ABC. Chứng minh có thể xem ABC là hình chiếu song song của một tam giác cân, tam giác vuông nào đó.

5. Hãy chọn phép chiếu song song (phương chiếu và mặt chiếu) để hình chiếu của một tứ diện cho trước là một hình bình hành mà mặt chiếu không song song hay chứa mặt nào của tứ diện.

**HD:** Gọi M, N là 2 trung điểm của 2 cạnh đối diện. Chọn phương chiếu là MN và mặt chiếu (P) cắt MN mà không song song hay chứa mặt nào của tứ diện

6. Cho hai điểm A và B ở ngoài mặt phẳng (P). Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (P) theo phương của đường thẳng d cho trước. Chứng minh nếu AB song song với (P) thì A'B'=AB. Phần đảo có đúng không?

**HD:** phần đảo không đúng

7. Cho hai điểm A và B ở ngoài (P), giả sử đường thẳng AB cắt (P) tại điểm O. Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (P) theo phương của đường thẳng d.

a) Ba điểm O, A' , B' có thẳng hàng không? Vì sao?

b) Hãy chọn phương chiếu d sao cho A'B'=AB.

c) Hãy chọn phương chiếu d sao cho A'B'=2AB.

**ĐS:** a) ba điểm O, A' , B' thẳng hàng

8. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh hình chiếu song song của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là trọng tâm của tam giác BCD.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC, AD. Tìm hình chiếu song song theo phương AD của các điểm M, N, P.

**HD:** b) phép chiếu song song bảo toàn tỉ lệ trên cùng một đường thẳng hay hai đường thẳng song song.

9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, K lần lượt là các điểm thuộc ba mặt bên (AA', BB'), (BB', CC'), (CC', DD').

a) Xác định các giao điểm của các đường thẳng MN, NK, KM với hai đáy.

b) Mặt phẳng (MNK) cắt hình hộp theo một thiết diện gì?

**HD:** dùng phép chiếu song song theo phương AA'.

CHƯƠNG III:

# VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC

## §1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA VECTƠ

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Định nghĩa vectơ và các phép toán vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng:

- Tổng 2 vectơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Hiệu 2 vectơ: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$
- Nhân vectơ với 1 số: $k\vec{a}$
- Hai vectơ cùng phương: giá của chúng song song hoặc trùng nhau, $\vec{b} = k\vec{a}$
- Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Quy tắc trung điểm: I là trung điểm của AB thì:

  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và với mọi điểm M thì: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$
- Quy tắc trọng tâm: G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, và với mọi điểm M thì:

  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$
- Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành ABCD thì:

  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

• Trong không gian:

- Trọng tâm tứ diện: G là trọng tâm tứ diện ABCD thì

  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, và với mọi điểm M thì:

  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$
- Quy tắc hình hộp: ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì:

  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

• Sự đồng phẳng của 3 vectơ:

- Ba vectơ gọi là đồng phẳng khi các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

- Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là có ba số m, n, p không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$

- Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vectơ $\vec{d}$ đều có thể viết dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với các số m, n, p duy nhất.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: TOÁN CHỨNG MINH

- Sử dụng các phép toán cộng, trừ, nhân vectơ với một số, tích vô hướng.
- Sử dụng các quy tắc trung điểm, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ diện, quy tắc hình bình hành, hình hộp...
- Điểm M chia đoạn AB theo tỉ $k \neq 1$: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, và với mọi điểm O thì: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.
- Hai tam giác ABC, A'B'C' cùng trọng tâm khi và chỉ khi: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

**Ví dụ 1**: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

b) Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

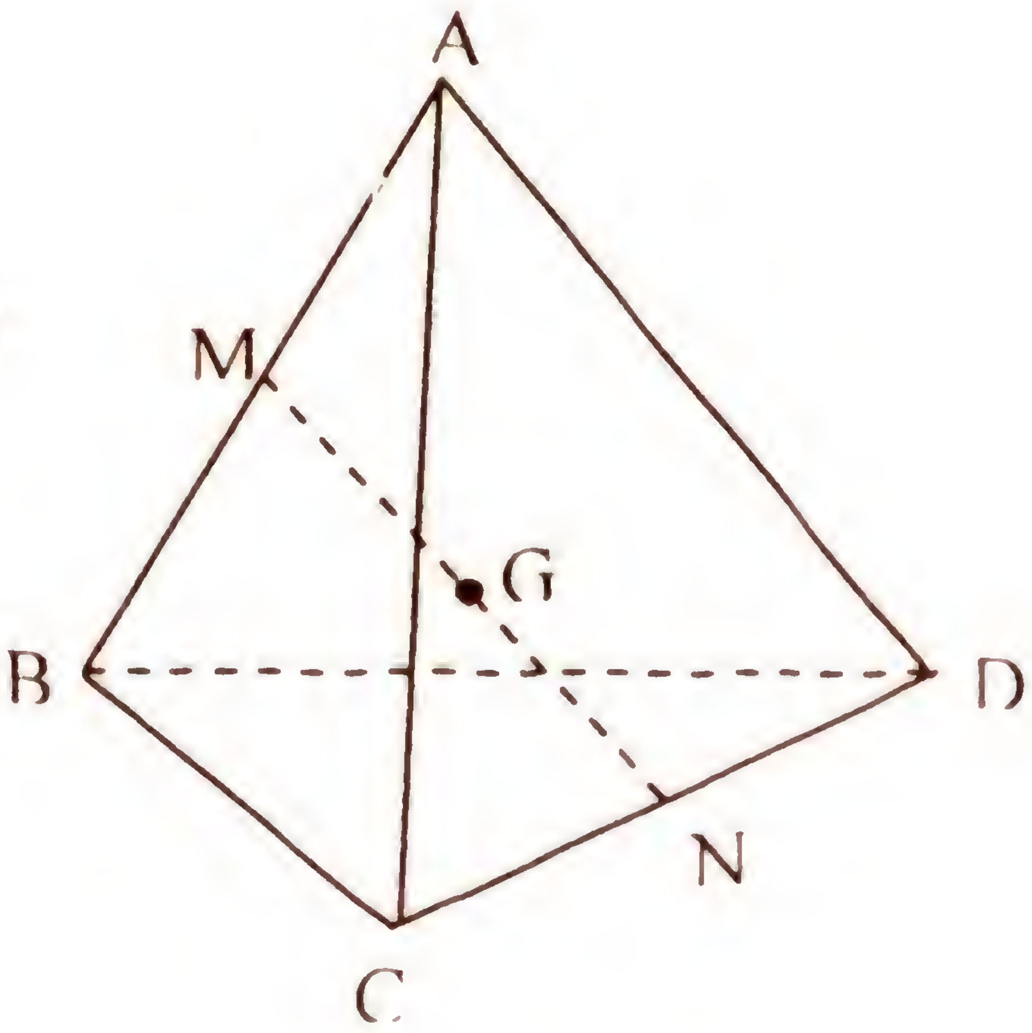
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

**Giải**

a) Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$




Vì M, N là trung điểm của AB, CD nên:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Tương tự thì: $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

b) Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$

Do đó: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow$ G là trung điểm của MN.

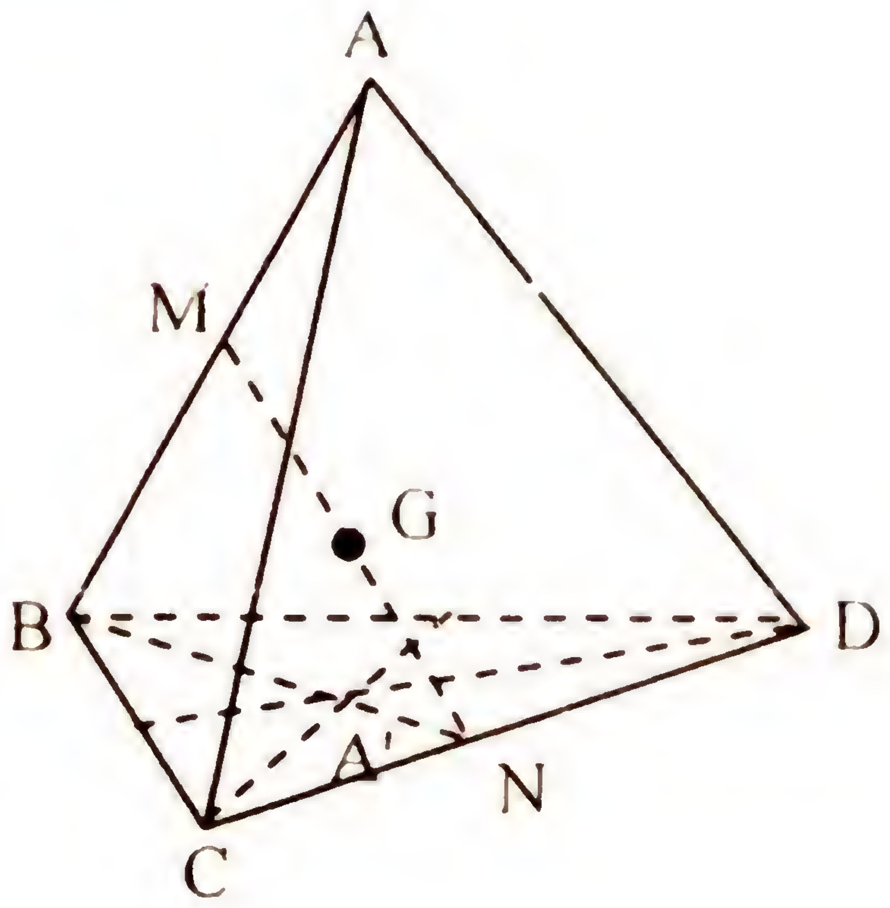
$\Leftrightarrow$ G là trọng tâm tứ diện ABCD.

**Ví dụ 2**: Cho tứ diện ABCD với trọng tâm G:

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$

b) Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh:

$\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D}.\overrightarrow{AA'} = 0$




**Giải**

a) Gọi M, N là trung điểm của AB, CD

Ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$

Vì G là trung điểm của MN nên:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = 4\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D}.\overrightarrow{AA'}$

$= \overrightarrow{AA'}(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}) = 0$, vì A' trọng tâm tam giác BCD.

**Ví dụ 3:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi $D_1$, $D_2$, $D_3$ lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

**Giải**

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Từ giả thiết, ta có: $\overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{b}$

Mà $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Vậy $\overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

Lập luận tương tự như trên ta có: $\overrightarrow{BD_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

và $\overrightarrow{BD_3} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Vậy $\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$

Điều này chứng tỏ B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

**Ví dụ 4**: Cho hình chóp S.ABCD.

a) Chứng minh rằng nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Điều ngược lại có đúng không?

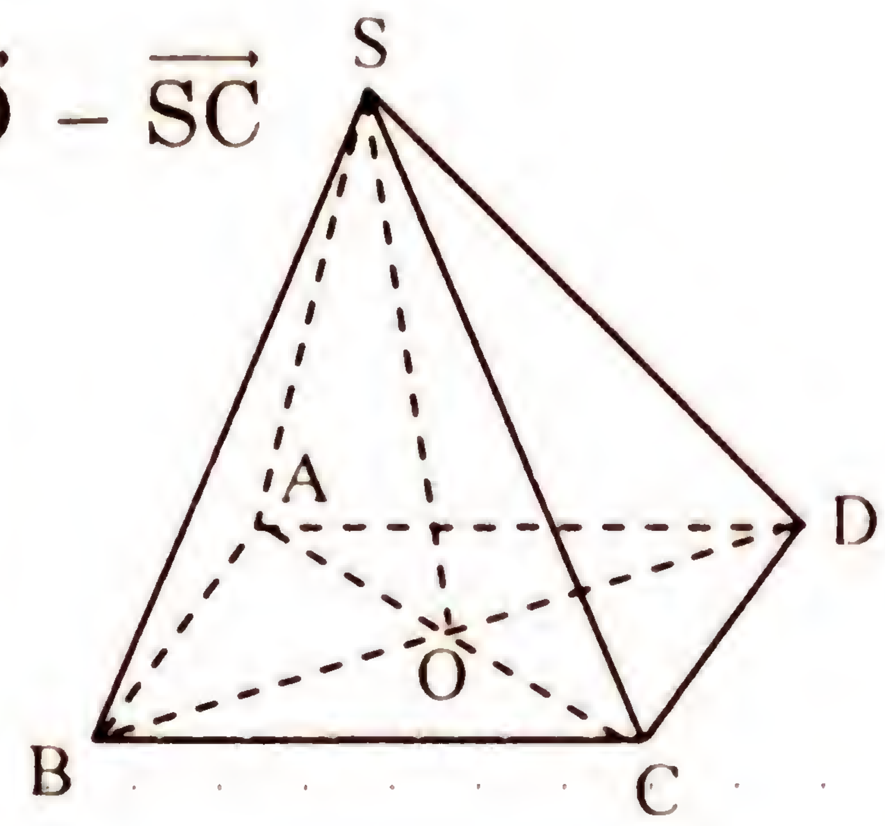
b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

**Giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Vậy với hình chóp S.ABCD thì ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$




b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD thì:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$.

Ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \vec{0}$ điều này chứng tỏ O, M, N thẳng hàng. Mặt khác M thuộc AC, N thuộc BD và O là giao điểm của AC và BD nên O, M, N thẳng hàng chỉ xảy ra khi $O \equiv M \equiv N$, tức O là trung điểm của AC và BD, hay ABCD là hình bình hành: đpcm.

**Ví dụ 5**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với tâm O. Chứng minh:

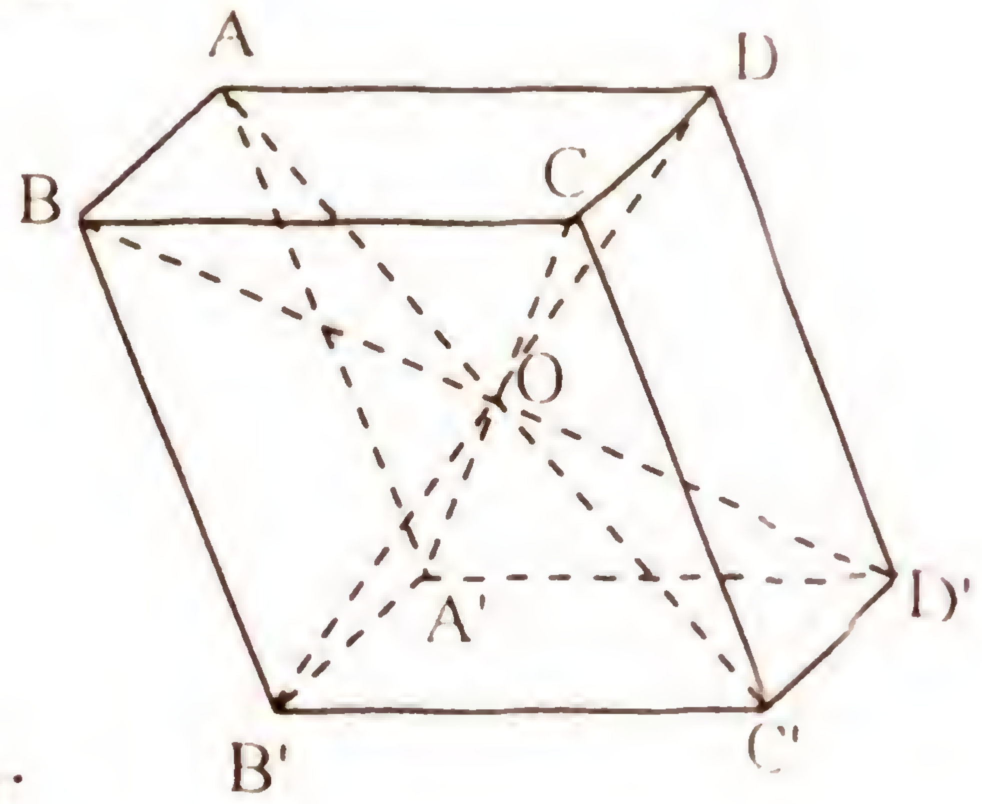
a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$

**Giải**

a) Ta có ABCD, ACC'A' là các hình bình hành nên:




$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'C}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{A'C}$

Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{D'D}$ nên:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{A'C}$

b) Vì tâm O là trung điểm của các đường chéo AC', BD', CA', DB' nên:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB'} = \vec{0}$. Cộng lại thì có đpcm.

**Ví dụ 6**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD, CDD'C, A'B'C'D', ADD'A'. Chứng minh hai tam giác PQR và P'Q'R' có cùng trọng tâm .

**Giải**

Ta chứng minh rằng $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$

Tam giác ABD có PP' là đường trung bình nên $\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Tương tự: $\overrightarrow{QQ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$; $\overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

Do đó: $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0} \Rightarrow$ đpcm.

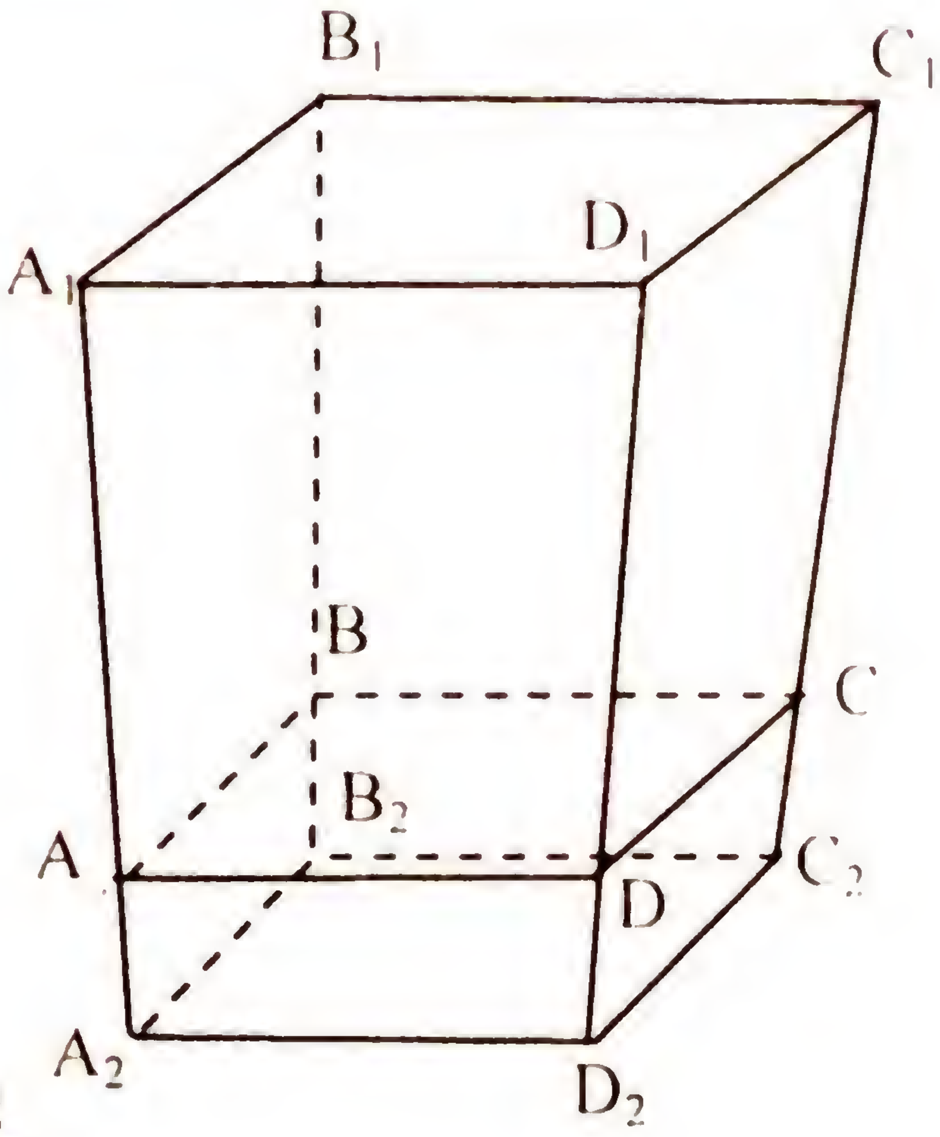
**Ví dụ 7**: Trên mặt phẳng (P) cho hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Về một phía đối với mặt phẳng (P) ta dựng hình bình hành $A_2B_2C_2D_2$. Trên các đoạn $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$ ta lần lượt lấy các điểm A, B, C, D sao cho: $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2} = \frac{DD_1}{DD_2} = k$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành.

**Giải**

Lấy điểm O, đặt $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{b_1}$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{c_1}$, $\overrightarrow{OD_1} = \vec{d_1}$.

$A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành nên:

$\vec{a_1} + \vec{c_1} = \vec{b_1} + \vec{d_1}$.




Tương tự đặt:

$\overrightarrow{OA_2} = \vec{a_2}$, $\overrightarrow{OB_2} = \vec{b_2}$, $\overrightarrow{OC_2} = \vec{c_2}$,

$\overrightarrow{OD_2} = \vec{d_2}$ thì $\vec{a_2} + \vec{c_2} = \vec{b_2} + \vec{d_2}$

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$

Ta có A chia $A_1A_2$ theo tỉ số -k nên $\vec{a} = \frac{\vec{a_1} + k\vec{a_2}}{1+k}$

Tương tự $\vec{b} = \frac{\vec{b_1} + k\vec{b_2}}{1+k}$, $\vec{c} = \frac{\vec{c_1} + k\vec{c_2}}{1+k}$, $\vec{d} = \frac{\vec{d_1} + k\vec{d_2}}{1+k}$

Do đó $\vec{a} + \vec{c} = \frac{(\vec{a_1} + \vec{c_1}) + k(\vec{a_2} + \vec{c_2})}{1+k}$,

$\vec{b} + \vec{d} = \frac{(\vec{b_1} + \vec{d_1}) + k(\vec{b_2} + \vec{d_2})}{1+k}$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Vậy ABCD là hình bình hành.

**Ví dụ 8**: Cho hình chóp S.ABCD đáy là tứ giác, M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm của cạnh CD, G và $G_1$ lần lượt là trọng tâm của đáy và mặt bên (SCD).

a) Xác định I: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = \vec{0}$

b) Chứng minh SG và $MG_1$ qua I, từ đó chứng minh rằng đoạn thẳng nối từ đỉnh với trọng tâm của đáy cùng với bốn đoạn thẳng nối trung điểm của một cạnh đáy với trọng tâm mặt đối diện thì đồng quy tại I.

c) E là trung điểm của SA, đường thẳng EI cắt mặt phẳng đáy tại F, chứng minh F là trọng tâm của ΔBCD.

**Giải**

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD, ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN}$

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN})$

G là trung điểm của MN nên:

$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IG}$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$

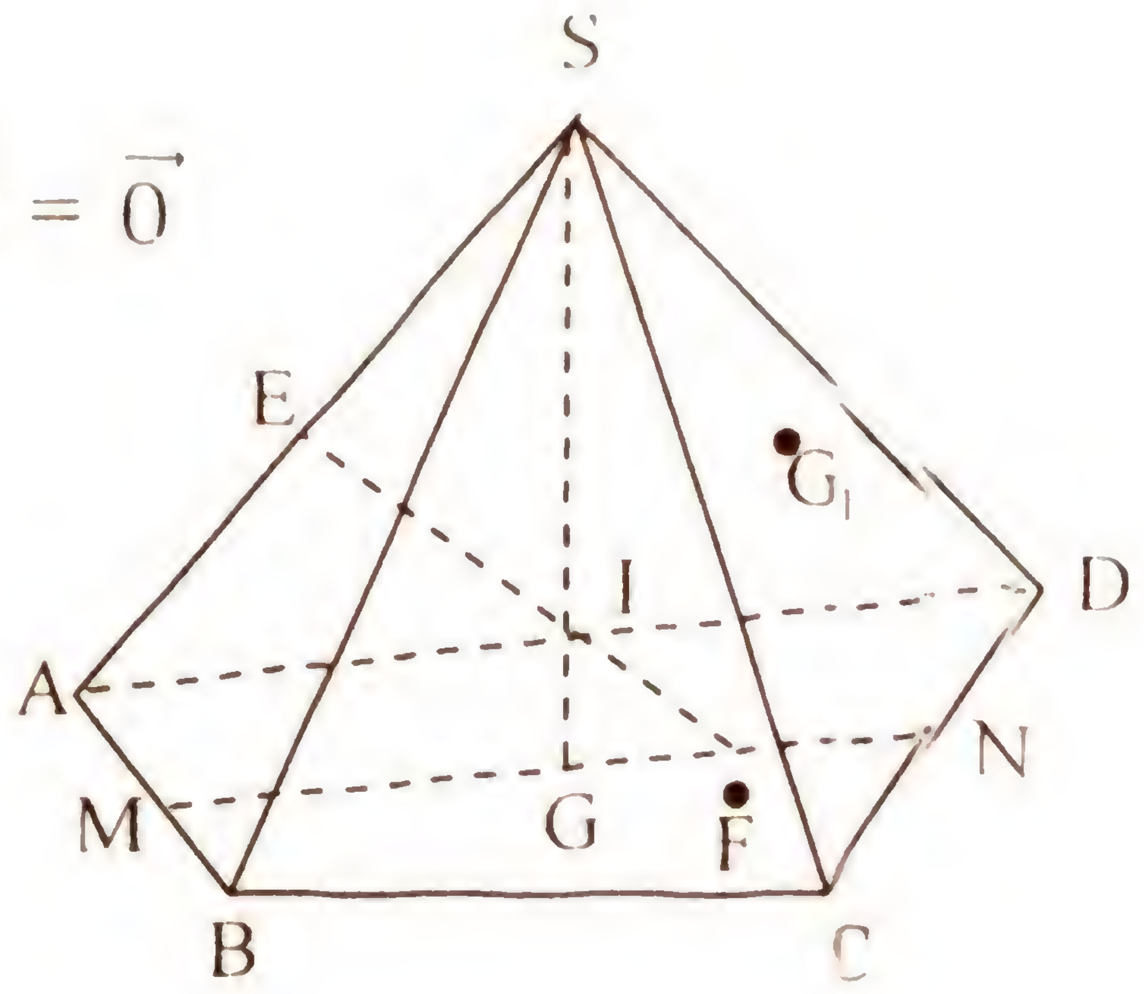
nên G là trọng tâm của ABCD.

Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IG}$

nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IS} = \vec{0}$

Vậy I là điểm trên đoạn SG và $\frac{IG}{IS} = \frac{1}{4}$




b) $G_1$ là trọng tâm ΔSCD nên có $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 3\overrightarrow{IG_1}$

Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IM} + 3\overrightarrow{IG_1} = \vec{0}$

Suy ra I là điểm trên đoạn $MG_1$ và $\frac{IM}{IG_1} = \frac{3}{2}$.

Vậy $MG_1$ qua I và SG qua I.

Tương tự chứng minh ba đoạn thẳng nối các cặp trung điểm của BC; CD; AD với trọng tâm của ΔSAD; ΔSAB; ΔSBC đều qua I.

c) Giả sử F là trọng tâm ΔBCD nên có $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IF}$.

E là trung điểm của SA nên có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IE}$.

Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IE} + 3\overrightarrow{IF} = \vec{0}$ suy ra I là điểm thuộc đoạn EF và $\frac{IE}{IF} = \frac{3}{2}$, EF qua I, và F là giao điểm của EI với mặt đáy ABCD và F là trọng tâm ΔBCD.

**<u>Ví dụ 9</u>**: Chứng minh với 4 điểm bất kì A, B, C thì:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$

**Giải**

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

Và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

b) Đưa về gốc D. Ta có:

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})$

$= \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$

**Ví dụ 10**: Cho tam giác ABC và một điểm O. Với mỗi điểm M trong không gian, ký hiệu: $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để O là trọng tâm $\Delta ABC$ là f(M) luôn không đổi với mọi điểm M.

**Giải**

Gọi G là trọng tâm của $\Delta ABC$, thì:

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2 = 3MG^2 - 3MO^2$$
$$+ (GA^2 + GB^2 + GC^2) = 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MO})\overrightarrow{OG} + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Nếu $O \equiv G$ thì $f(M) = GA^2 + GB^2 + GC^2$ = hằng số, $\forall M$

Nếu f(M) = hằng số, thì: $f(O) = f(G)$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{OG} \Rightarrow 6.OG^2 = 0$, hay $O \equiv G$.

**Ví dụ 11:** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

a) Nếu ABCD là hình chữ nhật thì với mọi điểm M trong không gian ta luôn có $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

b) Nếu ABCD là hình bình hành thì $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trong không gian. Điều ngược lại có đúng không?

**Giải**

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có:

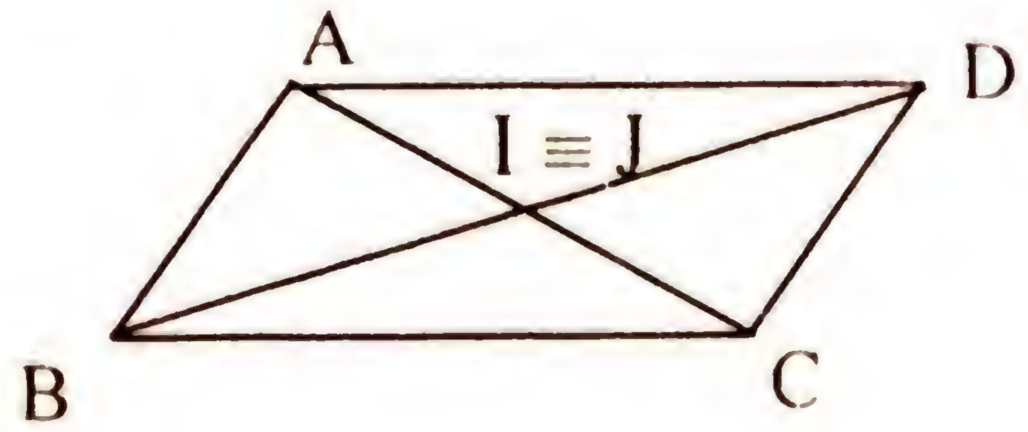
$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{AC^2}{2}\ ;\ MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}$$

Vì ABCD là hình chữ nhật nên AC = BD.

Vậy $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

b) Gọi I, J lần lượt trung điểm của AC và BD, khi đó:

$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$$
$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})^2$$
$$= 2MI^2 + IA^2 + IC^2 - 2MJ^2 - JB^2 - JD^2$$
$$= 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2).$$




Nếu ABCD là hình bình hành thì $I \equiv J$, khi đó:

$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$$

Tức là $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Ngược lại, nếu $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M thì $MI^2 - MJ^2$ cũng là hằng số. Khi đó chọn M lần lượt là điểm I và điểm J thì $II^2 - IJ^2 = JI^2 - JJ^2$, suy ra $-IJ^2 = IJ^2$, tức là IJ = 0 hay $I \equiv J$. Vậy ABCD là hình bình hành.

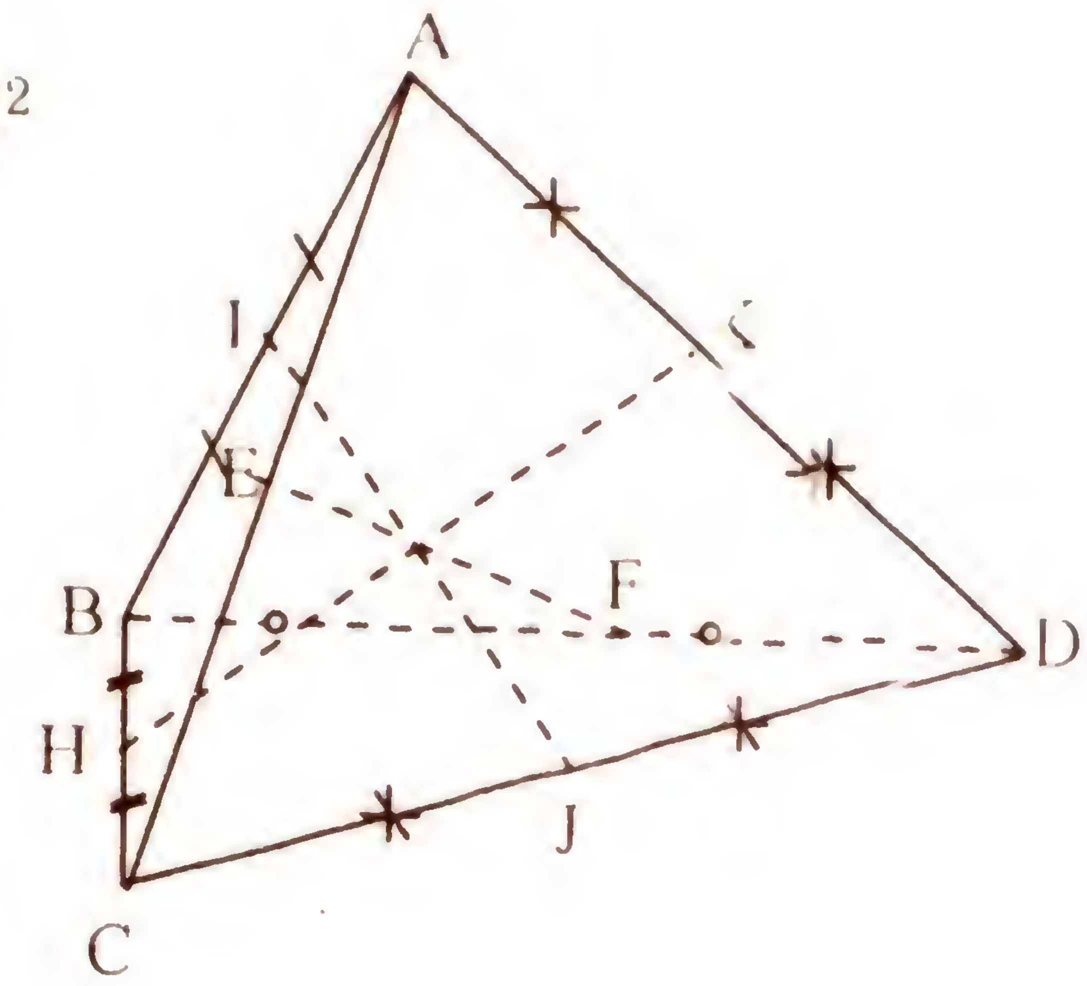
**Ví dụ 12**: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

**Giải**

Trước hết, ta chứng minh:

$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$




Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$

$= -\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2}$ nên

$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 4\overrightarrow{IJ}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2$

$= 2\vec{b}^2 + 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}$

$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2 + \vec{b}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + \vec{a}^2$

$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}$

Vậy ta có: $AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$

Tương tự ta có:

$AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 4HK^2$

$AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

Do đó:

$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2)$.

**Ví dụ 13**: Chứng minh rằng với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tuỳ ý ta luôn luôn có:

$\vec{a}^2 . \vec{b}^2 \geq (\vec{a} . \vec{b})^2$. Dấu = xảy ra khi nào?

**Giải**

Ta có: $\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$ nên:

$$(\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.\cos^2(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^2.\vec{b}^2.\cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \leq \vec{a}^2.\vec{b}^2$$

Dấu = xảy ra khi cos(a, b) = ±1 tức là khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

**Ví dụ 14:** Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng.

a) Đặt $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{zOx} = \gamma$. Chứng minh rằng:

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}$.

b) Gọi $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ lần lượt là các tia phân giác của các góc xOy, yOz, zOx. Chứng minh rằng nếu $Ox_1$ và $Oy_1$ vuông góc với nhau thì $Oz_1$ vuông góc với cả $Ox_1$ và $Oy_1$.

**Giải**

Lấy $E_1$, $E_2$, $E_3$ lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OE_1 = OE_2 = OE_3 = 1$.

Chọn cơ sở $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e_2}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e_3}$

a) Do ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên: $(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})^2 > 0$

do đó $\vec{e_1}^2 + \vec{e_2}^2 + \vec{e_3}^2 + (2\vec{e_1}.\vec{e_2} + \vec{e_2}.\vec{e_3} + \vec{e_3}.\vec{e_1}) > 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) > 0$

Vậy $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\dfrac{3}{2}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2}$ // $Ox_1$

$\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}$ // $Oy_1$ ; $\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}$ // $Oz_1$

Vì $Ox_1 \perp Oy_1 \Rightarrow (\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}) = 0$

Hay $\overrightarrow{OE_2}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} = 0$

Ta có: $(\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1})$

$= \overrightarrow{OE_1}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} = 0$

Vậy $Ox_1 \perp Oz_1$. Tương tự, ta cũng có $Oy_1 \perp Oz_1$.

## DẠNG 2: TÍNH TOÁN VÀ BIỂU DIỄN

- Để tính đoạn AB ta có thể tính bình phương vô hướng $\overrightarrow{AB}^2$ trong hệ cơ sở gồm 3 vectơ không đồng phẳng.
- Để tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ta có thể tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ và $\vec{a}.\vec{b}$ trong hệ cơ sở.
- Để biểu diễn một vectơ trong hệ cơ sở ta thường đưa về cùng gốc để tính, chẳng hạn vectơ $\overrightarrow{MN}$ và gốc O thì tính trước $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo hệ cơ sở, từ đó có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

**Ví dụ 1:** Cho hai điểm A, B. Tìm điểm M sao cho $k\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, trong đó k, t là hai số thực cho trước. Biện luận theo k, t.

**Giải**

Lấy một điểm O nào đó, ta có:

$k\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (k+t)\overrightarrow{OM}$. Biện luận:

Nếu $k + t \neq 0$ ta có $\overrightarrow{OM} = \dfrac{k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}}{k+t}$.

Vậy điểm M được xác định một cách duy nhất.

Nếu $k + t = 0$ mà $k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, thì mọi điểm M trong không gian đều thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Nếu $k + t = 0$ mà $k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$, không tồn tại điểm M.

**Ví dụ 2:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

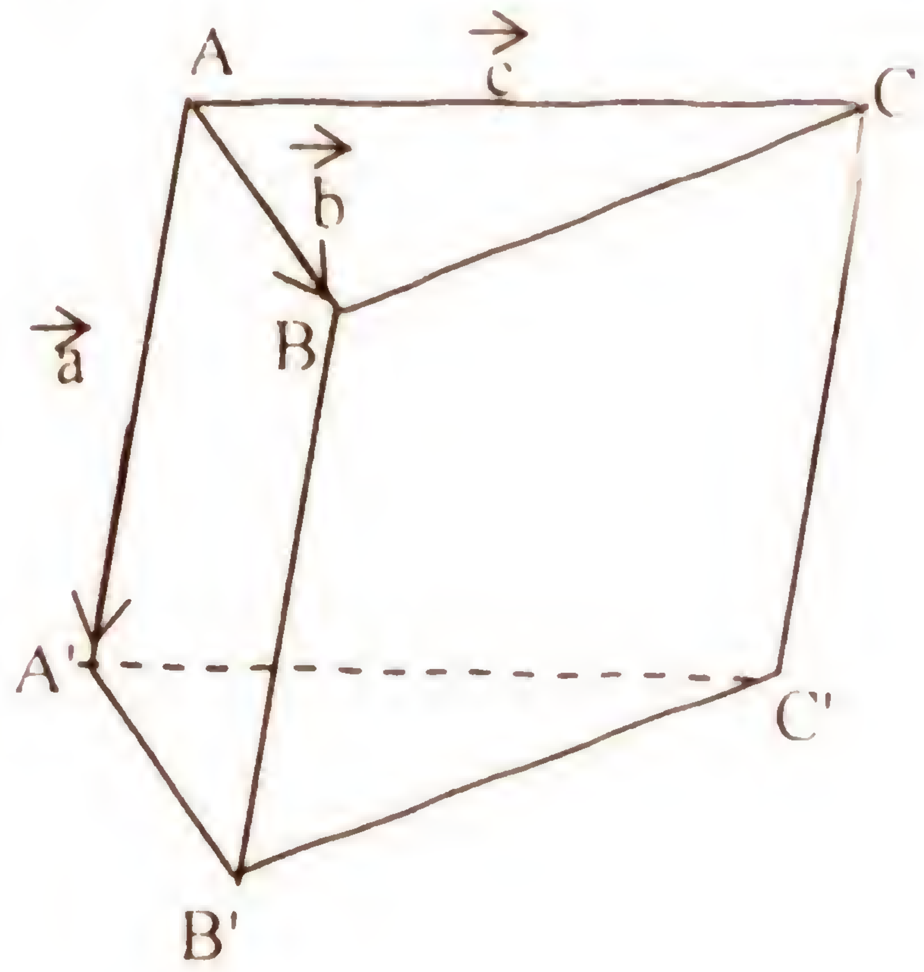
a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác A'B'C'. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG'}$ qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

**Giải**

a) $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.




b) Vì G' là trọng tâm tam giác A'B'C' nên:

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'})$$

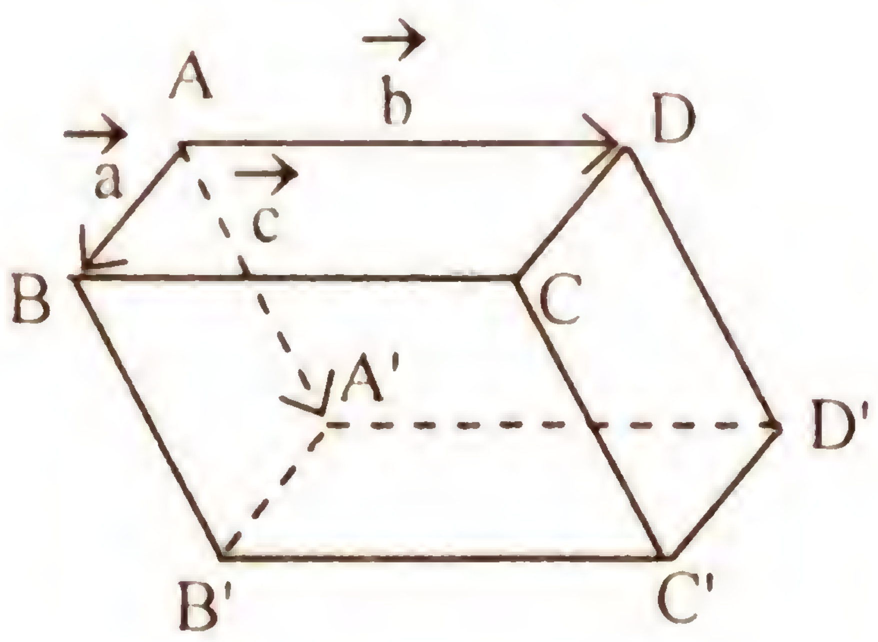
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'})$$

$$= \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

**Ví dụ 3**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đặt: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{A'D}$.

**Giải**




$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{b} - \vec{c}$

**Ví dụ 4**: Cho hình tứ diện ABCD, gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các mặt BCD, CDA, DAB, ABC. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$.

Hãy biểu thị các vectơ sau đây theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

**Giải**

Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD, khi đó:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ hay } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$$

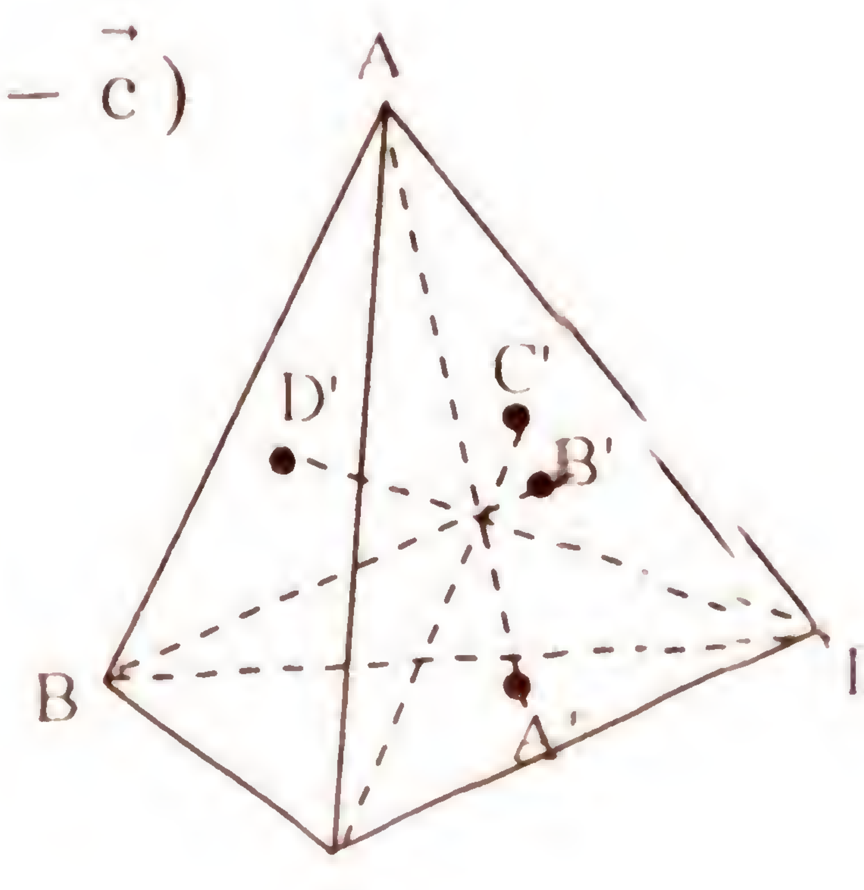
nên $\overrightarrow{DD'} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BB'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{4}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BB'} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{c})$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DD'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$$

$$= \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{c}) = \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$$



$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DD'}$$

$$= \frac{3}{4}(-\vec{a} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = -\frac{3}{4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

**Ví dụ 5**: Cho tứ diện ABCD có AB = c, CD = c', AC = b, BD = b', BC = a, AD = a'. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

**Giải:**

Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$$= \frac{1}{2}(CB^2 + CD^2 - BD^2) - \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2)$$

$$= \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2)$$

Do đó $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \dfrac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}$.

**Ví dụ 6** Cho hình chóp tam giác S.ABC có các cạnh SA = SB = SC = AB = AC = a và BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

**Giải**

Ta có

$$\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2}$$

Theo giả thiết ta có các tam giác đều là SAB, SAC và các tam giác vuông là ABC vuông tại A và SBC vuông tại S nên:

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = a.a.\cos 120^o = -\frac{a^2}{2}$$

và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$, do đó: $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\dfrac{1}{2}$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$ bằng $120^o$.

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = b và đôi một hợp với nhau góc $30^o$. Tính khoảng cách từ S đến trọng tâm G của tam giác ABC.

**Giải**

Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$ nên:

$$9SG^2 = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2$$

$$= SA^2 + SB^2 + SC^2 + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$$

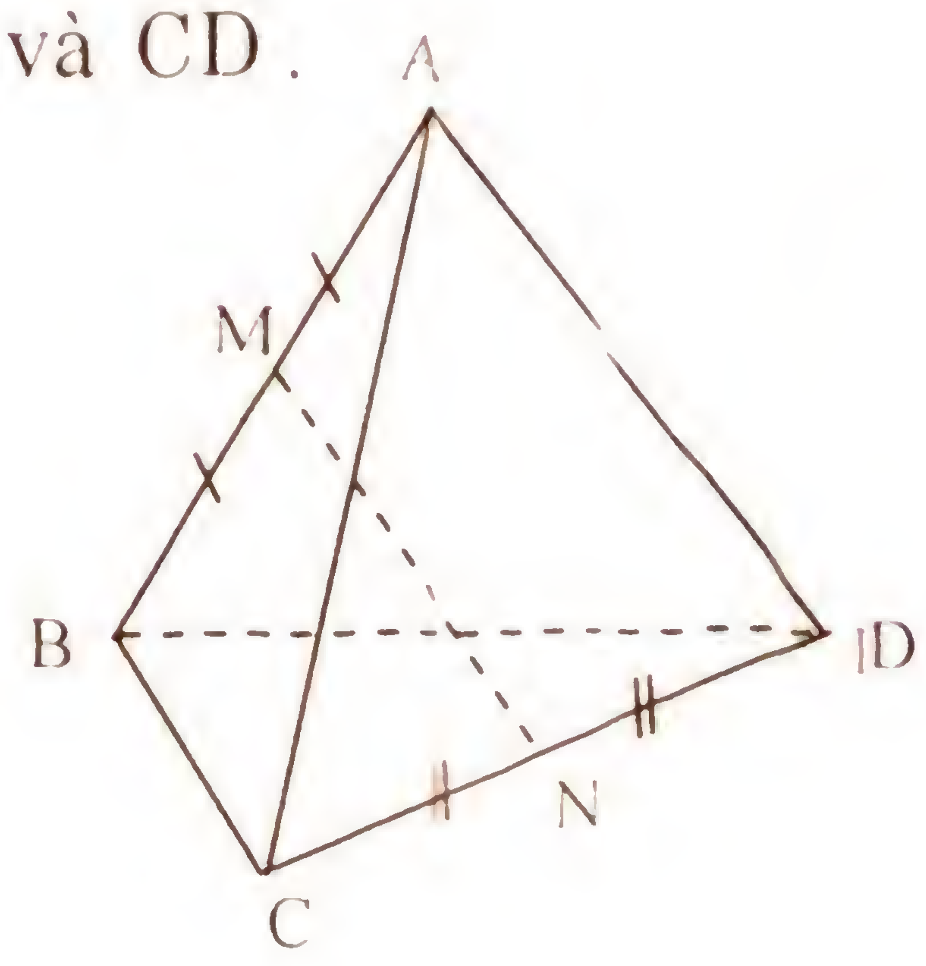
$$= 3b^2 + 3.2b^2.\cos 30^o = 3b^2(1 + \sqrt{3}).$$

Vậy SG = $\dfrac{b}{3}\sqrt{3(1 + \sqrt{3})}$.

**Ví dụ 8:** Cho hình tứ diện đều ABCD có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính độ dài MN.

b) Tính góc giữa $\overrightarrow{MN}$ với các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.




**Giải**

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Khi đó, ta có:

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{1}{2}m^2.$$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2$.

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \text{ hay } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$$

nên $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c})$

$$= \frac{1}{4}(m^2 + m^2 + m^2 + m^2 - m^2 - m^2) = \frac{2m^2}{4}.$$

Vậy $MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}).\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}^2)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} - m^2\right) = 0$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng $90^o$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} - \vec{c}^2 + \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - m^2 + \frac{m^2}{2}\right) = 0$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng $90^o$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c})$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} + m^2 + \frac{m^2}{2} + m^2 - \frac{m^2}{2}\right) = \frac{1}{2}m^2.$$

Mà $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{BC}|\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC})$

Từ đó: $\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\dfrac{m^2}{2}}{m.\dfrac{m\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $45^o$.

## DẠNG 3: QUAN HỆ ĐỒNG PHẲNG

- Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = n\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa các số m, n là duy nhất.
- Biểu diễn A, B, C, D đồng phẳng khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
- Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, ta tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa, các số m, n, p là duy nhất.

Chú ý: - Chọn hệ cơ sở gồm 3 vectơ không đồng phẳng.
- Hỗ trợ bởi các quan hệ song song, giao tuyến song song.
- Dùng điều kiện đồng phẳng để lập hệ thức giữa các hệ số.

**Ví dụ 1**: Chứng minh:

a) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác không thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

b) Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

**Giải**

a) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và $m^2 + n^2 + p^2 > 0$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Thật vậy, giả sử $m \neq 0$, từ đó ta có $\vec{a} = -\dfrac{n}{m}\vec{b} - \dfrac{p}{m}\vec{c}$.

Đẳng thức này khẳng định ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng: đpcm.

b) Mệnh đề này tương đương với mệnh đề ở câu a). Vì nếu có một số khác 0, chẳng hạn $m \neq 0$ thì suy ra ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng: vô lý

**Ví dụ 2:** Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra?

a) Có một vectơ trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

b) Có hai vectơ trong ba vectơ đó cùng phương.

**Giải**

a) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có một vectơ bằng $\vec{0}$, chẳng hạn $\vec{a} = \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng:

$$1.\vec{a} + 0.\vec{b} + 0.\vec{c} = \vec{0}.$$

b) Nếu hai trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương, chẳng hạn $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thì $\vec{b} = k\vec{c}$ (ta xét $\vec{c} \neq \vec{0}$, vì nếu $\vec{c} = \vec{0}$ thì theo câu a), ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng). Khi đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng: $0.\vec{a} + 1.\vec{b} - k.\vec{c} = \vec{0}$

Cách khác: Từ gốc O tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

**Ví dụ 3**: Trong không gian cho tam giác ABC. Chứng minh điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có ba số x, y, z mà x + y + z = 1 sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O.

**Giải**

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương nên điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có: $\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = l(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ với mọi điểm O.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - l - m)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$.

Đặt $1 - l - m = x$, $l = y$, $m = z$ thì:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \text{ với } x + y + z = 1$$

Chú ý: Kết quả này là một cách để chứng minh bốn điểm đồng phẳng. Đặc biệt M thuộc tam giác ABC khi x + y + z = 1 và x, y, z $\geq$ 0.

**Ví dụ 4**: Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC', trong đó a, b, c, là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'B'C') đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi a + b + c = 3.

**Giải**

Vì A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC' nên:

$$\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \Rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$$

Mặt phẳng (A'B'C') đi qua G khi và chỉ khi bốn điểm G, A', B', C' đồng phẳng, nên theo ví dụ trên, điều đó xảy ra nếu và chỉ nếu $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 1$, tức là a + b + c = 3.

**Ví dụ 5**: Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

**Giải**

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$

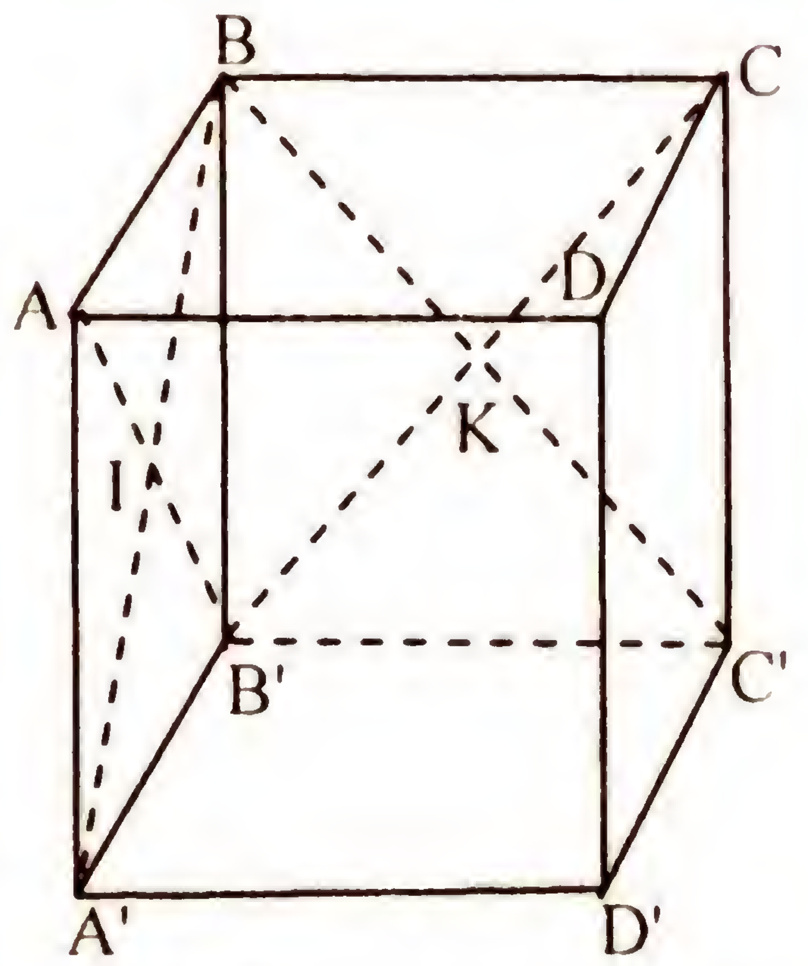
$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CN}$. Do đó:

$$4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN}$$

$$= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng.

**Ví dụ 6**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABB'A' và K là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành BCC'B'. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{B'C'}$ đồng phẳng.




**Giải**

Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$$= \overrightarrow{B'C'} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

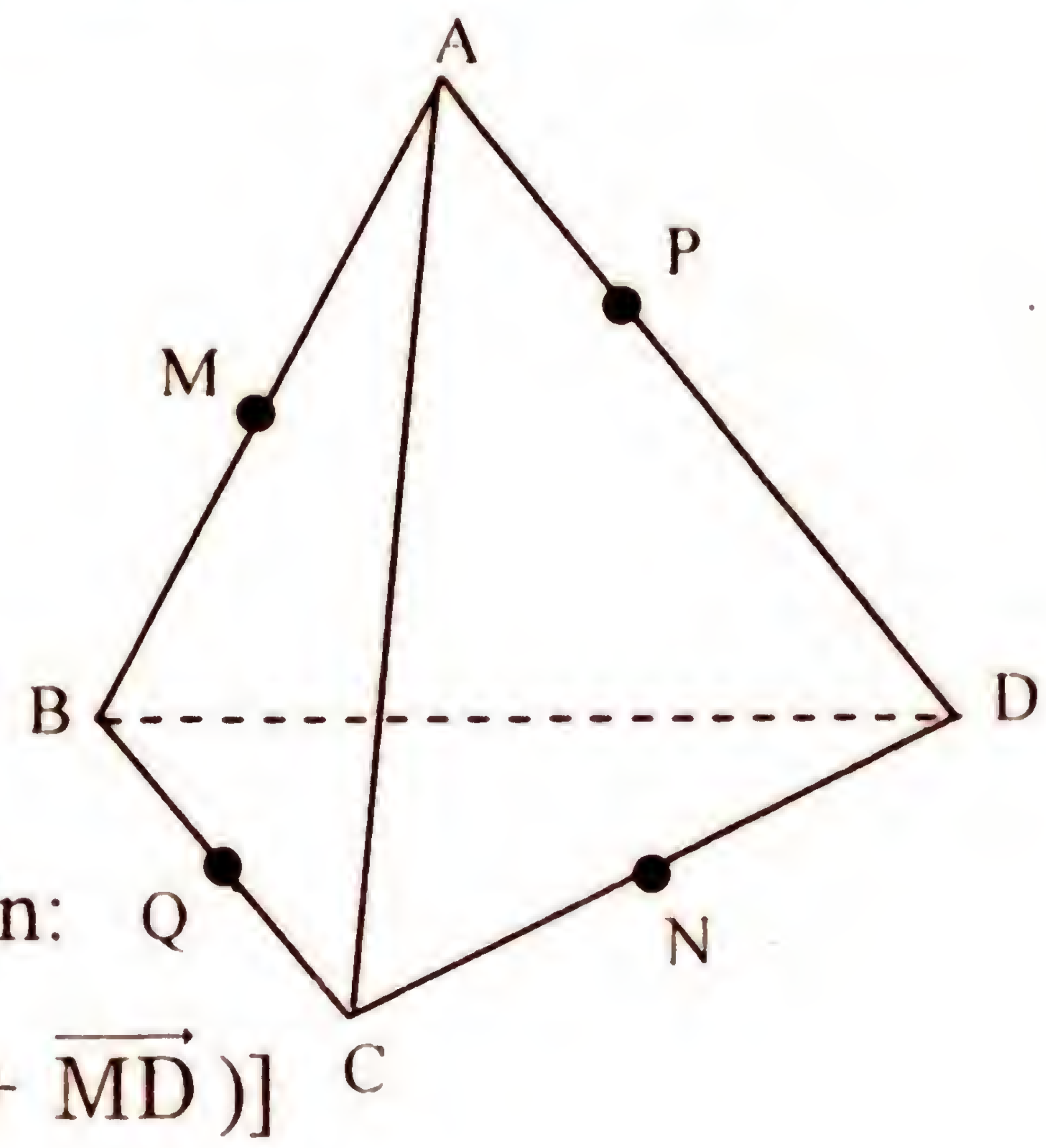
$$= \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$$

$$= 2\overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$$

(Vì IK là đường trung bình của tam giác AB'C)

Vậy $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{B'C'}$ đồng phẳng.

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.




**Giải**

Chọn gốc M. Ta có $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$.

nên $\overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$

Tương tự: $\overrightarrow{MQ} = \dfrac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Mà $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$, nên:

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{1-k}[\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})]$$

$$= \frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$$

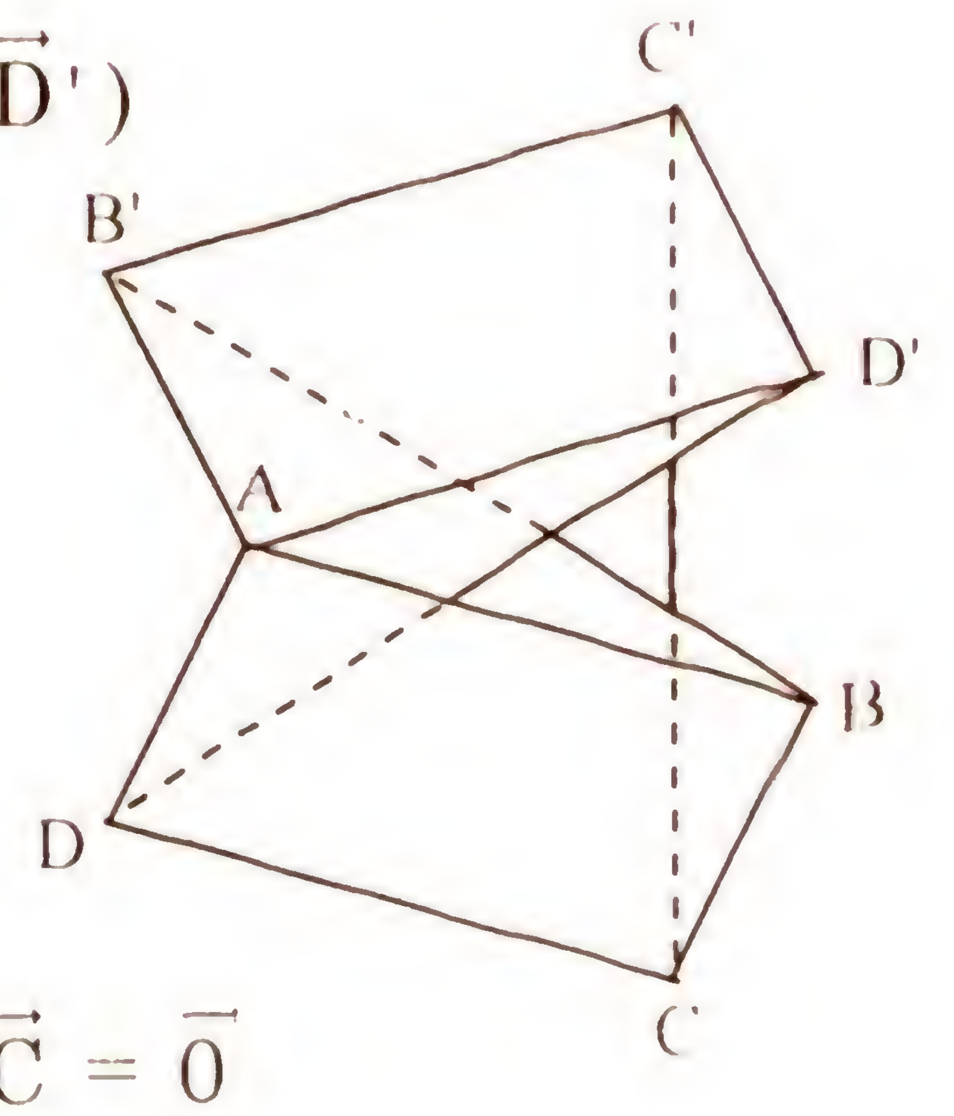
Do đó $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng nên các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

**Ví dụ 8:** Trong không gian cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' chỉ có chung nhau một điểm A. Chứng minh rằng

a) Các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.

b) Hai tam giác BDC', B'D'C cùng trọng tâm.

**Giải**




a) Ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'}$

Do đó $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'})$

Vì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

và $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC'}$

nên $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AC'}$

Vậy $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$

Hay ta có $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'}$

nên $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.

b) Ta có $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$

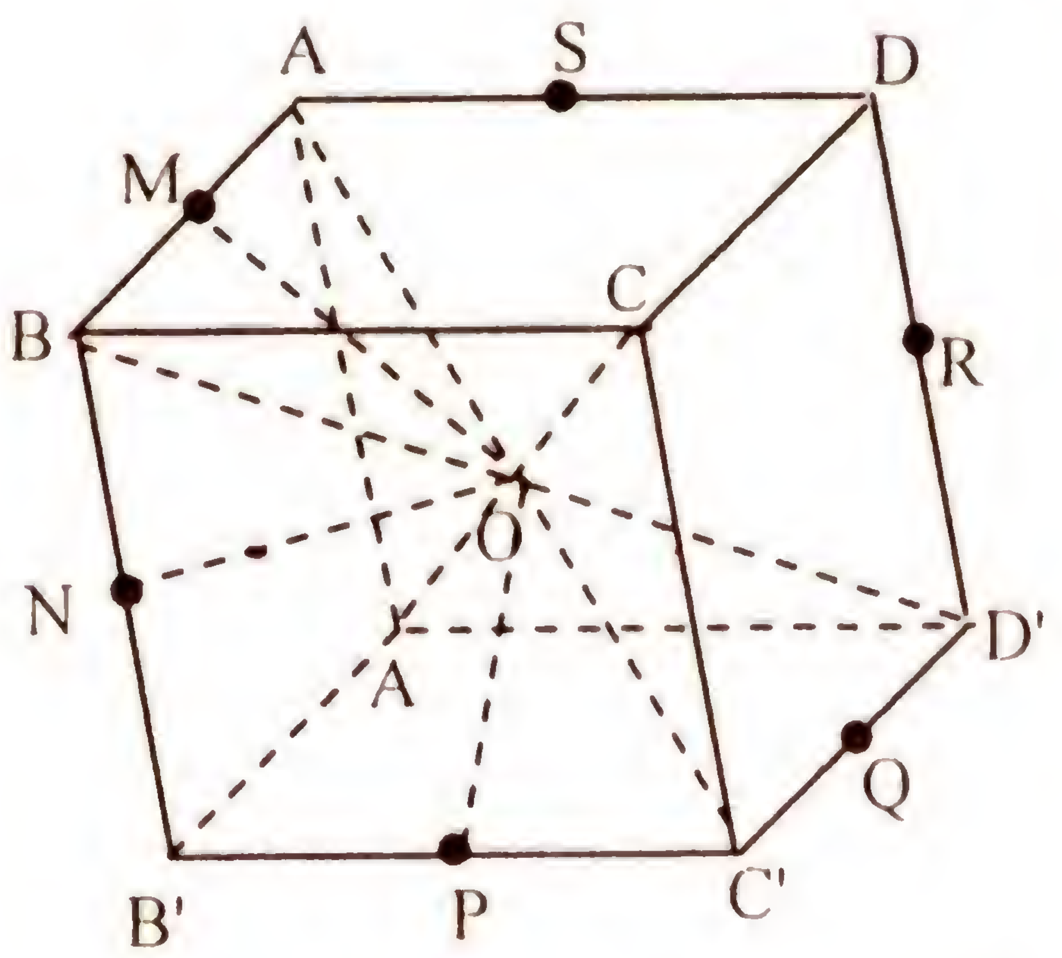
Do đó 2 tam giác BDC', B'D'C có cùng trọng tâm.

**Ví dụ 9**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng 6 trung điểm các cạnh AB, BB', B'C', C'D', D'D, AD nằm trên cùng một mặt phẳng.

**Giải**

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BB', B'C', C'D', D'D, DA và O là tâm của hình hộp.

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB'} = \vec{c}$




thì $\overrightarrow{OC'} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{OD'} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = -\vec{c}$

Từ đó: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

$\overrightarrow{ON} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{c} - \vec{a}}{2}$

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{-\vec{a} - \vec{b}}{2} = -\overrightarrow{OM}$,

$\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OS} = -\overrightarrow{OP}$

Ta có: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$ nên ba vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng và do đó 6 vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ đồng phẳng.

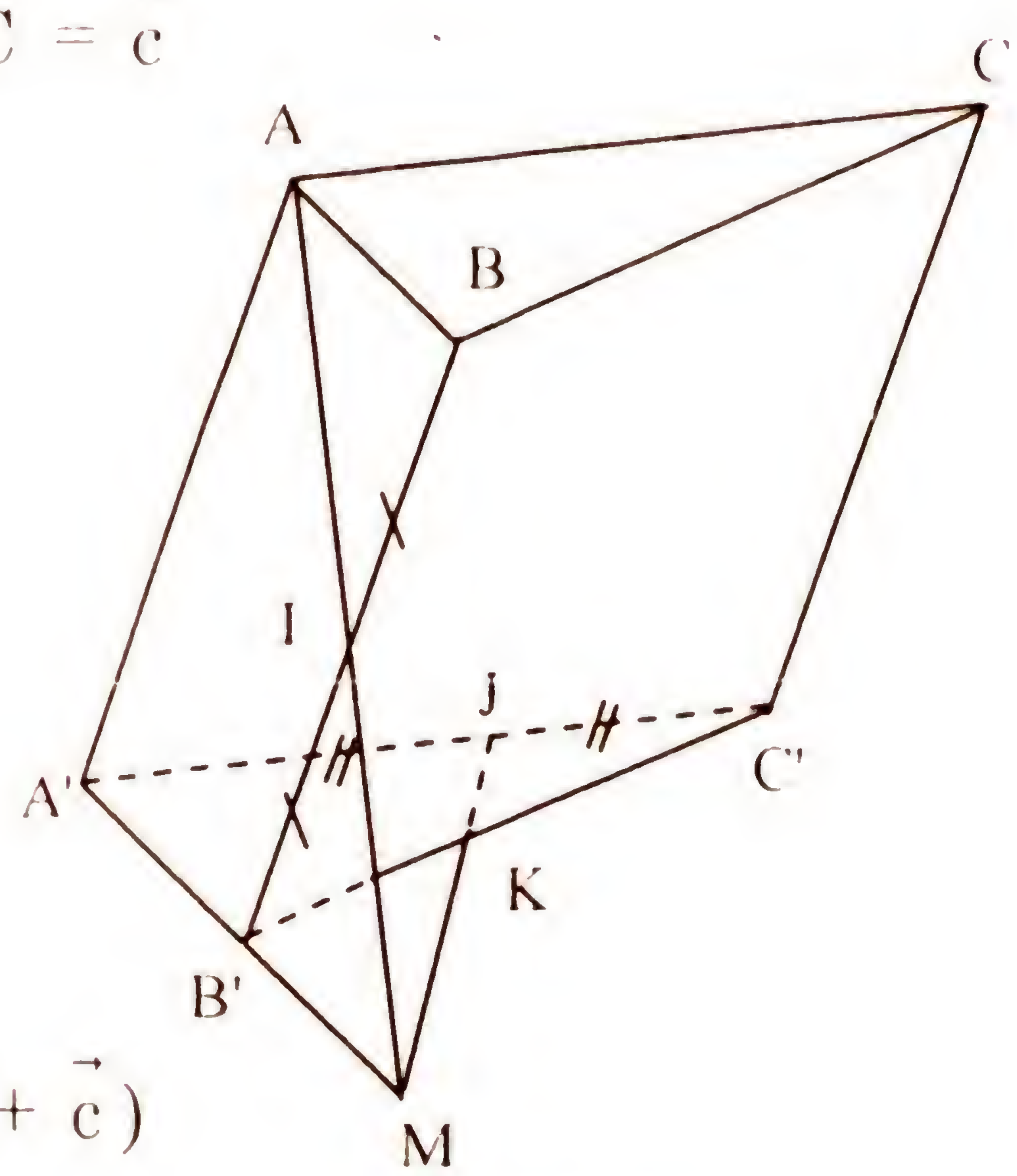
Vậy các điểm M, N, P, Q, R, S và O đồng phẳng.

**Ví dụ 10:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và A'C'. Điểm K thuộc B'C' sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

**Giải**

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có:




$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{AB'}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

Do đó, ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$.

Vậy $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$ đồng phẳng, tức là các điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

Chú ý: Có thể chứng minh các điểm A, I, J, K thuộc một mặt phẳng bằng cách chứng minh AI và JK cắt nhau tại M trên A'B'.

**Ví dụ 11**: Cho hình tứ diện ABCD, I, K, E, F là các điểm thoả mãn:

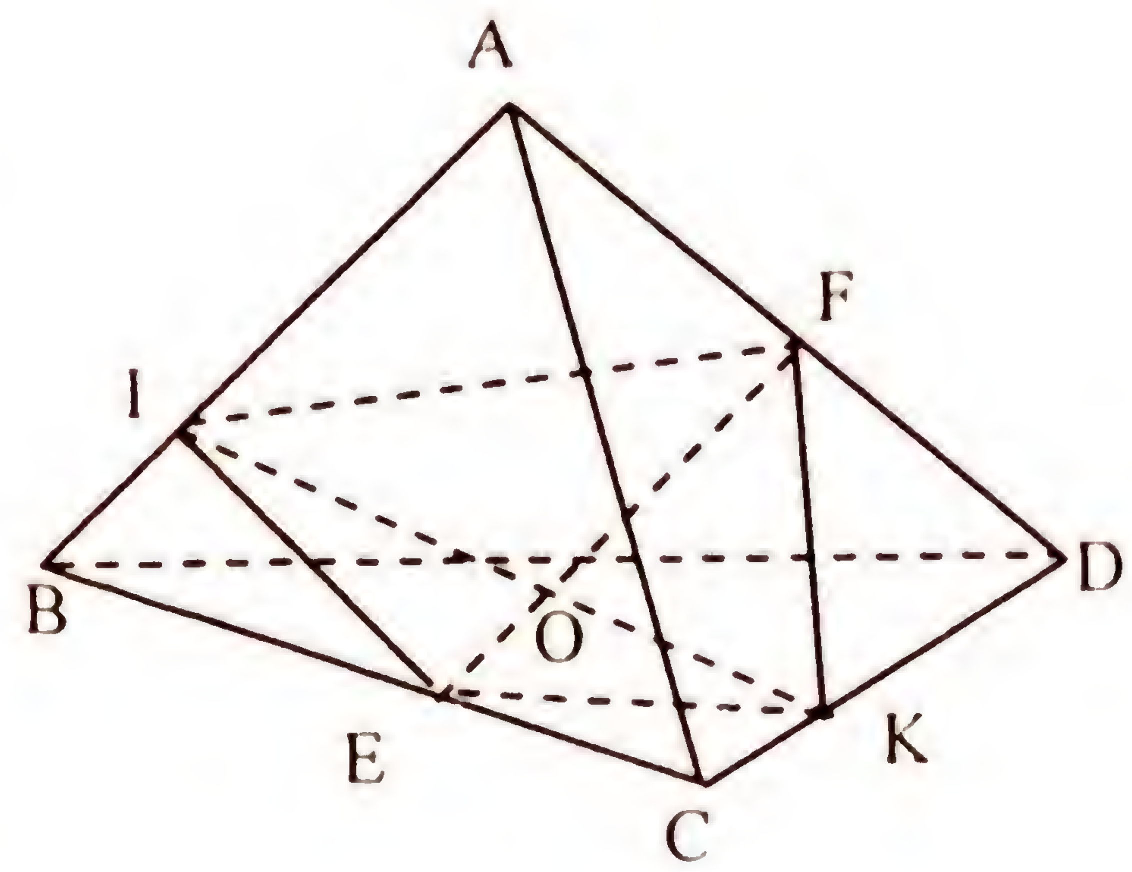
$2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FD} = \vec{0}$.

Chứng minh:

a) Các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AD}$ là đồng phẳng, các vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ là đồng phẳng.

b) Bốn điểm I, E, K, F đồng phẳng.

**Giải**




a) Chọn hệ vectơ cơ sở:

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c}) + \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{\vec{b}}{3} - \frac{\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Do đó $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Ta có: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

$$= -\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{c} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{c}) = -\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

$$= \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{5}\vec{c} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$$

Vậy $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ là các vectơ đồng phẳng.

b) Ta chứng minh các vectơ $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IF}$ đồng phẳng.

Ta có $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{3}{5}\vec{a}$

$$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{c})$$

$$= \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c} \text{ và } \overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

Tìm hai số x và y sao cho $\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IE} + y\overrightarrow{IF}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} = x(-\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{3}{5}\vec{a}) + y(-\frac{3}{5}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c})$$

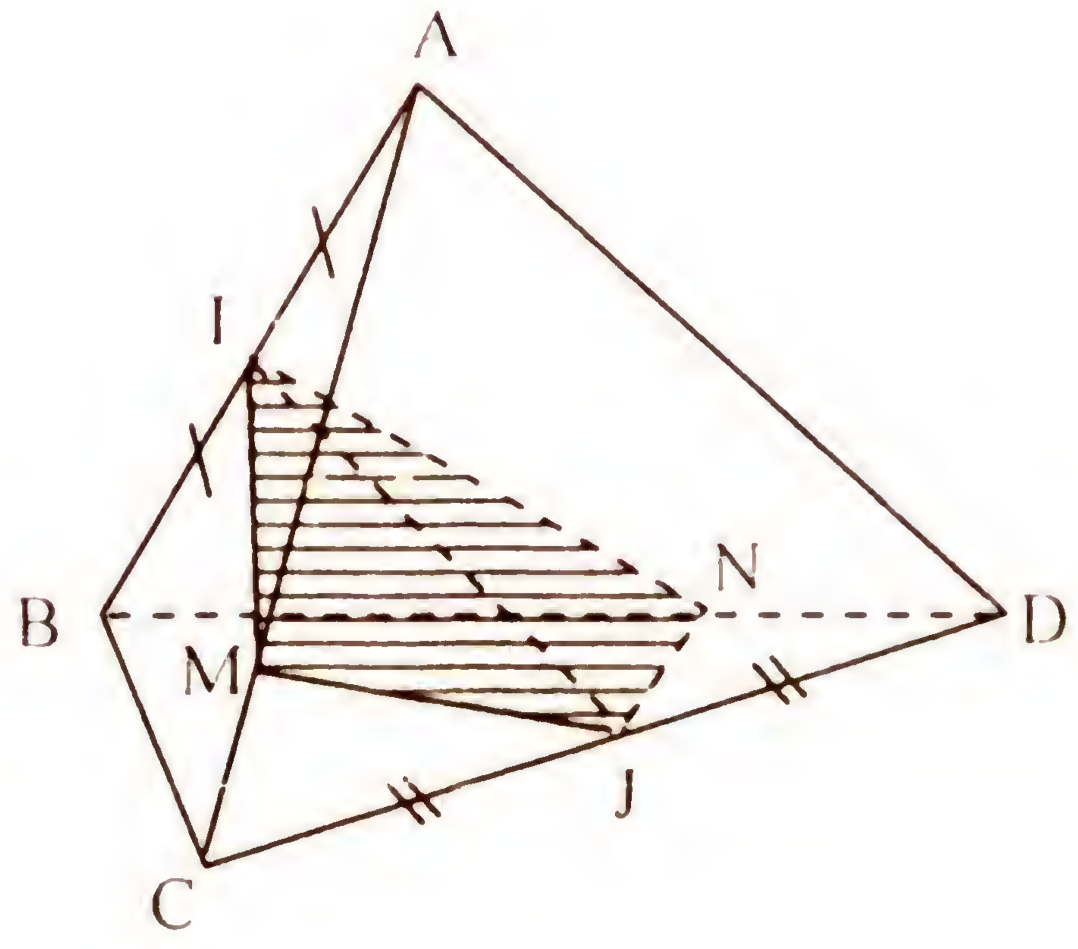
$$= \frac{3}{5}x\vec{a} + \frac{3}{5}y\vec{b} + (\frac{1}{15}y - \frac{1}{3}x)\vec{c}$$

Do đó có: $\begin{cases} \frac{3}{5}x = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5}y = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{15}y - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{9} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{IK} = \frac{10}{9}\overrightarrow{IE} + \frac{5}{9}\overrightarrow{IF}$.

Vậy $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ đồng phẳng suy ra bốn điểm I, K, E, F đồng phẳng.

**Ví dụ 12**: Cho hình tứ diện ABCD. I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD; M là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$, N là điểm thuộc BD sao cho $\overrightarrow{NB} = k_2\overrightarrow{ND}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $k_1 = k_2$.




**Giải**

Vì $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$ nên $\overrightarrow{IM} = \dfrac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1 - k_1}$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{IN} = \frac{\overrightarrow{IB} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2} = \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2}$$

Mặt khác $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$

Để các điểm I, J, M, N thuộc một mặt phẳng, điều kiện cần và đủ là ba vectơ $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng. Vì $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IJ}$ không cùng phương nên điều khẳng định $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng tương đương với:

$$\overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IN} + q\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1 - k_1} = p.\frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2} + \frac{q}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k_1} + \frac{p}{1-k_2}\right)\overrightarrow{IA} - \left(\frac{k_1}{1-k_1} + \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{IC} + \left(\frac{pk_2}{1-k_2} - \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

Do $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{ID}$ không đồng phẳng nên đẳng thức trên tương đương với:

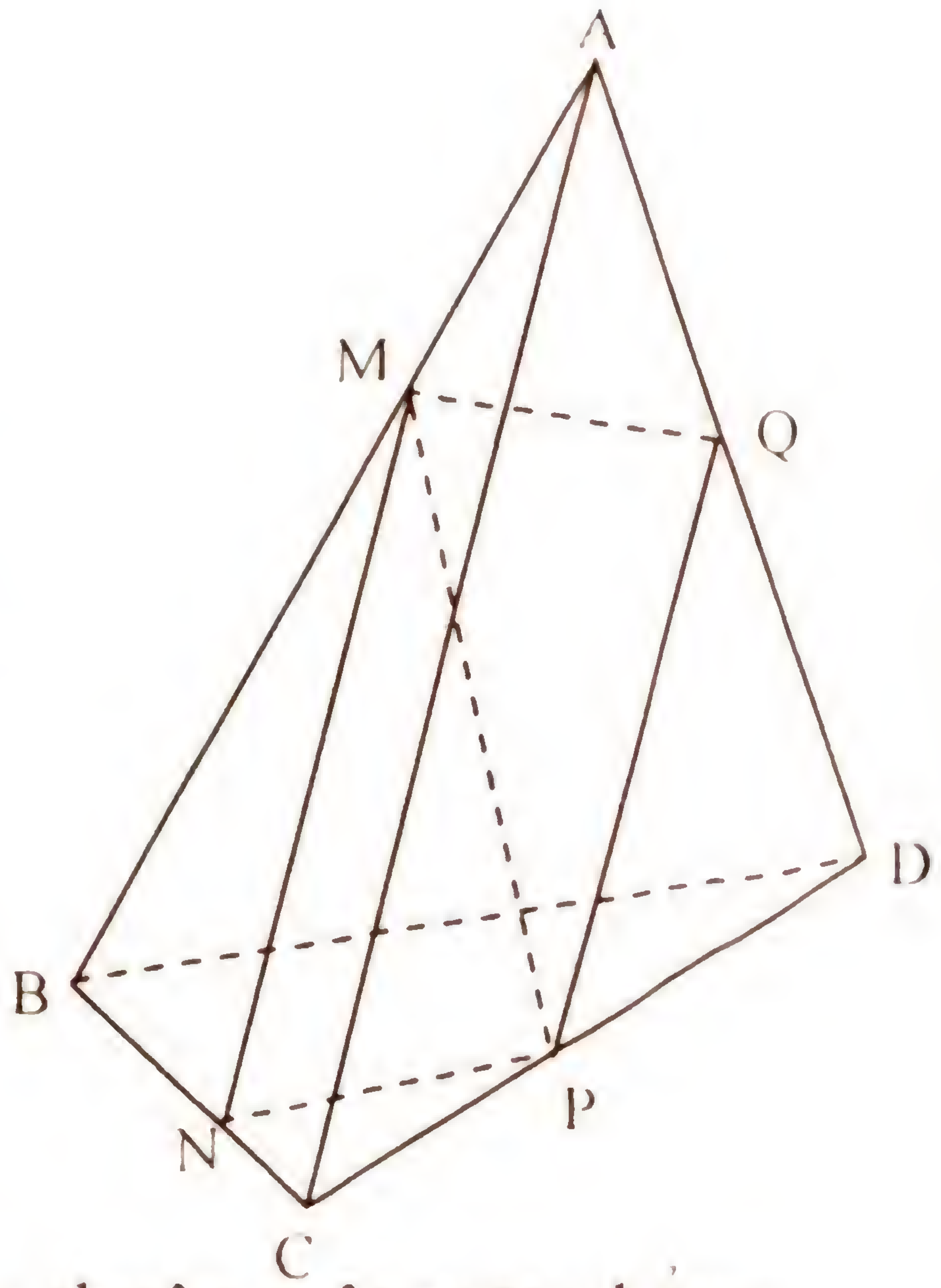
$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-k_1} + \dfrac{p}{1-k_2} = 0 \\ \dfrac{k_1}{1-k_1} + \dfrac{q}{2} = 0 \\ \dfrac{pk_2}{1-k_2} - \dfrac{q}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{k_1}{1-k_1} = -\frac{pk_2}{1-k_2} = \frac{k_2}{1-k_1} \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

**Ví dụ 13**: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$.

Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

**Giải**

Từ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, ta có $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$




mặt khác $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

nên MN // AC.

Nếu có k để các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng thì mp(MNQ) cắt mp(ACD) theo giao tuyến PQ nên PQ // AC.

Mặt khác $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

nên $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Vậy $k = \frac{1}{2}$ thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

**Ví dụ 14**: Cho tứ diện ABCD. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, AD sao cho $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$. Với giá trị nào của k thì bốn điểm $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ cùng thuộc một mặt phẳng?

**Giải**

Chọn cơ sở $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Tìm k để các điểm $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ cùng thuộc một mặt phẳng tương đương với việc tìm k để có biểu diễn $\overrightarrow{DA_1} = x\overrightarrow{DB_1} + y\overrightarrow{DC_1} + z\overrightarrow{DD_1}$, với $x + y + z = 1$.

Từ hệ thức $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$ ta có:

$$\overrightarrow{DA_1} = \frac{\overrightarrow{DA} - k\overrightarrow{DB}}{1-k} = \frac{1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b}$$

Tương tự : $\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}$

Mặt khác từ $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$ ta có:

$$\overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{C_1D} \Rightarrow \overrightarrow{DC_1} = \frac{1}{1-k}\vec{c}.$$

Tương tự $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$ ta có: $\overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k}\vec{a}$

Do đó: $\overrightarrow{DA_1} = -\frac{1}{k}\overrightarrow{DD_1} - k\overrightarrow{DB_1} - k^2\overrightarrow{DC_1}$

Ta có các điểm $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ cùng thuộc một mặt phẳng và chỉ khi:

$$-\frac{1}{k} - k - k^2 = 1 \Leftrightarrow k^3 + k^2 + k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k^2+1) = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy với $k = -1$ thì các điểm $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ cùng thuộc một mặt phẳng.

**Ví dụ 15**: Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $A_1D_1$ của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi P và Q là giao điểm của mặt phẳng (CMN) với các đường thẳng $B_1C_1$ và $DB_1$. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AQ}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

**Giải**

Vì bốn điểm M, N, C, P đồng phẳng nên tồn tại ba số thực x, y, z thoả mãn: $x + y + z = 1$ (1)

và $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}$, hay:

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{x}{2} + z\right)\vec{a} + \left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{b} + y\vec{c} \qquad (2)$$

Mặt khác, nếu đặt: $\overrightarrow{B_1P} = t\overrightarrow{B_1C_1}$ thì $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}$ (3)

Từ (1), (2), (3) và điều kiện $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x}{2} + z = 1 \\ \frac{y}{2} + z = t \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$. Do đó: $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \vec{c}$.

Giải tương tự: $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{9}(4\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c})$.

**Ví dụ 16**: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N.

Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$.

**Giải**

Gọi O là tâm hình bình hành đáy thì:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$

Đặt: $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SK}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SL}$, $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SD} = d\overrightarrow{SN}$, với a, b, c, d > 1.

Khi đó : $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = a + c$ và $\frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN} = b + d$

Ta có $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{d}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{d}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \frac{a}{d}\overrightarrow{SK} + \frac{c}{d}\overrightarrow{SM} - \frac{b}{d}\overrightarrow{SL}$

Vì K, L, M, N đồng phẳng nên:

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} - \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow a + c = b + d \text{ (đpcm).}$$

## DẠNG 4: SONG SONG, THẲNG HÀNG

- Để chứng minh ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng, ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, hoặc có thể chọn điểm O nào đó để chứng minh $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ với $k + t = 1$.

- Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau, ta cần chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương. Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc đường thẳng CD hoặc ngược lại thì AB và CD là hai đường thẳng song song.

- Để chứng minh đường thẳng AB song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) ta chọn 2 điểm C, D thuộc (P) rồi chứng minh $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương hoặc ta lấy trong (P) hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, sau đó chứng minh $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng. Khi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc (P) thì đường thẳng AB song song với mp(P).

Chú ý: - Đường thẳng AB qua M khi A, M, B thẳng hàng.
- Đường thẳng AB cắt CD tại I thì $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC} = t.\overrightarrow{ID}$
- Đường thẳng AB cắt mp(MNP) tại I thì A, I, B thẳng hàng và M N, P, I đồng phẳng.

**Ví dụ 1**: Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm trên đường thẳng AB là $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ trong đó $k + t = 1$. Ngoài ra k và t không phụ thuộc điểm O. Với điều kiện nào của k, t thì điểm M thuộc đoạn thẳng AB? Điểm M là trung điểm của AB?.

**Giải**

Điểm M nằm trên đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1-m)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$

Đặt $1 - m = k$, $m = t$ thì ta được $k + t = 1$ và $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$.

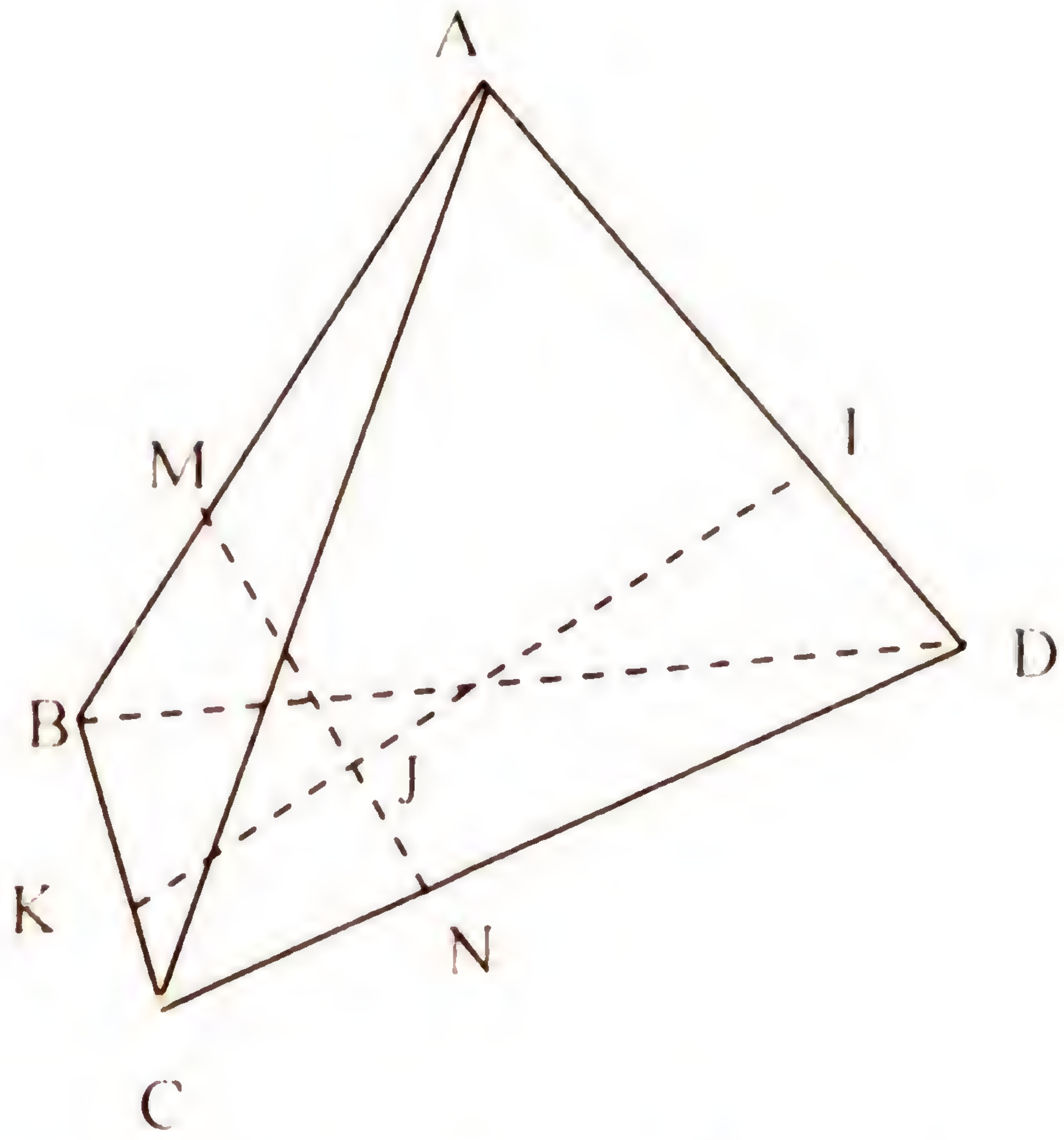
Điểm M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0 \le m \le 1$,

vậy $0 \le k \le 1$, $0 \le t \le 1$. Vậy điều kiện của k và t là: $k + t = 1$, $k \ge 0$, $t \ge 0$.

Điểm M là trung điểm AB khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$ hay $k = t = \frac{1}{2}$.

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

**Giải**




Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ}$

Ta có: $k\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ}$

hay $k\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ}$

Do đó: $(1-k)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}$

hay $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}$

Chứng minh tương tự như trên ta có: $\overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}$

Mặt khác $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$

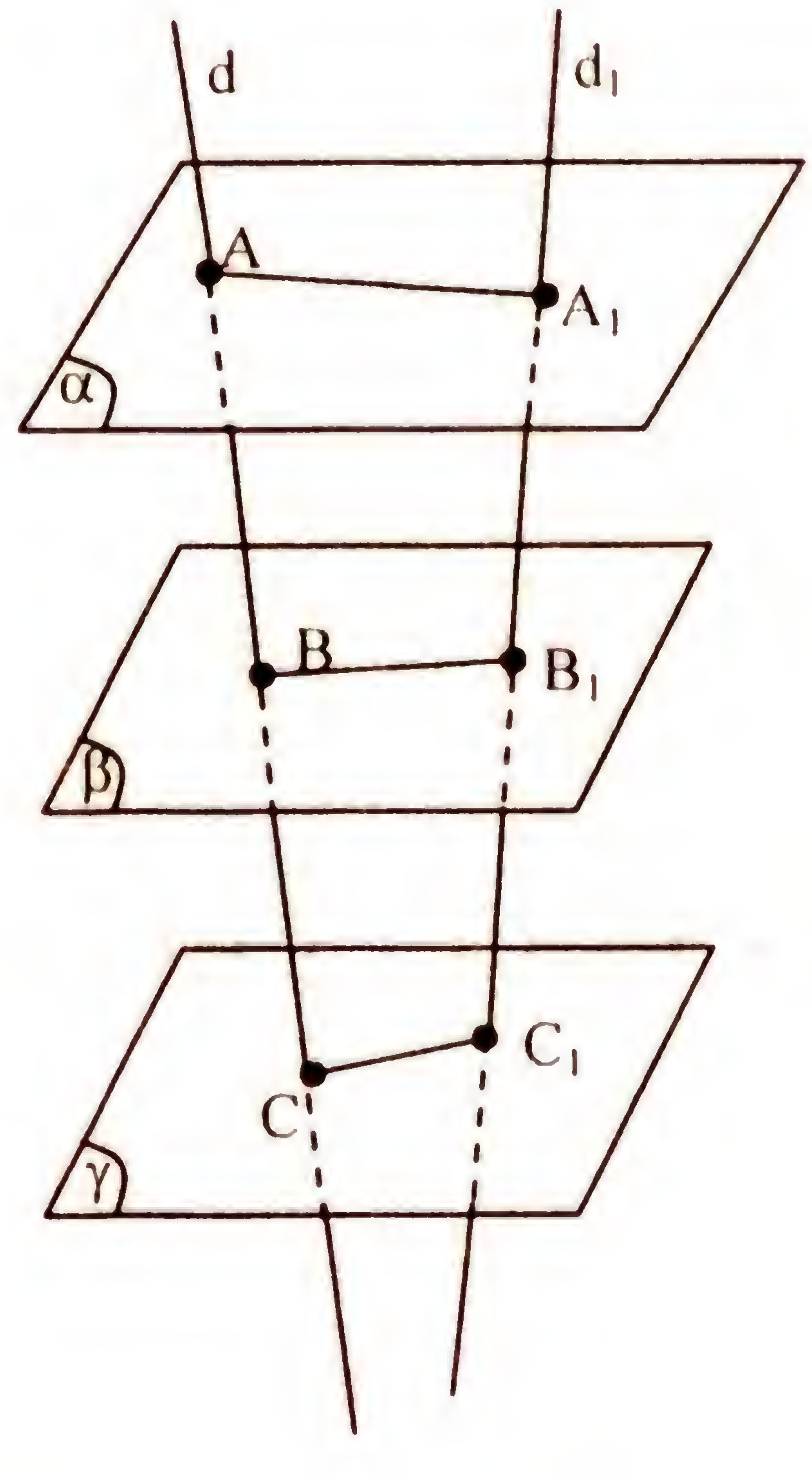
nên $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \dfrac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}$

Từ đó ta có: $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$. Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

**Ví dụ 3:** Cho ba mặt phẳng song song $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ và hai đường thẳng chéo nhau d, $d_1$ cắt chúng theo thứ tự tại A, B, C và $A_1$, $B_1$, $C_1$. Từ một điểm O bất kì trong không gian dựng các vectơ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CC_1}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

**Giải**

Vì $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ song song với nhau, hai đường thẳng d, $d_1$ cắt chúng lần lượt tại A, B, C và $A_1$, $B_1$, $C_1$ nên theo định lí Ta–lét thì B chia AC, $B_1$ chia $A_1C_1$ theo cùng tỉ số nên:




$\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}$

Do đó: $\overrightarrow{OB} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$

Và $\overrightarrow{OB_1} = \dfrac{\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}}{1-k}$ nên:

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) - k(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC})}{1-k}$$

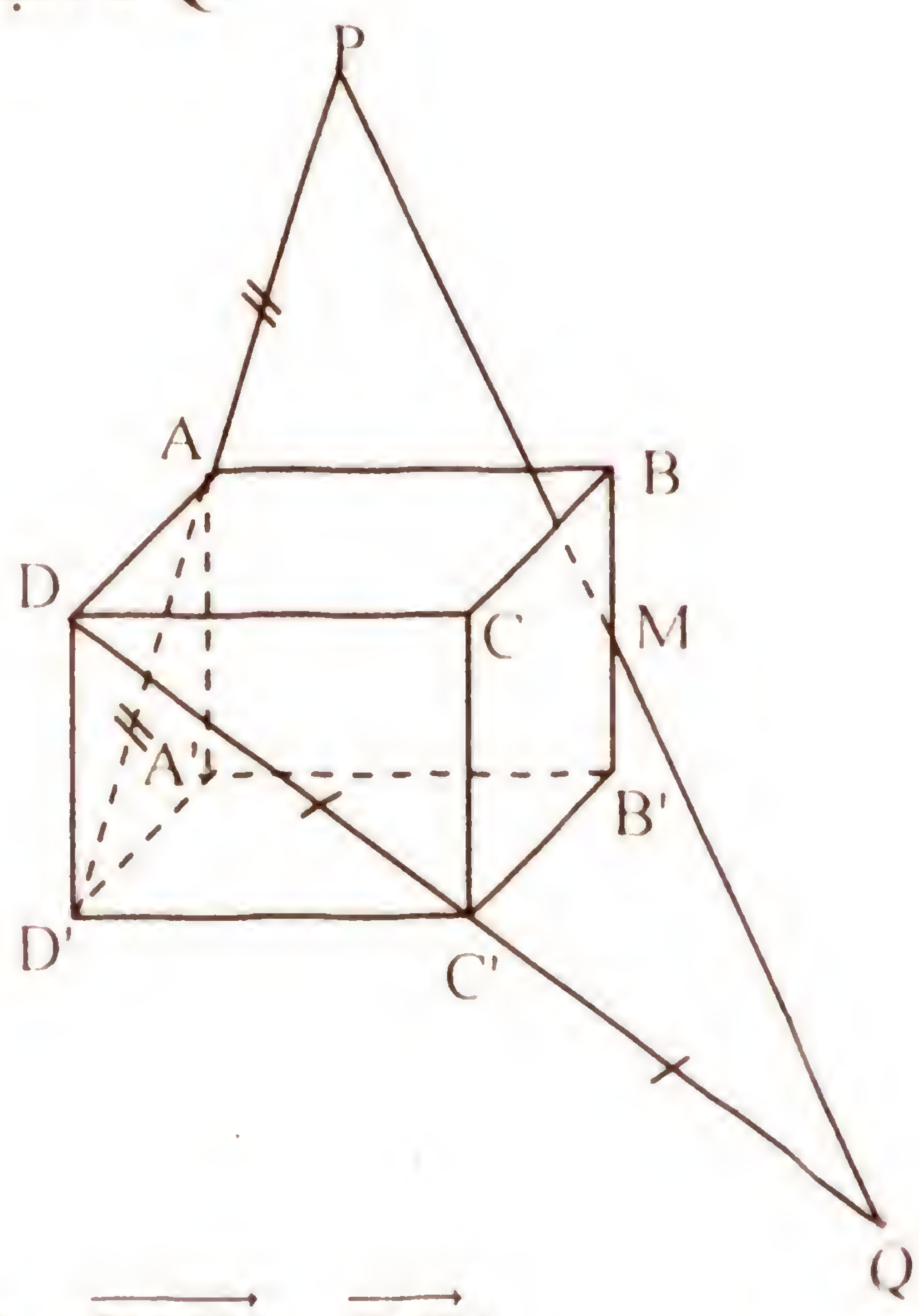
$$= \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA_1} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CC_1}$$

Hay là: $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{OM} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = k\overrightarrow{NP}$ nên M, N, O thẳng hàng.

**Ví dụ 4**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bằng m, các góc tại A bằng $60^o$ ($\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^o$). Gọi P và Q là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A}$, $\overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'. Tính độ dài đoạn PQ.

**Giải**




Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{1}{2}m^2$

Gọi M là trung điểm của BB' thì:

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$

Do $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A} = -\vec{a} - \vec{c}$

nên $\overrightarrow{MP} = -\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$

$= -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

Mặt khác $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DC'}$

$= \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nên $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ M trung điểm PQ (đpcm)

Ta có $PQ^2 = \overrightarrow{PQ}^2 = 4\overrightarrow{MP}^2$

$$= 4\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3\vec{a}.\vec{b} + 3\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c}\right)$$

$$= 4\left(\frac{9}{4}m^2 + m^2 + m^2 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^2 + m^2\right)$$

$$= 4.\frac{33}{4}m^2 = 33m^2 \Rightarrow PQ = m\sqrt{33}.$$

Cách khác: Chiếu theo phương song song với BB' lên mặt đáy (A'B'C'D').

**Ví dụ 5**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng AA', BC, C'D' lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

**Giải**

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Vì M thuộc đường thẳng AA' nên: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$;

N là điểm thuộc đường thẳng BC nên: $\overrightarrow{BN} = t\vec{a}$

P là điểm thuộc đường thẳng C'D' nên $\overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Với k, t, m là những số thực, ta có:

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -t\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P}$$

$$= -t\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + m\vec{b} = (1-t)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}.$$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$ nên ta có: $\begin{cases} -t = 2(1-t) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\dfrac{1}{2}, t = 2.$

Vậy $\dfrac{MA}{MA'} = 2.$

**Ví dụ 6**: Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD của tứ diện ABCD, P là điểm chia cạnh AD theo tỷ số –2. Hãy xác định điểm Q trên cạnh BC sao cho PQ và MN cắt nhau. Khi đó điểm Q chia cạnh BC' theo tỷ số nào?

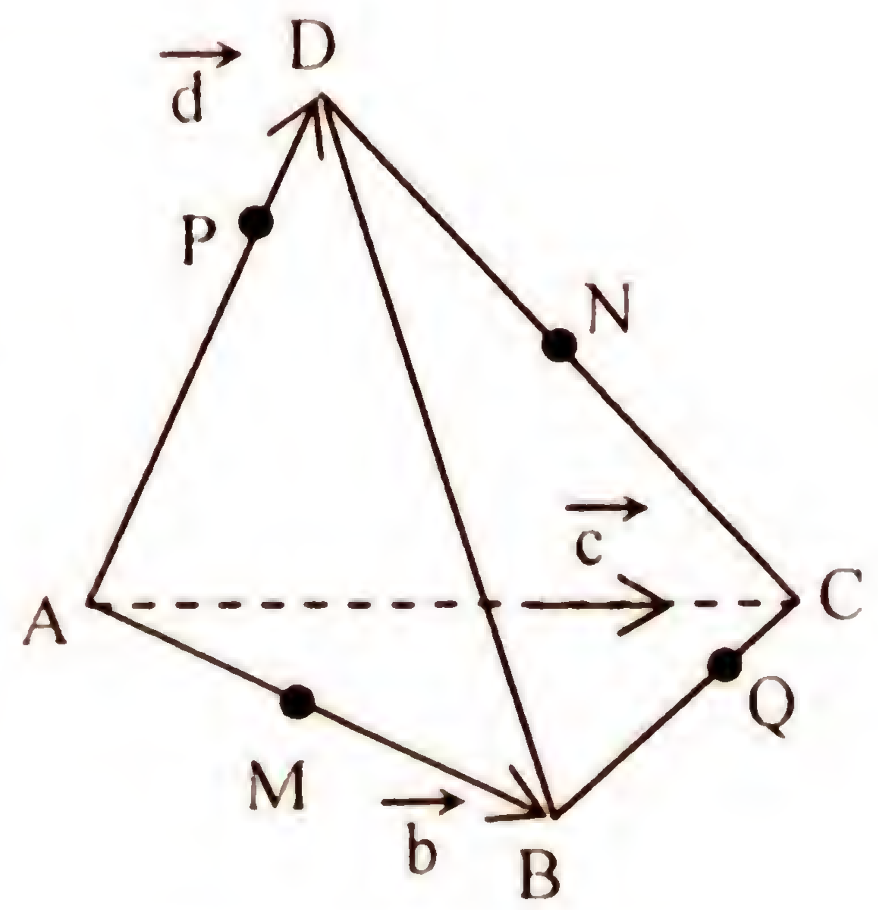
**Giải**

Vì MN luôn cắt mp(PBC) nên MN không song song PQ.

Vậy các đường thẳng MN và PQ cắt nhau hay điểm M, N, P, Q đồng phẳng nên tồn tại x, y sao cho $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ và

$$\overrightarrow{BQ} = t\overrightarrow{BC} = -t\vec{b} + t\vec{c}.$$




Ta có: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{d}$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\vec{b} - t\vec{b} + t\vec{c} = (\frac{1}{2} - t)\vec{b} + t\vec{c}.$$

Do đó: $-\dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{d} = (-\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} - yt)\vec{b} + (\dfrac{x}{2} + yt)\vec{c} + \dfrac{x}{2}\vec{d}$

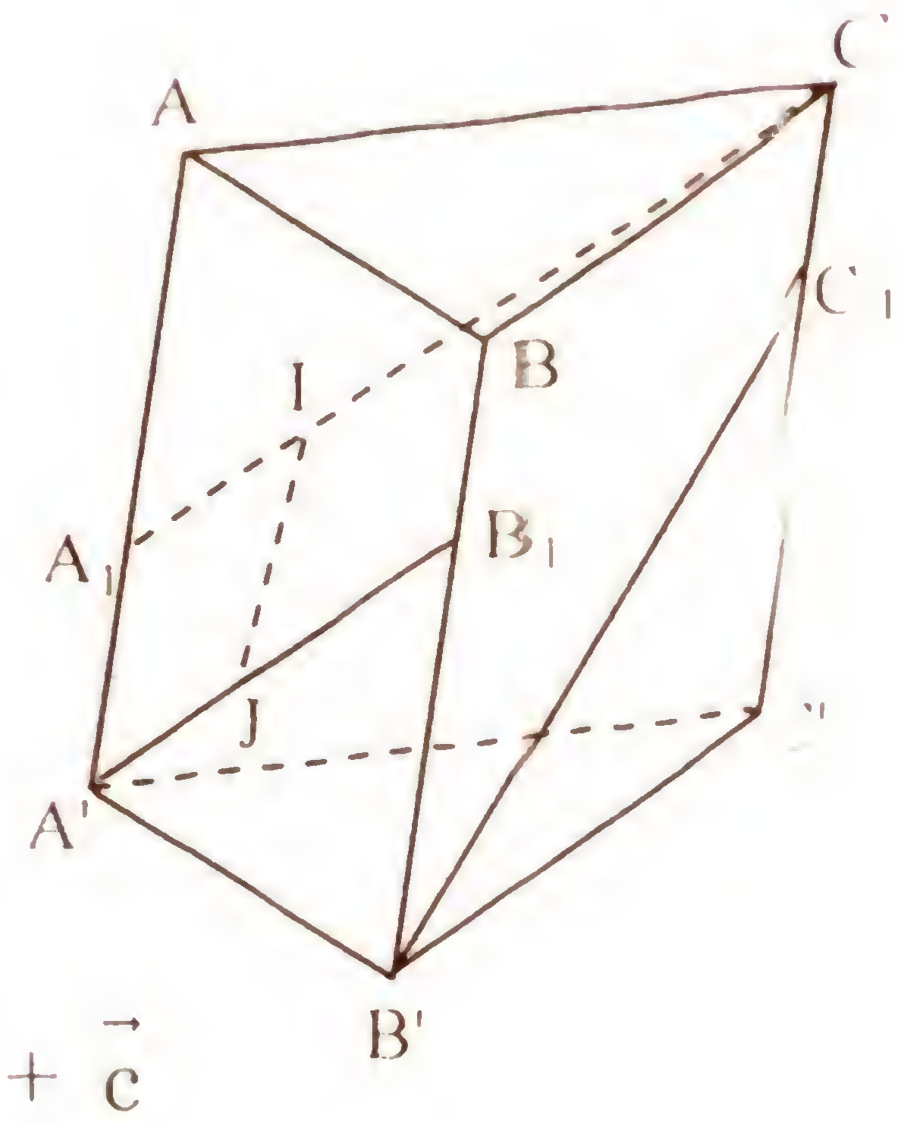
Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} - yt = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{2} + yt = 0 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ yt = -\dfrac{2}{3} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = 1 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{BQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên điểm Q chia cạnh BC theo tỷ số –2.

**Ví dụ 7**: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Lấy các điểm $A_1$, $B_1$, $C_1$ lần lượt thuộc các cạnh bên AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AA_1}{AA'} = \dfrac{B'B_1}{BB'} = \dfrac{C'C_1}{CC'} = \dfrac{3}{4}$. Trên các đoạn thẳng $CA_1$ và $A'B_1$ lần lượt lấy các điểm I, J sao cho IJ // $B'C_1$. Tính tỉ số $\dfrac{IJ}{B'C_1}$.

**Giải**

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.




Theo giả thiết, ta có:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4}\vec{a}$$

Ta có: $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \dfrac{3}{4}\vec{a} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{B'C_1} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

Vì I thuộc $CA_1$ nên $\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CA_1} = \dfrac{3}{4}t\vec{a} - t\vec{c}$

Do J thuộc $A'B_1$ nên $\overrightarrow{A'J} = m\overrightarrow{A'B_1} = -\dfrac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$

Mặt khác $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'J}$

$$= -\frac{3}{4}t\vec{a} + t\vec{c} + \vec{a} - \vec{c} - \frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$$

$$= \left(1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m\right)\vec{a} + m\vec{b} + (t-1)\vec{c}$$

Ta có IJ // $B'C_1$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{B'C_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{4}t - \dfrac{3}{4}m = -\dfrac{3}{4}k \\ m = -k \\ t - 1 = k \end{cases}$

Suy ra: $1 - \dfrac{3}{4}(k+1) + \dfrac{3}{4}k = -\dfrac{3}{4}k$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}k = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow t = \dfrac{2}{3},\ m = \dfrac{1}{3}$.

Vậy điểm I thuộc $A_1C$ được xác định bởi $\overrightarrow{CI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA_1}$.

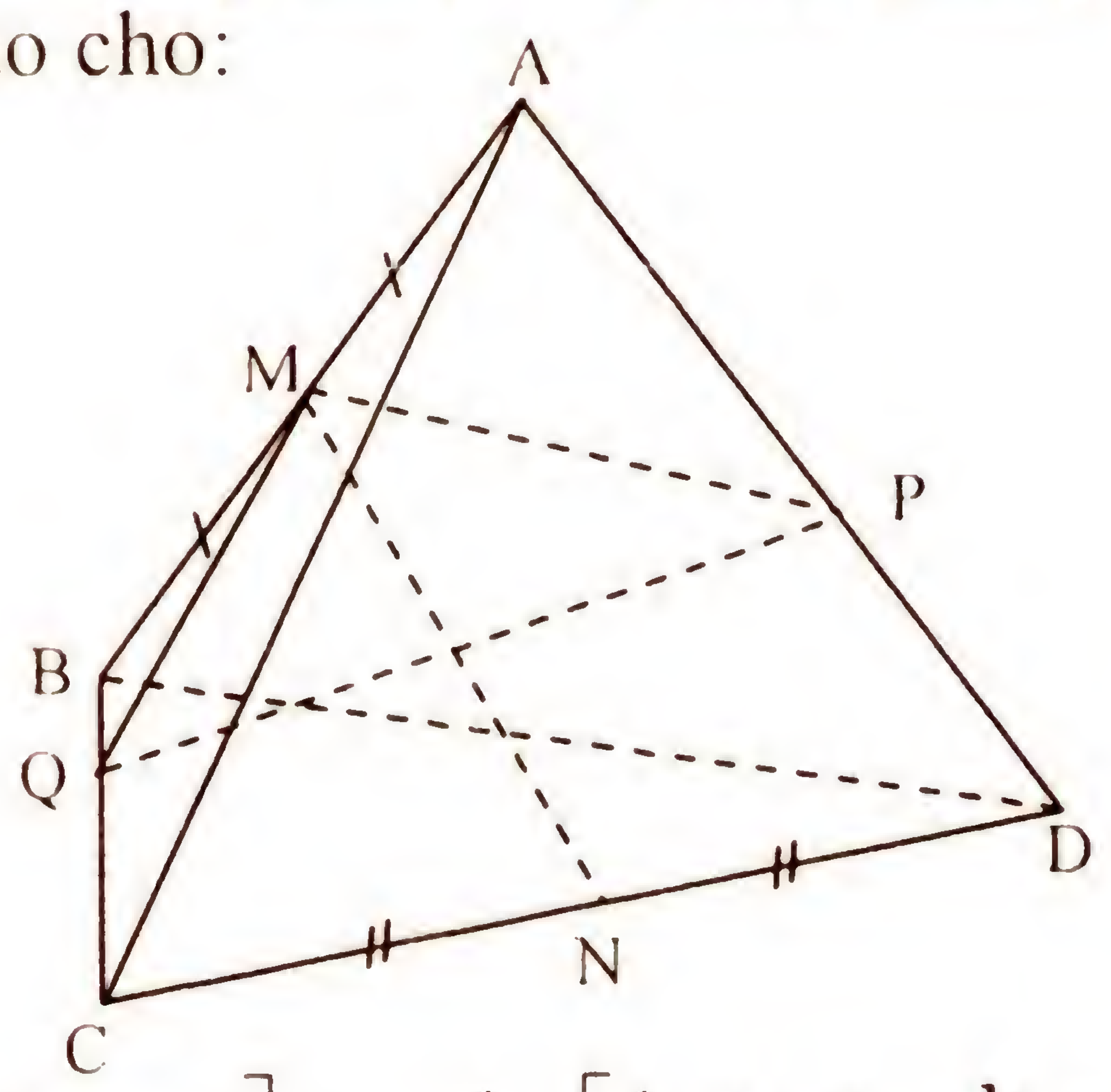
và J thuộc $A'B_1$ được xác định bởi $\overrightarrow{A'J} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{A'B_1}$.

Khi đó, ta có $\dfrac{IJ}{B'C_1} = \dfrac{1}{3}$.

**Ví dụ 8**: Cho M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ diện ABCD; P là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, k là số cho trước ($k \neq 1$). Xác định điểm Q thuộc đường thẳng BC sao cho PQ và MN cắt nhau. Khi đó, hãy tính tỉ số $\dfrac{QB}{QC}$.

**Giải**

MN cắt PQ nên các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Điều này tương đương với có các số x, y sao cho:




$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Khi đó: $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$$

$$= \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}) - \frac{k}{2}(\vec{a}-\vec{b}-2\vec{a})\right] = \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}) + \frac{k}{2}(\vec{a}+\vec{b})\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-k)}\left[(1+k)\vec{a} + (k-1)\vec{b}\right] = \frac{k+1}{2(1-k)}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{MB} + t\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + t(-\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}$$

Từ đó ta có: $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$

Do đó: $$\begin{cases} \dfrac{k+1}{2(1-k)} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}x + y\left(\dfrac{1}{2} - t\right) \\ 0 = \dfrac{1}{2}x + yt \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1,\ x = \frac{k+1}{k-1} + 1 = \frac{2k}{k-1},\ t = \frac{k}{k-1}.$$

Nên $\overrightarrow{BQ} = \dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{BC} = \dfrac{k}{k-1}(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC})$.

$\Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{k}{k-1}\right)\overrightarrow{BQ} = \dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{QC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{QC}$. Vậy $\dfrac{QB}{QC} = |k|$.

**Ví dụ 9:** Cho một hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng đi qua $D_1$ song song với $DA_1$ và $AB_1$ cắt đường thẳng $BC_1$ tại M. Tìm tỉ số mà điểm M chia đoạn thẳng $BC_1$.

**Giải**

Giả sử $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC_1}$. Ta phải xác định k sao cho ba vectơ $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ và $\overrightarrow{D_1M}$ đồng phẳng.

Đặt $\overrightarrow{D_1A_1} = \vec{a}$ , $\overrightarrow{D_1C_1} = \vec{b}$ , $\overrightarrow{D_1D} = \vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{D_1A_1} - \overrightarrow{D_1D} = \vec{a} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{D_1M} = \frac{\overrightarrow{D_1B} - k\overrightarrow{D_1C_1}}{1-k} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$

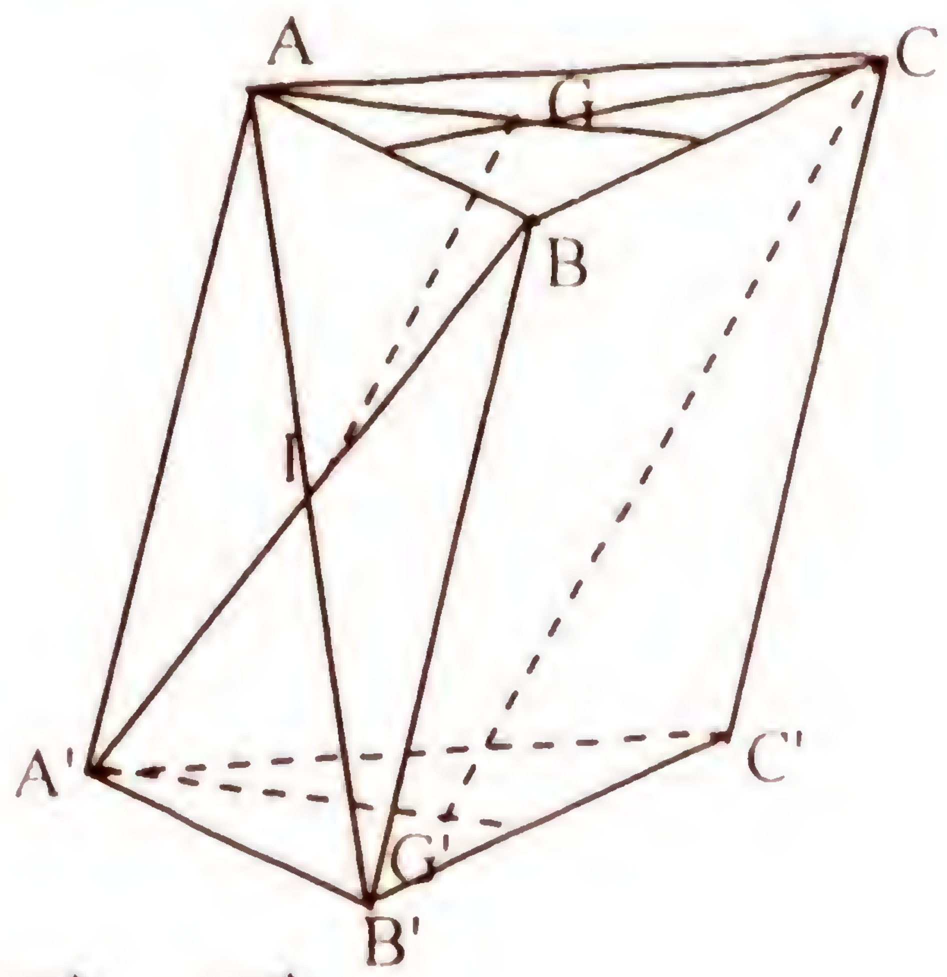
Điều kiện ba vectơ $\overrightarrow{D_1M}$ , $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng ta phải có m, n:

$$\overrightarrow{D_1M} = m\overrightarrow{DA_1} + n\overrightarrow{AB_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{a} + (1-k)\vec{b} + \vec{c}}{1-k} = m(\vec{a} - \vec{c}) + n(\vec{b} - \vec{c}) = m\vec{a} + n\vec{b} - (m+n)\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-k} = m \\ 1 = n \\ \dfrac{1}{1-k} = -(m+n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \\ k = 3 \end{cases}. \quad \text{Vậy } k = 3.$$

**Ví dụ 10**: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C', I là giao điểm của AB' và A'B. Chứng minh rằng GI // CG'




**Giải:**

Chọn cơ sở gốc A:

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a} \ , \ \overrightarrow{AB} = \vec{b} \ , \ \overrightarrow{AC} = \vec{c}$$

Ta có: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

$$\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

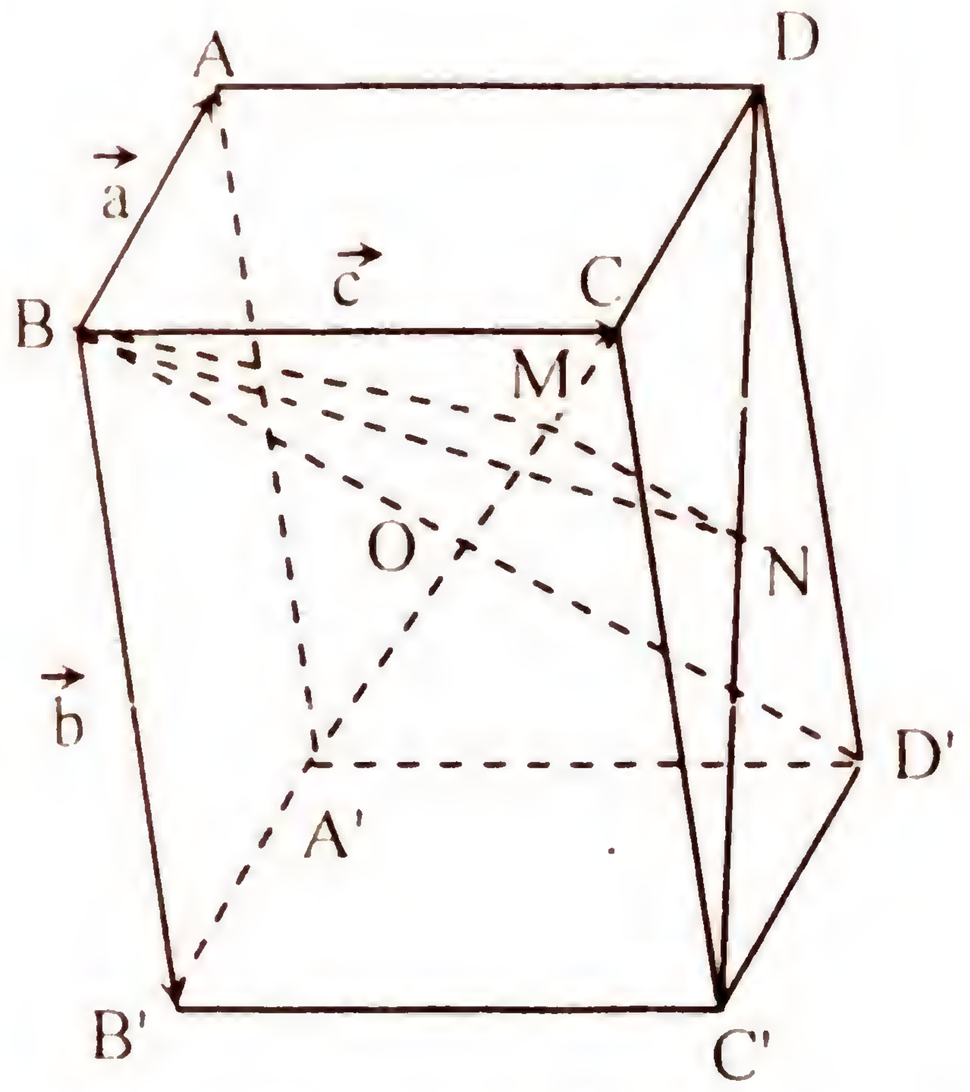
nên $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3} = \dfrac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{6}$

$$\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{c} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{3}$$

Suy ra: $\overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{GI}$ mà GI, CG' phân biệt nên GI // CG'

**Ví dụ 11:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Xét các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng A'C và C'D sao cho $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = t\overrightarrow{ND}$ (k và t đều khác 1). Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Xác định các số k, t để đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'.

**Giải**




Từ giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA'} - k\overrightarrow{BC}}{1-k}\text{, do đó:}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC'} - t\overrightarrow{BD}}{1-t}\text{, do đó:}$$

$$\overrightarrow{BN} = -\frac{t}{1-t}\vec{a} + \frac{1}{1-t}\vec{b} + \vec{c}$$

Vì BD' và C'D là hai đường thẳng chéo nhau và N thuộc đường thẳng C'D nên đường thẳng MN không thể trùng với đường thẳng BD'.

Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng BD' khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'}$.

Do $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$ nên ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{t}{1-t} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{k}{1-k}\right)\vec{c}$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng

nên: $$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{t}{1-t} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ 1 + \dfrac{k}{1-k} = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = -3 \\ p = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy khi k = –3, t = –1 thì đường thẳng MN và đường thẳng BD' song song với nhau.

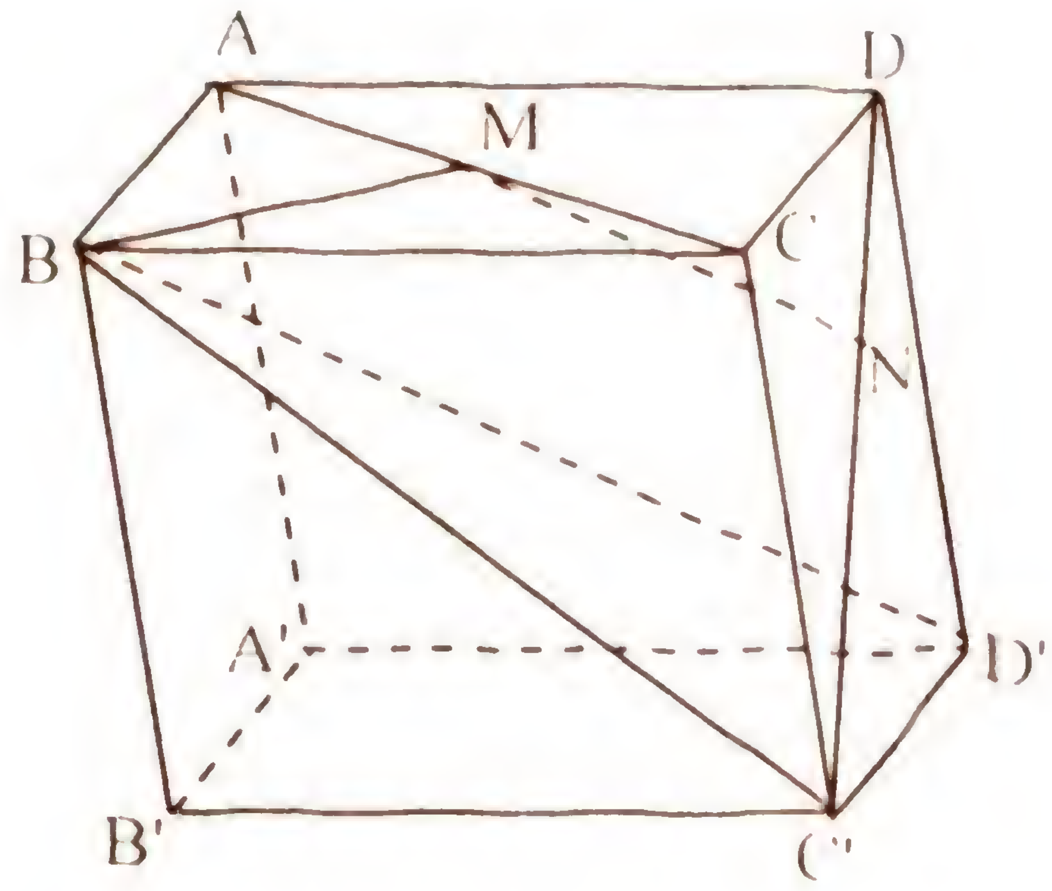
**Ví dụ 12:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^o$ và BA = a, BB' = b, BC = c.

**Giải**

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ thì $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$ nên

$$\overrightarrow{BM}=\frac{\overrightarrow{BC}-m\overrightarrow{BA}}{1-m}=\frac{\vec{c}-m\vec{a}}{1-m}$$




Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{BN}=\frac{\overrightarrow{BD}-m\overrightarrow{BC'}}{1-m}=\frac{\vec{a}+\vec{c}-m(\vec{b}+\vec{c})}{1-m}$$

$$=\frac{1}{1-m}\vec{a}-\frac{m}{1-m}\vec{b}+\vec{c}$$

Từ đó $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{1+m}{1-m}\vec{a}-\frac{m}{1-m}\vec{b}-\frac{m}{1-m}\vec{c}$

Do AC, BD' chéo nhau và DC', BD' chéo nhau nên

$MN \,//\, BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$.

Mặt khác $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên điều ấy xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{1+m}{1-m}=k\\[2mm] \dfrac{-m}{1-m}=k\\[2mm] \dfrac{-m}{1-m}=k\end{cases}$$ . Suy ra $1+m=-m \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Từ đó, ta có $k=\frac{1}{3}$. Vậy $m=-\frac{1}{2}$ thì MN // BD'

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

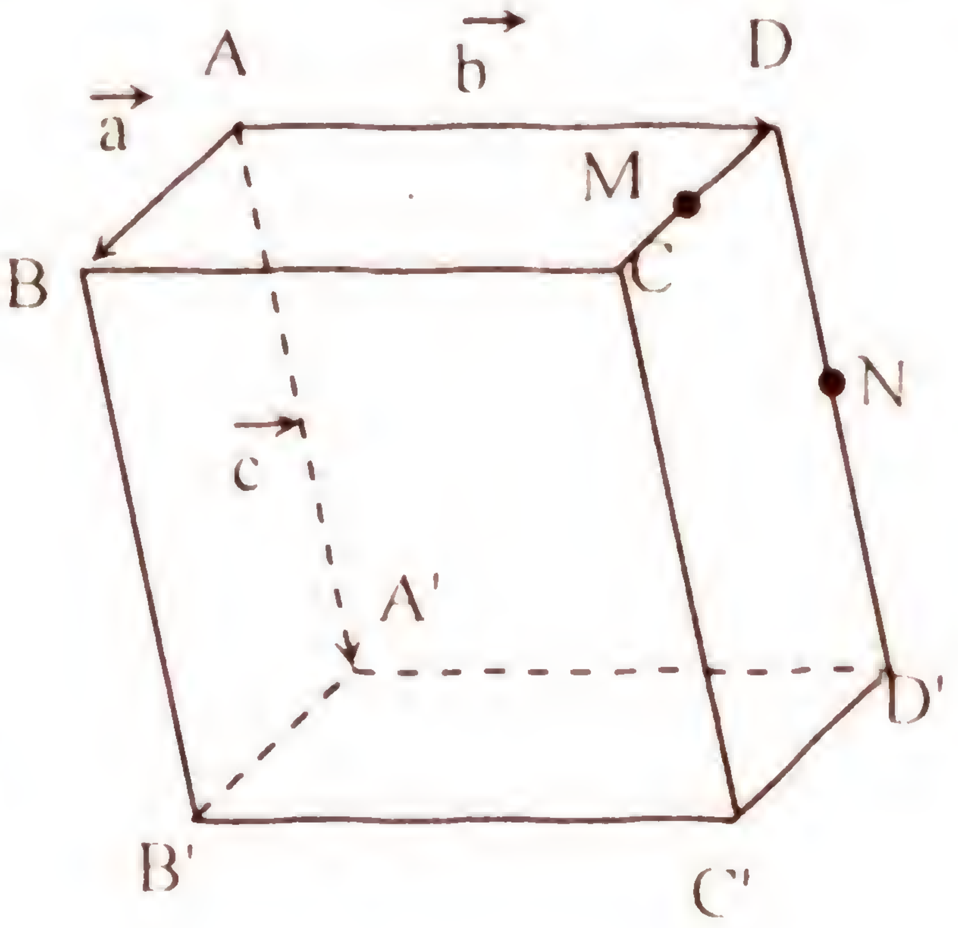
Do đó $\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{9}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{a}.\vec{c}+2\vec{b}.\vec{c})$

hay $MN^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$

Vậy $MN=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$.

<u>**Ví dụ 13**</u>: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

**Giải**




Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Vì G' là trọng tâm của tứ diện BCC'D' nên:

$$\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'})$$

và G là trọng tâm của tứ diện A'D'MN nên:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

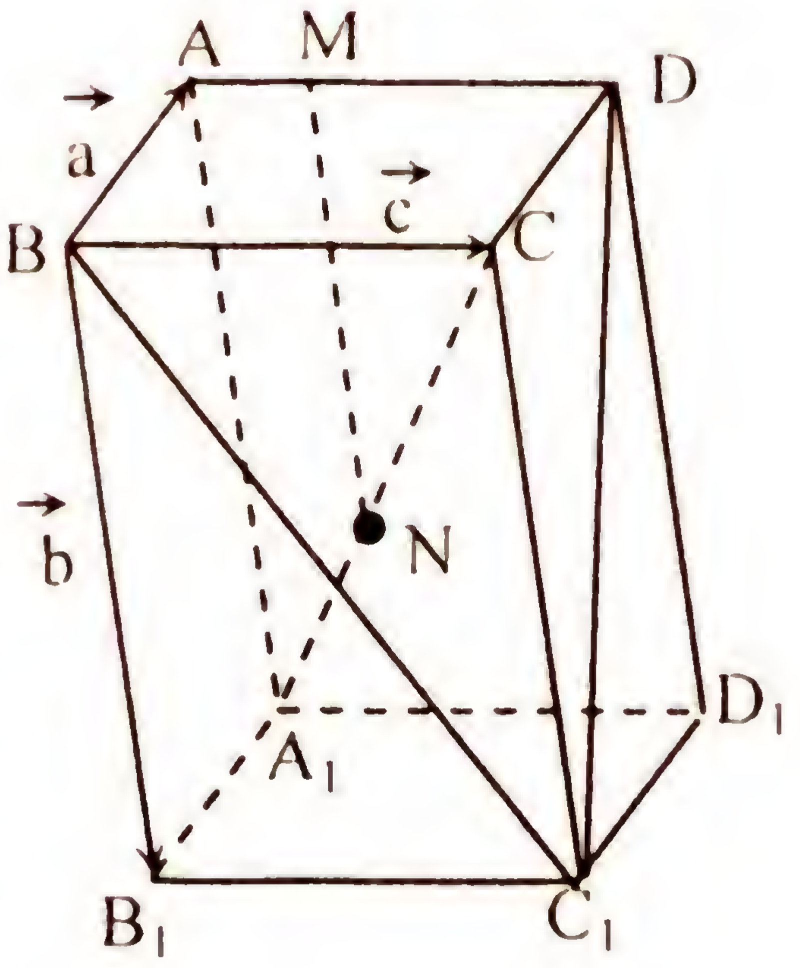
Từ đó: $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'})$

$$= \frac{1}{4}(\vec{a} - \vec{c} + \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}) = \frac{1}{8}(5\vec{a} - \vec{c})$$

Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{GG'}$ đồng phẳng. Mặt khác, G không thuộc mặt phẳng (ABB'A') nên đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

**<u>Ví dụ 14</u>**: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Điểm M chia đoạn AD theo tỉ số $-\frac{1}{4}$, điểm N chia đoạn $A_1C$ theo tỉ số $-\frac{2}{3}$. Chứng minh MN song song mp($BC_1D$).

**Giải**




Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

Khi đó:

$\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}$,

$\overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}}{5} = \frac{5\vec{a} + \vec{c}}{5}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3\overrightarrow{BA_1} + 2\overrightarrow{BC}}{5} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5}$

Để chứng minh MN // mp($BDC_1$) ta phải chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng, tức là có m và n sao cho:

$\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{BD} + n\overrightarrow{BC_1}$

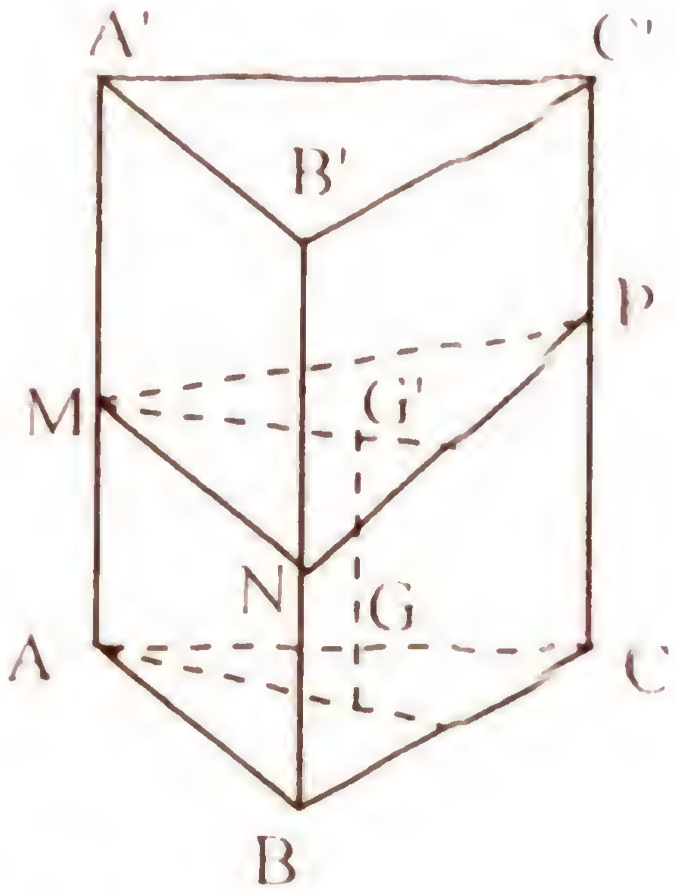
$\Leftrightarrow \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5} = m(\vec{a} + \vec{c}) + n(\vec{b} + \vec{c}) = m\vec{a} + n\vec{b} + (m+n)\vec{c}$

$\Leftrightarrow n = -\frac{2}{5}$ và $n = \frac{3}{5}$ (đpcm).

**<u>Ví dụ 15</u>**: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng a. Trên các cạnh bên AA', BB', CC' ta lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho AM + BN + CP = a. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

**Giải**

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác MNP.




Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N}$

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P}$

Nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{GG'}$

Vì lăng trụ có cạnh bên bằng a và AM + BN + CP = a

nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AA'}$ do đó $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{GG'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. Vì G, A, A' cố định nên G' cố định.

Vậy (MNP) luôn đi qua G' cố định.

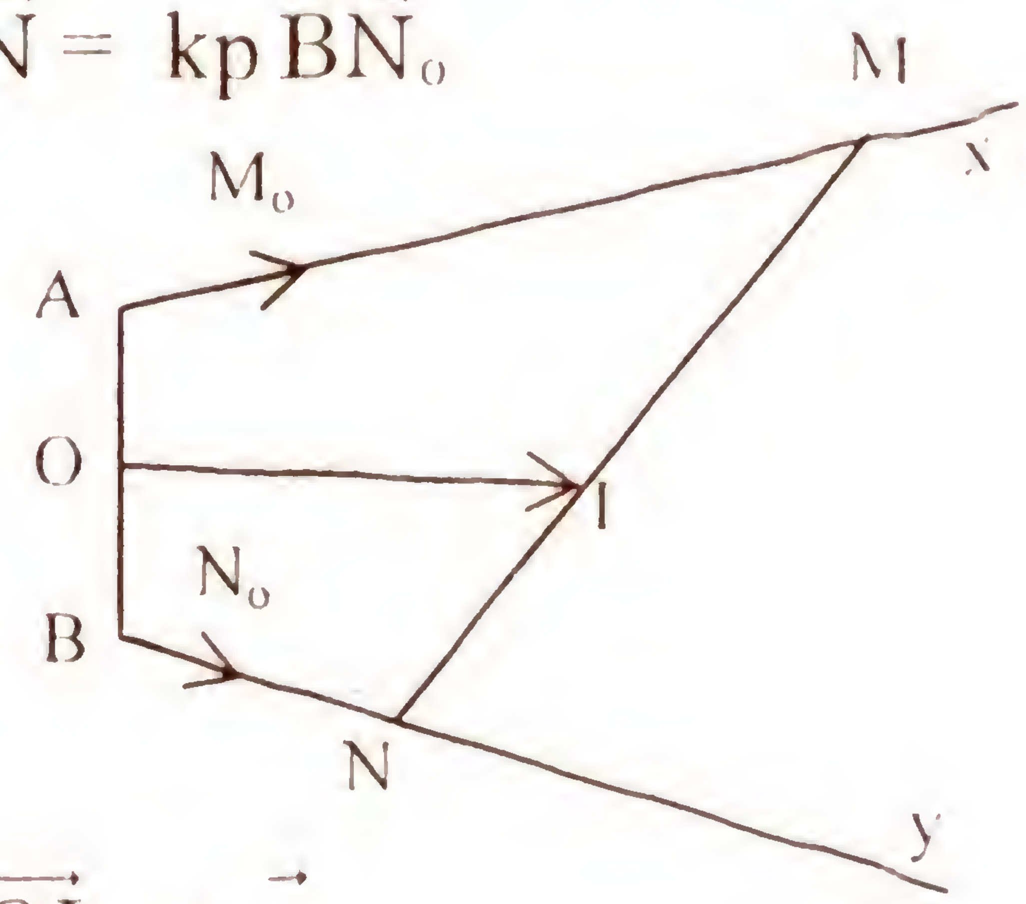
**Ví dụ 16**: Cho hai tia Ax và By chéo nhau. Trên Ax và By lần lượt lấy hai điểm M, N thay đổi sao cho AM = kBN, k là một số dương không đổi. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng MN nằm trên một tia cố định.

**Giải**

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AB và I là trung điểm đoạn thẳng MN.

Ta lấy hai vectơ đơn vị $\overrightarrow{AM_0}$ và $\overrightarrow{BN_0}$ lần lượt nằm trên tia Ax và By.

Vì AM = kBN nên, nếu $\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AM_0}$ thì $\overrightarrow{BN} = kp\overrightarrow{BN_0}$




$\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN})$

$= \dfrac{1}{2}(p\overrightarrow{AM_0} + kp\overrightarrow{BN_0})$

$= \dfrac{p}{2}(\overrightarrow{AM_0} + k\overrightarrow{BN_0})$

Đặt $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AM_0} + k\overrightarrow{BN_0}) = \vec{e}$ ta luôn luôn có $\overrightarrow{OI} = p\vec{e}$.

Suy ra I luôn luôn nằm trên một tia cố định.

**Ví dụ 17**: Trên các cạnh AB, AC và AD của tứ diện ABCD lần lượt lấy các điểm K, L và M sao cho:

$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AL}$ và $\overrightarrow{AD} = \gamma\overrightarrow{AM}$

a) Chứng minh rằng nếu $\gamma = \alpha + \beta + 1$ thì các mặt phẳng (KLM) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng nếu $\beta = \alpha + 1$ và $\gamma = \beta + 1$ thì các mặt phẳng (KLM) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

**Giải**

Đặt: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Vì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng, nên với điểm X bất kì trong không gian ta có:

$\overrightarrow{AX} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Điểm X thuộc mp(KLM) <=> $\begin{cases} \overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{AK} + q\overrightarrow{AL} + r\overrightarrow{AM} \\ p + q + r = 1 \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{AX} = \alpha x\overrightarrow{AK} + \beta y\overrightarrow{AL} + \gamma z\overrightarrow{AM}$

a) Giả sử: $\gamma = \alpha + \beta + 1$, thì:

$$\overrightarrow{AX} = \alpha x\overrightarrow{AK} + \beta y\overrightarrow{AL} + (\alpha + \beta + 1)z\overrightarrow{AM}$$

Do đó để $X \in$ mp(KLM) ta cần có điều kiện:

$$\alpha x + \beta y + (\alpha + \beta + 1)z = 1$$

hay: $(x + z)\alpha + (y + z)\beta + z = 1$ (*)

Điều kiện (*) đúng với mọi $\alpha$, $\beta$ khi và chỉ khi: $x = y = -1$, $z = 1$.

Vậy điểm X sao cho $\overrightarrow{AX} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ là điểm cố định nằm trên mọi mp(KLM).

b) Giả sử: $\beta = \alpha + 1$, $\gamma = \beta + 1$ hay $\alpha = \beta - 1$, $\gamma = \beta + 1$ thì:

$$\overrightarrow{AX} = (\beta - 1)x\overrightarrow{AK} + \beta y\overrightarrow{AL} + (\beta + 1)z\overrightarrow{AM}.$$

Để $X \in$ mp(KLM) ta cần có điều kiện:

$$(\beta - 1)x + \beta y + (\beta + 1)z = 1 \Rightarrow (x + y + z)\beta - x + z = 1 \ (**).$$

Điều kiện (**) đúng với mọi $\beta$ khi và chỉ khi: $x + y + z = 0$ và $-x + z = 1$ hay $z = x + 1$ và $y = -2x - 1$.

Vì vậy, ta có thể lấy điểm X ứng với $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$ và Y ứng với: $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$ chẳng hạn, tức là: $\overrightarrow{AX} = -\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AY} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ thì X, Y là hai điểm cố định thuộc mọi mp(KLM).

Vậy mp(KLM) luôn đi qua đường thẳng cố định XY.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**1.** Tứ diện ABCD có trọng tâm G. Gọi M, N trung điểm AC, BD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$

b) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PG}, \forall P$.

**HD:** a) chèn 2 trung điểm M và N b) chèn trọng tâm G

**2.** Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{AC'}$

b) Gọi G trọng tâm tam giác ABC. Biểu diễn $\overrightarrow{A'G}$.

**HD:** đưa về gốc A.

**3.** Chứng minh hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' cùng trọng tâm khi và chỉ khi : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

**4.** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{z}$

a) Gọi G trọng tâm tam giác BDA'. Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$.

b) Chứng minh 3 điểm A, G, C' thẳng hàng.

**HD:** b) dùng quy tắc hình hộp

5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi $D_1$, $D_2$, $D_3$ là điểm đối xứng của D' qua A, B', C. Chứng minh B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.
**HD:** dùng hệ thức vectơ của trọng tâm

6. Tam giác ABC trọng tâm G. Điểm M bất kỳ trong không gian.
a) Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.
b) Tìm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất.
**ĐS:** b) M là trọng tâm G

7. Cho tứ diện ABCD và đường thẳng d.
a) Tìm $H \in d$ để $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}|$ bé nhất
b)Tìm $M \in d$ để $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}|$ bé nhất.
**HD:** b) Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$

8. Cho tam giác ABC. Tìm GTNN của :
$T = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

9. Tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M trung điểm CD.
Tính góc $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}$. **ĐS:** $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10. Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh bằng x. Gọi M, N là trung điểm của AB, CD.
a) Tính đoạn MN và chứng minh MN vuông góc CD.
b) Tính góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$

11. Cho tứ diện OABC có 3 cạnh OA, OB, OC đôi một hợp nhau 3 góc $\alpha, \beta, \gamma$. Chứng minh $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -3/2$.
**HD:** dùng bình phương vô hướng của tổng 3 vectơ đơn vị trên 3 cạnh OA, OB, OC.

12. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh hình hộp là hình hộp chữ nhật khi và chỉ khi:
$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}\right|$$
$$= \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}\right| = \left|-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}\right|$$
**HD:** dùng bình phương vô hướng

13. Tứ diện ABCD. Tìm quỹ tích các điểm M:
a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\,\overrightarrow{MC}$ b) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$
**ĐS:** gọi I, J là trung điểm của AB, CD
a) đường thẳng IC
b) mặt phẳng trung trực của IJ.

14. Giả sử $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
Các vectơ $\vec{a} - 2\vec{b}$, $3\vec{b} - \vec{c}$, $2\vec{c} - 3\vec{a}$ có đồng phẳng không?
**ĐS:** đồng phẳng

**15.** Cho tứ diện ABCD và M, N sao cho: $\overrightarrow{MA} = -4\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{ND} = -4\overrightarrow{NC}$.

Ba điểm I, J, K lần lượt chia đoạn AD, MN, BC cùng theo tỉ số k.

Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

**16.** Cho tứ diện ABCD. Lấy M, N, P, Q trên AB, BC, CD, DA sao cho

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}.$$

Tìm k để P, Q, M, N đồng phẳng.

**ĐS:** $k = \frac{1}{2}$

**17.** Tứ diện ABCD. Các điểm A', B', C', D' chia đoạn AB, BC, CD, DA cùng tỉ số k.

a) Chứng minh tồn tại điểm O để: $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

b) Tìm k để A', B', C', D' đồng phẳng.

**ĐS:** b) $k = -1$

**18.** Trên cạnh AB, BC, CD, DA của tứ diện ABCD lấy A', B', C', D' sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'}$ với M nào đó.

Chứng minh: $\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'B}} = \dfrac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'C}} = \dfrac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'D}} = \dfrac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{D'A}}$

**19.** Cho hình chóp S.ABC. Lấy A',B',C' trên SA, SB, SC sao cho SA = 3SA', SB = 5SB', SC = cSC'. Chứng minh (A'B'C') đi qua trọng tâm G tam giác ABC khi và chỉ khi c = 5.

**HD:** dùng điều kiện đồng phẳng

**20.** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N là trung điểm AB,A'D'.

a) Xác định giao điểm P,Q của đường thẳng B'C', DB' với (CMN).

b) Tính $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ theo $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

**21.** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Lấy $A_1$, $B_1$, $C_1$ trên AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AA_1}{AA'} = \dfrac{B'B_1}{BB'} = \dfrac{C'C_1}{CC'} = \dfrac{3}{4}$. Lấy I, J trên $CA_1$, $A'B_1$ sao cho IJ song song $B'C_1$. Tính tỉ số IJ / B'C.

**ĐS:** IJ / B'C = 1/3

# §2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là góc giữa hai đường thẳng $\Delta'_1$ và $\Delta'_2$ cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với $\Delta_1$ và $\Delta_2$.
- Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°. Ký hiệu $a \perp b$.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

- Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc ta chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ hay $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Nếu a // b và c vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì c vuông góc với đường thẳng còn lại.

**Ví dụ 1**: Cho hình tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không?

**Giải**

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Tương tự, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow AD \perp BC$;

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow AB \perp CD$.

Như vậy điều ngược lại cũng đúng.

**Ví dụ 2**: Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

**Giải**

Ta có: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = 0$

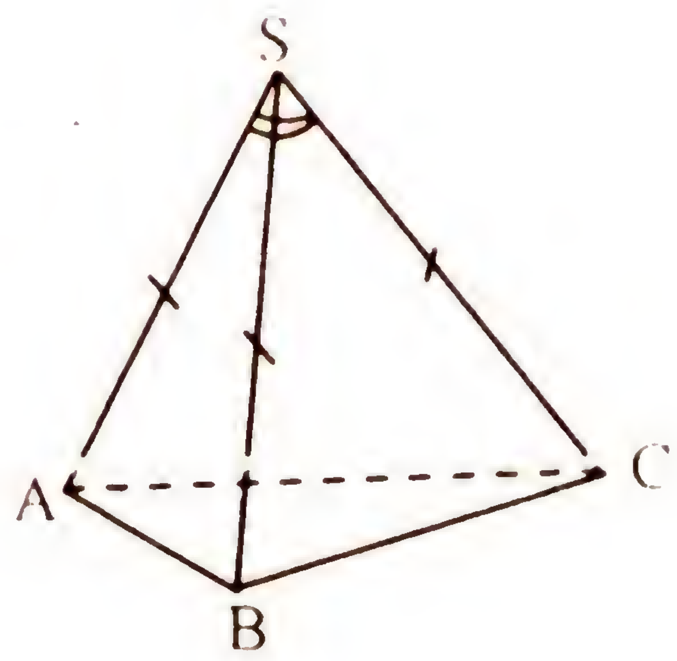
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(2\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD$

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và

$\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng SA ⊥ BC , SB ⊥ AC, SC ⊥ AB.

**Giải**




Ta chứng minh $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0$.

Thật vậy: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$= SA.SC\cos\widehat{ASC} - SA.SB\cos\widehat{ASB}$

Vì SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{ASC}$

nên $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0$ tức là SA ⊥ BC.

Tương tự ta có SB ⊥ AC, SC ⊥ AB.

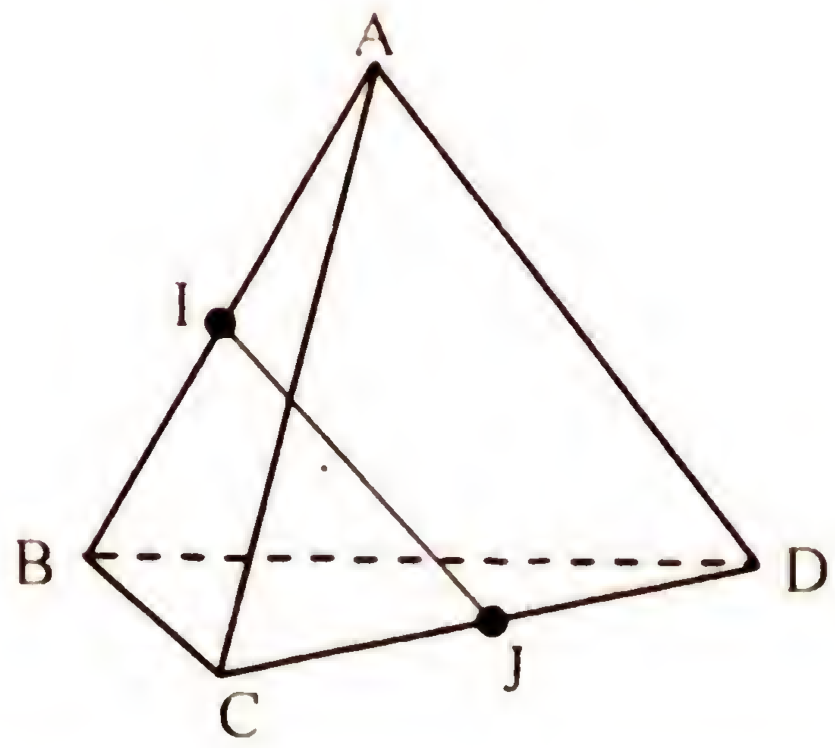
**Ví dụ 4**: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD = a và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$

Chứng minh rằng :

a) AB ⊥ CD.

b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì IJ ⊥ AB và IJ ⊥ CD.

**Giải**




a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|\cos\widehat{BAD} - |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos\widehat{BAC}$

Do AB = AC = AD , $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$ nên

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, tức là AB ⊥ CD

b) Vì I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ + |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ - \overrightarrow{AB}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - a^2\right) = 0 \Rightarrow AB \perp IJ$$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow CD \perp IJ$$

**Ví dụ 5**: Cho hình tứ diện ABCD, trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$ ; $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau.

**Giải**

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$

và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \Rightarrow k\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{BD} + k\overrightarrow{DQ}$ nên:

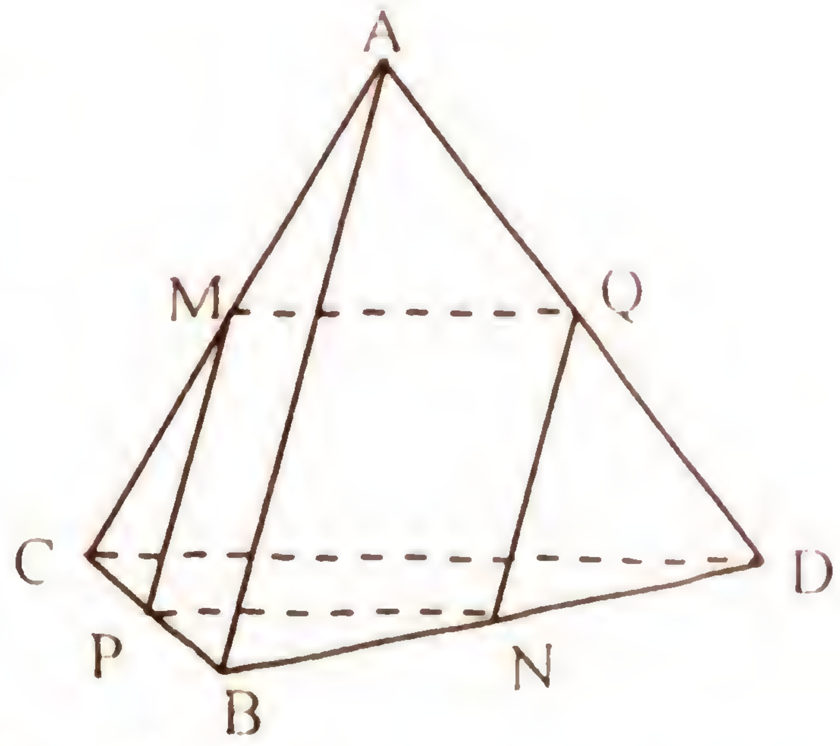
$(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} - k\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CQ} - k\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}$

Do đó $(1-k)\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$ (vì $AB \perp AC$, $AB \perp BD$).

Mà $k \neq 1$ nên $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow AB \perp PQ$.

**Ví dụ 6:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, BC, AD. Chứng minh nếu MN = PQ thì $AB \perp CD$.

**Giải**

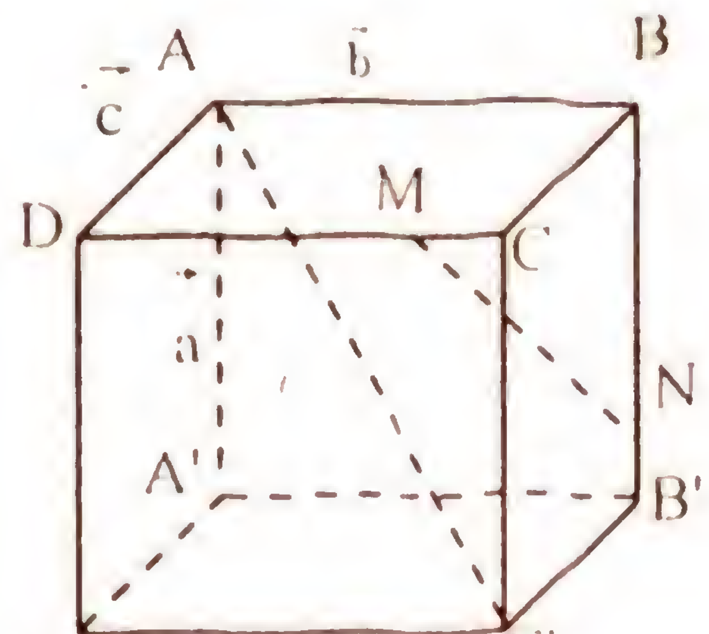



Ta có MP, QN là các đường trung bình của tam giác ACB, ADB nên có MP // = QN, do đó MPNQ là hình bình hành. Mà MN = PQ nên có hai đường chéo bằng nhau, do đó MPNQ là hình chữ nhật, suy ra $MP \perp MQ$ $\Rightarrow AB \perp CD$.

Cách khác: Chọn hệ cơ sở: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Rồi chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

**Ví dụ 7:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Trên các cạnh DC và BB' ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho DM = BN = x với $0 \leq x \leq a$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AC' và MN vuông góc với nhau.

**Giải**




Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

thì $\overrightarrow{BN} = \frac{x}{a}.\vec{a}$ và $\overrightarrow{DM} = \frac{x}{a}.\vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Mà $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$

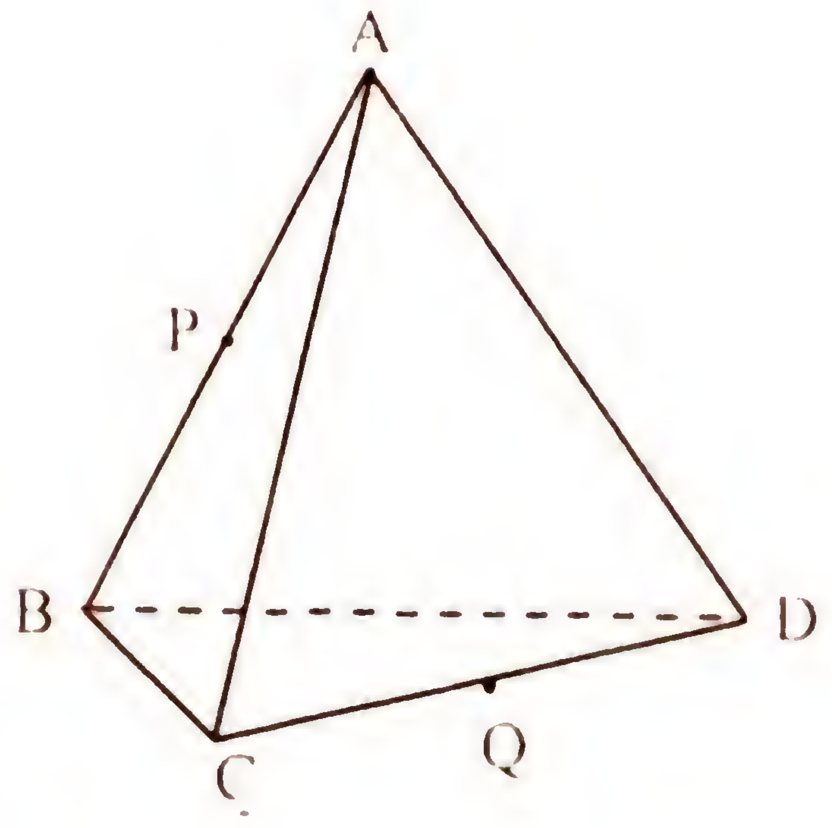
Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).\left[\frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}\right] = \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2$

$$= x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AC' \perp MN.$$

**Ví dụ 8**: Cho tứ diện ABCD, gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng nếu PQ ⊥ AB và PQ ⊥ CD thì AC = BD và AD = BC, ngược lại nếu AC = BD và AD = BC thì PQ ⊥ AB và PQ ⊥ CD.

**Giải**




Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}, \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}$

$$= \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} - \vec{a} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}}{2}$$

Ta có $AC = BD \Leftrightarrow \left|\vec{c} - \vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow (\vec{c} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2$

$$\Leftrightarrow \vec{b}^2 - (\vec{c} - \vec{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}.(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

Tương tự $AD = BC \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{c} - \vec{b}\right| \Leftrightarrow \vec{a}^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}.(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

Do đó: $\begin{cases} AC = BD \\ AD = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\left[(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})\right] = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\left[(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})\right] = 0 \end{cases}$$

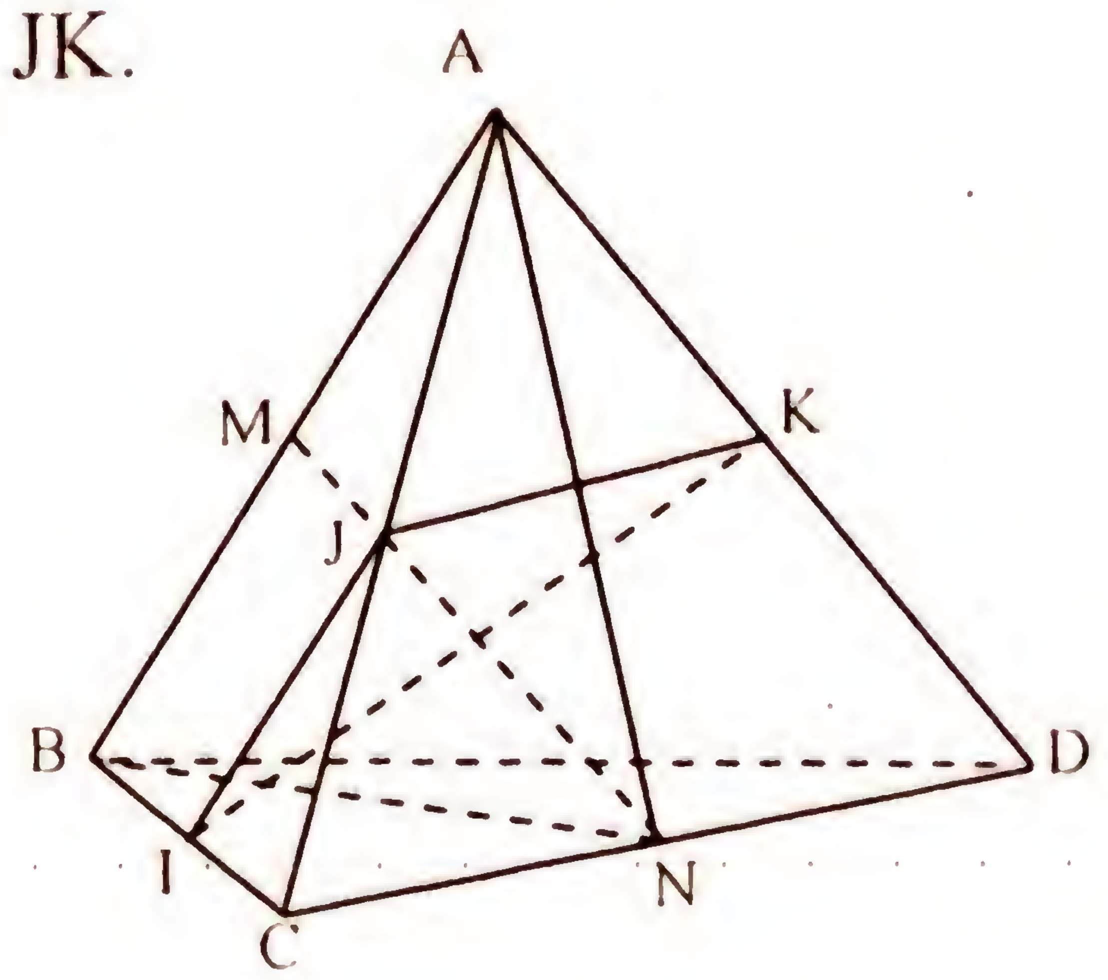
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\vec{c} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}(\vec{b} - \vec{a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PQ \perp CD \\ PQ \perp AB \end{cases}.$$

**Ví dụ 9**: Cho tứ diện đều ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm I, J, K lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AC, AD sao cho $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KD}$ trong đó k là số cho trước.

a) Chứng minh rằng MN ⊥ IJ và MN ⊥ JK.

b) Chứng minh rằng AB ⊥ CD.

**Giải**




a) Từ $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$

Ta có IJ // AB.

Tương tự, ta có JK // CD.

Do các cạnh của tứ diện ABCD bằng nhau và N là trung điểm của CD nên NA = NB.

Mặt khác MA = MB.

Vậy MN ⊥ AB, từ đó MN ⊥ IJ.

Tương tự như trên, ta có MN ⊥ CD và JK // CD nên MN ⊥ JK.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}$

Từ giả thiết, ta có: AN ⊥ CD nên $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CD} = 0$

và BN ⊥ CD nên $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CD} = 0$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}).\overrightarrow{CD} = 0$ nên AB ⊥ CD.

**<u>Ví dụ 10</u>**: Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.

**Giải**

Giả sử $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng, vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên ta có $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b}$, từ đó $\vec{n}.\vec{n} = (x\vec{a} + y\vec{b}).\vec{n} = x\vec{a}.\vec{n} + y\vec{b}.\vec{n} = 0$, điều này mâu thuẫn với $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Vậy $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.

**<u>Ví dụ 11</u>**: Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

**Giải**

Gọi ba vectơ cùng vuông góc với $\vec{n}$ là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thì $\vec{a}.\vec{n} = \vec{b}.\vec{n} = \vec{c}.\vec{n} = 0$

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng phương thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương, theo ví dụ trên thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Do đó $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}$ nên $\vec{c}.\vec{n} = x\vec{a}.\vec{n} + y\vec{b}.\vec{n} + z\vec{n}^2$, suy ra $z\vec{n}^2 = 0$ hay z = 0, tức là $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Vậy các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Cách khác: Giả sử $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì tồn tại 3 số x, y, z sao cho

$\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{n}^2 = x.\vec{a}.\vec{n} + y.\vec{b}.\vec{n} + z.\vec{c}.\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{0}$ : Vô lý

Kết quả: Nếu ba đường thẳng $d_1$, $d_2$, $d_3$ cùng vuông góc với một đường thẳng thì do kết quả nêu trên, ta có ba vectơ chỉ phương của ba đường thẳng $d_1$, $d_2$, $d_3$ đồng phẳng tức là ba đường thẳng $d_1$, $d_2$, $d_3$ cùng song song với một mặt phẳng.

**Ví dụ 12**: Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và không song song. Chứng minh hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với cả a và b thì song song với nhau.

**Giải**

Gọi $\Delta_1$, $\Delta_2$ là hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với cả a và b.

Gọi $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ là vectơ chỉ phương của $\Delta_1$, $\Delta_2$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là vectơ chỉ phương của a, b

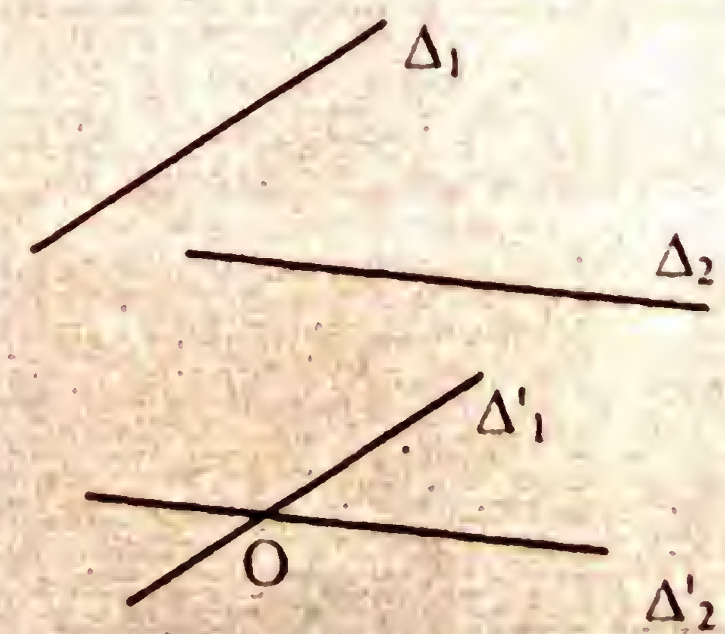
Theo ví dụ trên thì $\vec{n_1}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng do đó tồn tại 3 số x, y, z để: $\overrightarrow{n_2} = x.\overrightarrow{n_1} + y.\vec{a} + z.\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} - x.\overrightarrow{n_1} = y.\vec{a} + z.\vec{b}$

nên $(\overrightarrow{n_2} - x.\overrightarrow{n_1})^2 = (y.\vec{a} + z.\vec{b})(\overrightarrow{n_2} - x.\overrightarrow{n_1}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = x.\overrightarrow{n_1} \Rightarrow$ đpcm

## DẠNG 2: TÍNH GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua một điểm bất kì lần lượt song song đường thẳng đó.

Chú ý:




- Để xác định góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$, ta có thể lấy điểm O nói trên thuộc một trong hai đường thẳng đó.
- Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90°.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$ và $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ bằng $\alpha$ nếu $\alpha \le 90°$ và bằng $180° - \alpha$ nếu $\alpha > 90°$.
- Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ theo công thức :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$. Đặt biệt $\vec{u}.\vec{v} = 0$ thì $\vec{u} \perp \vec{v}$

- Độ dài của đoạn thẳng AB: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.
- Định lý cosin cho tam giác ABC: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- Tam giác ABC có trung tuyến AM: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$
- Sử dụng quan hệ song song và tính chất giao tuyến song song.

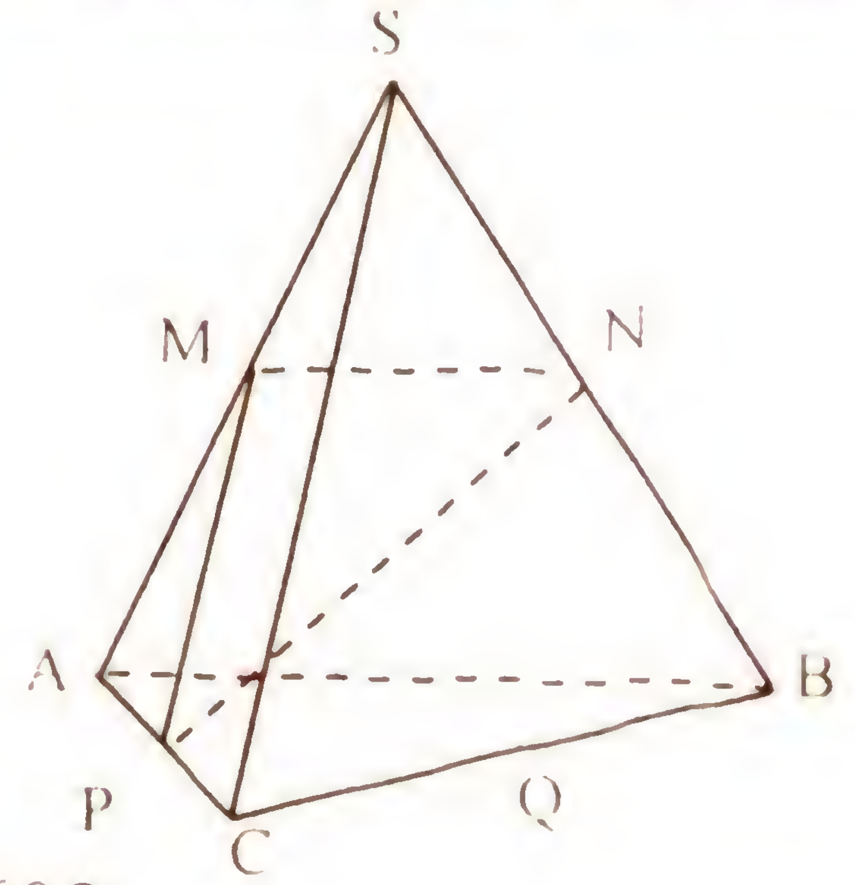
**<u>Ví dụ 1</u>**: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a và BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

**Giải**

Ta có tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$ và tam giác SAB đều.

$$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$




$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°.

Cách khác: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, AC. Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB, ta cần tính $\widehat{NMP}$.

Ta có $NB = MP = \frac{a}{2}$, $SP^2 = \frac{3a^2}{4}, BP^2 = \frac{5a^2}{4}$

Tam giác BPS : $BP^2 + SP^2 = 2NP^2 + \frac{SB^2}{2} \Rightarrow NP^2 = \frac{3a^2}{4}$

Mà $NP^2 = NM^2 + MP^2 - 2MN.MP\cos\widehat{NMP}$

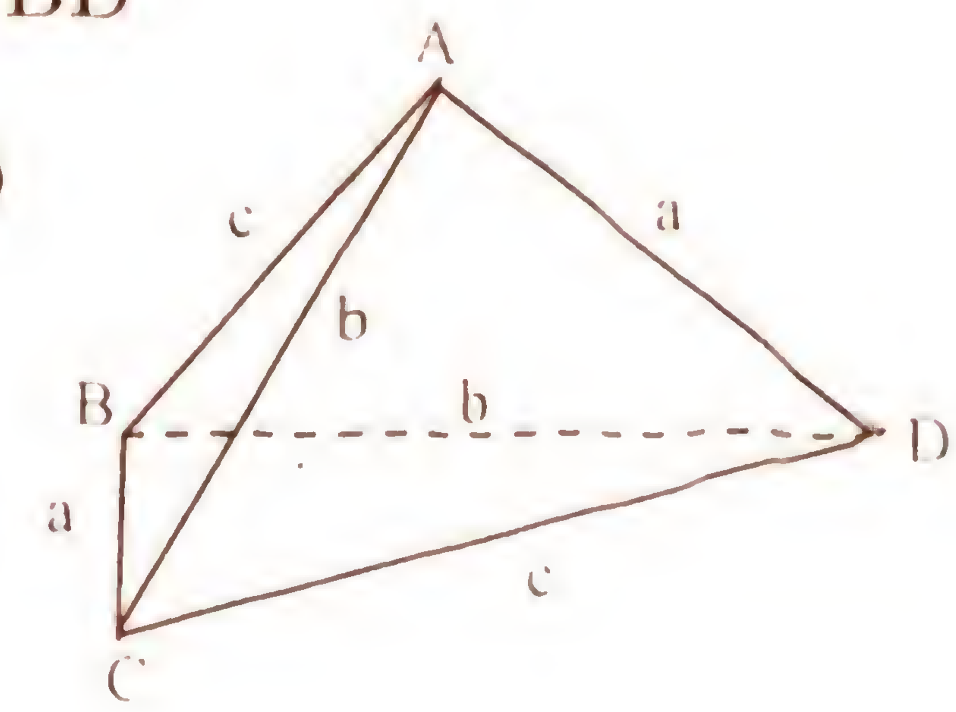
$$\Rightarrow \cos\widehat{NMP} = -\frac{\frac{a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^\circ \Rightarrow (SC, AB) = 60^\circ$$

**<u>Ví dụ 2:</u>** Cho tứ diện ABCD có BC = AD = a, AC = BD = b, AB = CD = c. Tính các góc α là góc giữa BC và AD; β là góc giữa AC và BD; γ là góc giữa AB và CD. Chứng minh rằng trong ba số hạng $a^2\cos\alpha$, $b^2\cos\beta$, $c^2\cos\gamma$ có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

**Giải**

Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

$$= \frac{1}{2}(BC^2 + BA^2 - CA^2) - \frac{1}{2}(BC^2 + BD^2 - CD^2)$$




Nên: $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a^2} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}$

Vậy nếu góc giữa BC và AD bằng α thì:

$$\cos\alpha = \frac{\left|c^2 - b^2\right|}{a^2} \text{ hay } a^2\cos\alpha = \left|c^2 - b^2\right|$$

Tương tự như trên, nếu gọi β là góc giữa AC và BD thì:

$\cos\beta = \dfrac{\left|a^2 - c^2\right|}{b^2} \Rightarrow b^2\cos\beta = \left|a^2 - c^2\right|$ và $\gamma$ là góc giữa AB và CD thì

$\cos\gamma = \dfrac{\left|b^2 - a^2\right|}{c^2} \Rightarrow c^2\cos\gamma = \left|b^2 - a^2\right|$.

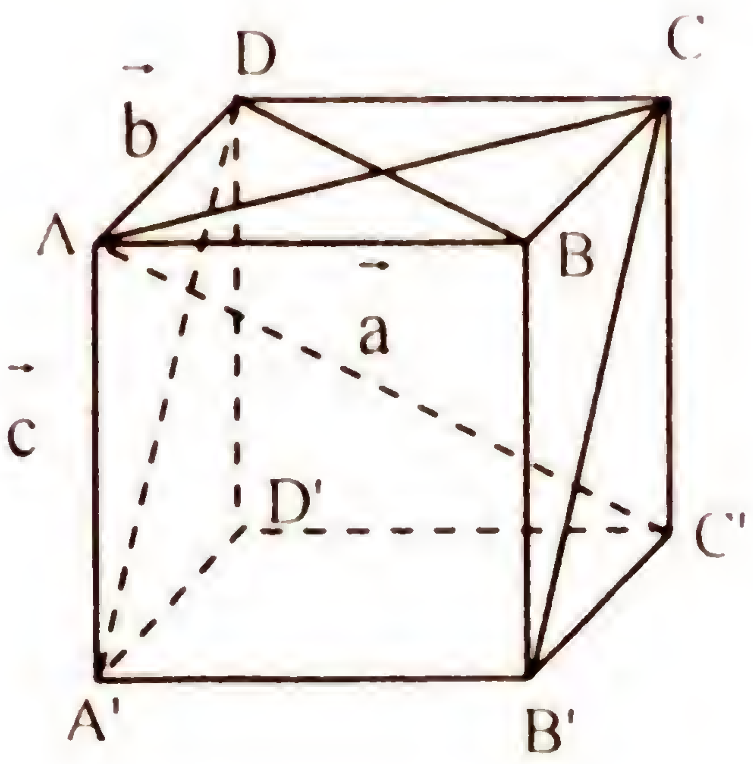
Với a, b, c là độ dài của BC, CA, AB, ta có thể xét $a \ge b \ge c$ thì

$a^2\cos\alpha = \left|c^2 - b^2\right|$ ; $b^2\cos\beta = \left|a^2 - c^2\right|$ ; $c^2\cos\gamma = \left|b^2 - a^2\right|$

Từ đó, trong trường hợp này ta có $b^2\cos\beta = a^2\cos\alpha + c^2\cos\gamma$

**Ví dụ 3:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DA', BD và AC'.

**Giải**




Gọi cạnh hình lập phương là x.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA'}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{DA'}\right|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{c} - \vec{b})}{AC.DA'}$$

$$= \frac{\vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}^2}{x.\sqrt{2}.x\sqrt{2}} = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}) = 120^\circ$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng 60°

Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. Nên:

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC'} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = (\vec{b} - \vec{a}).(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{b}.\vec{c} - \vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}$$

$$= 0 + x^2 + 0 - x^2 + 0 - 0 = 0$$

Vậy $BD \perp AC'$ nên góc giữa hai đường thẳng BD và AC' bằng 90°.

**Ví dụ 4**: Cho tứ diện ABCD trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và PQ.

**Giải**

Ta có: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$

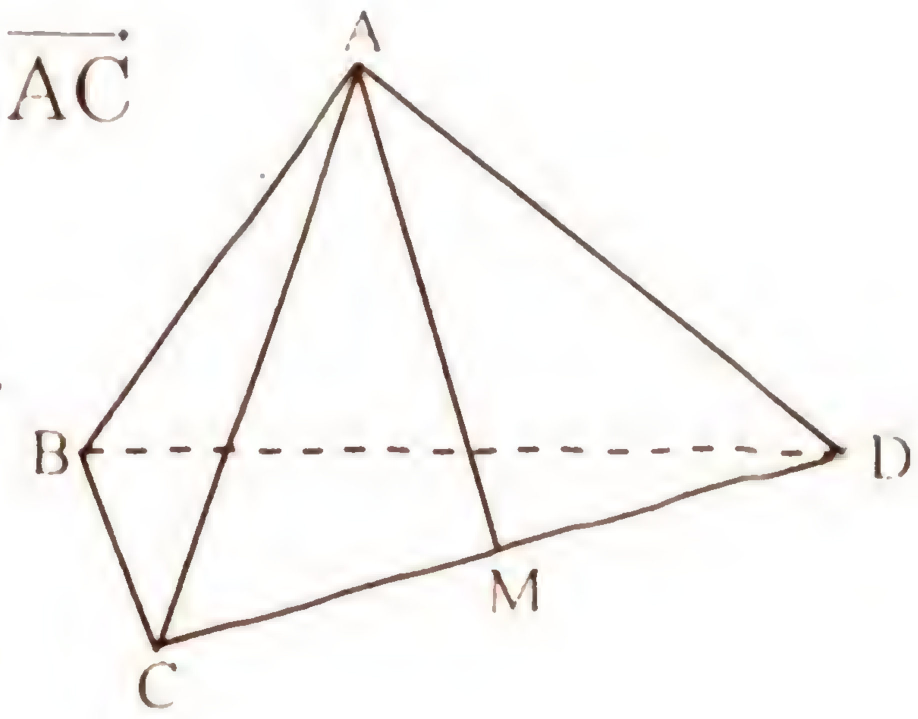
$\Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$

Vậy $PQ \perp AB$ nên góc của 2 đường thẳng bằng 90°.

**Ví dụ 5**: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M là trung điểm CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD, BC và AM.

**Giải**




Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$= a.a.\cos 60^\circ - a.a.\cos 60^\circ = 0$$

$\Rightarrow AB \perp CD$ nên góc của AB và CD bằng $90^\circ$.

Ta có:

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + a.a.\cos 60^\circ - a.a.\cos 60^\circ - a.a.\cos 60^\circ) = \frac{a^2}{4}$$

mà $BC = a$, $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}}{BC.AM} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

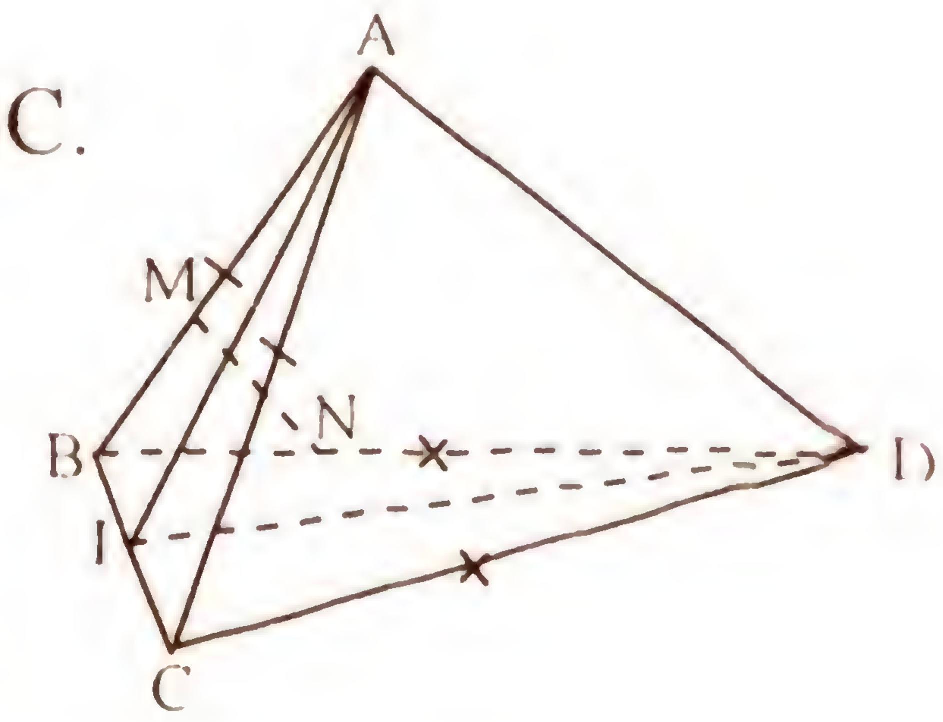
Vậy góc giữa BC và AM là góc nhọn $\alpha$ có $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

**Ví dụ 6**: Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh rằng $AD \perp CB$.

b) Gọi M và N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

**Giải**




a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$, $DI \perp BC$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$

nên $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})$

$$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{ID} = 0$$

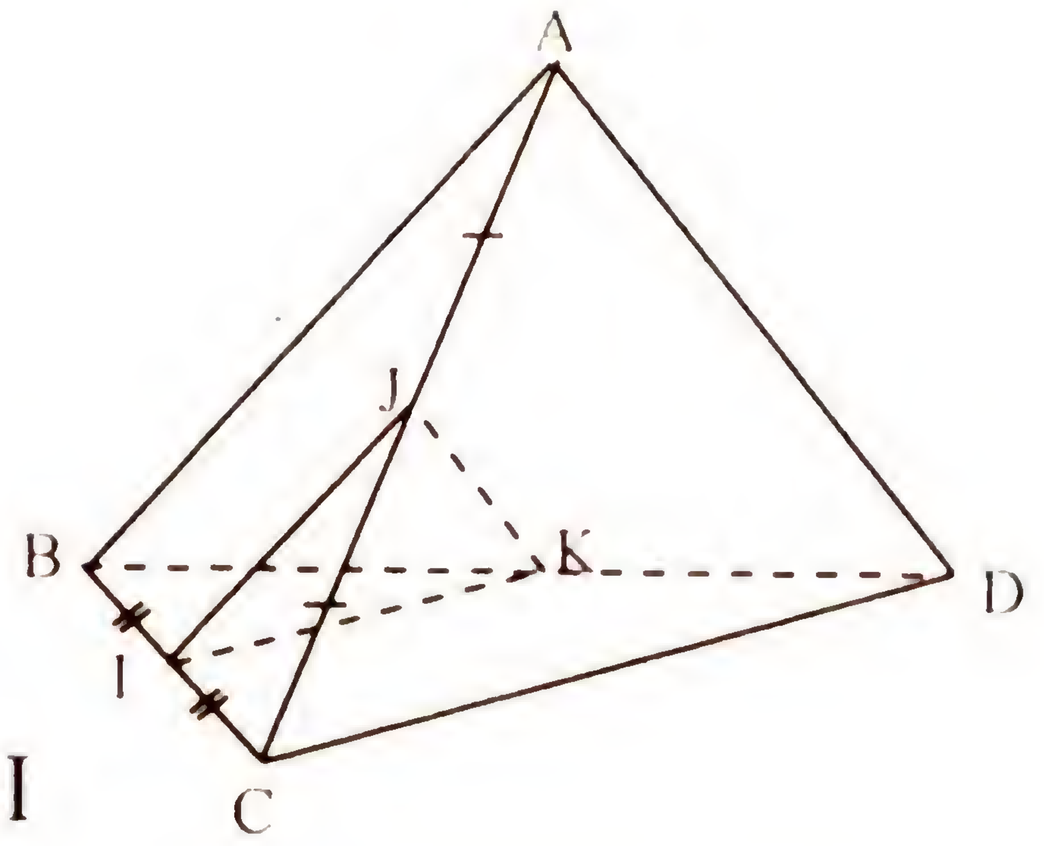
Vậy $BC \perp AD$

b) Từ giả thiết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ nên MN // AD.

Vậy góc giữa đường thẳng MN và BC bằng góc giữa đường thẳng AD và BC. Theo câu a) thì AD vuông góc với BC, nên góc giữa MN và BC bằng $90^\circ$.

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện ABCD có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD. Cho biết $JK = \frac{5}{6}AB$, tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB.

**Giải**




Ta có $IJ = \frac{1}{2}AB$, $IK = \frac{1}{2}CD = \frac{2}{3}AB$

$$IJ^2 + IK^2 = \frac{1}{4}AB^2 + \frac{4}{9}AB^2 = \frac{25}{36}AB^2$$

mà $JK^2 = \frac{25}{36}AB^2$ nên tam giác IJK vuông tại I

Vậy $JI \perp IK$. Do IJ // AB, IK // CD nên góc giữa AB và CD bằng 90°.

Mặt khác IJ // AB mà $AB \perp CD$ nên $IJ \perp CD$.

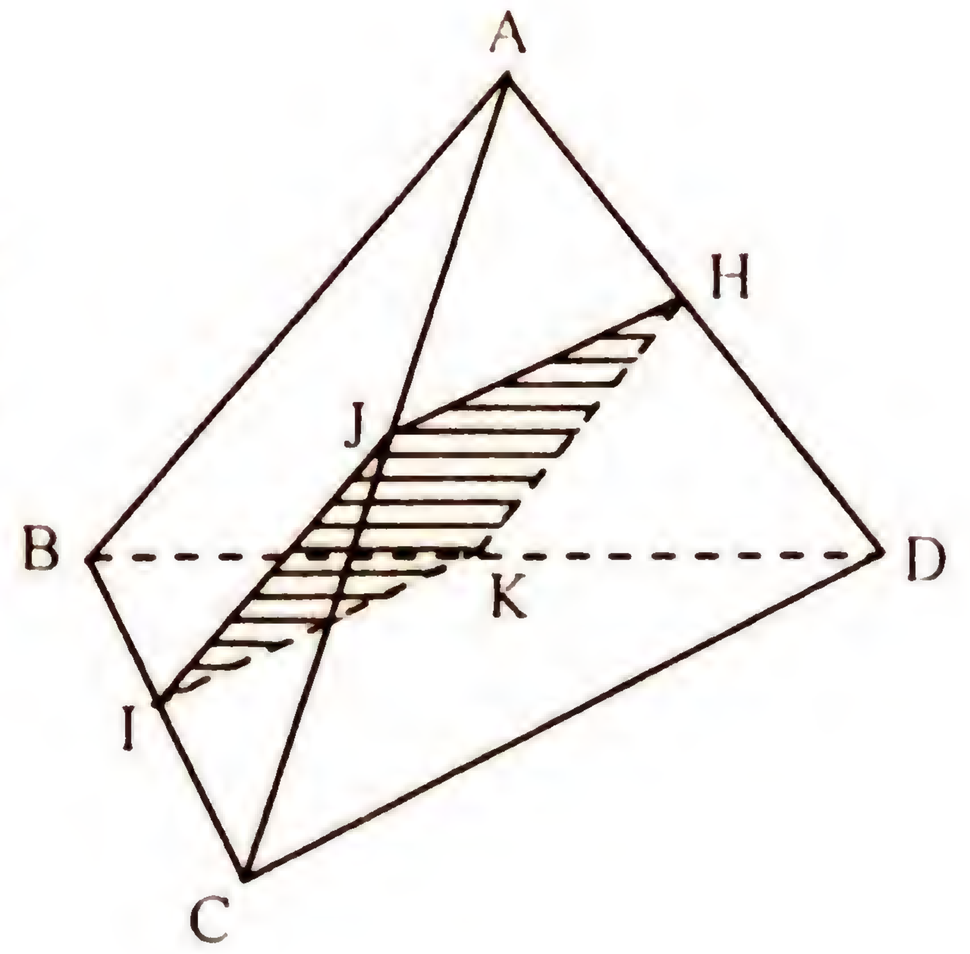
Vậy góc giữa IJ và CD bằng 90°.

**Ví dụ 8:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Hãy tính góc giữa đường thẳng AB với CD trong các trường hợp sau:

a) IJHK là hình thoi có đường chéo IH bằng $\sqrt{3}$ IJ.

b) IJHK là hình chữ nhật.

**Giải**




Góc giữa đường thẳng AB và CD bằng góc giữa đường thẳng IJ và IK, đó là góc $\widehat{JIK}$ hay $180° - \widehat{JIK}$.

a) Vì IJHK là hình thoi mà $IH = \sqrt{3}\,IJ$,

nên $JK^2 + IH^2 = 4IJ^2$

$\Rightarrow JK^2 + 3IJ^2 = 4IJ^2$

$\Rightarrow JK^2 = IJ^2$ hay $JK = IJ$

Nên JIK là tam giác đều, do đó $\widehat{JIK} = 60°$.

Vậy góc giữa AB và CD trong trường hợp này bằng 60°.

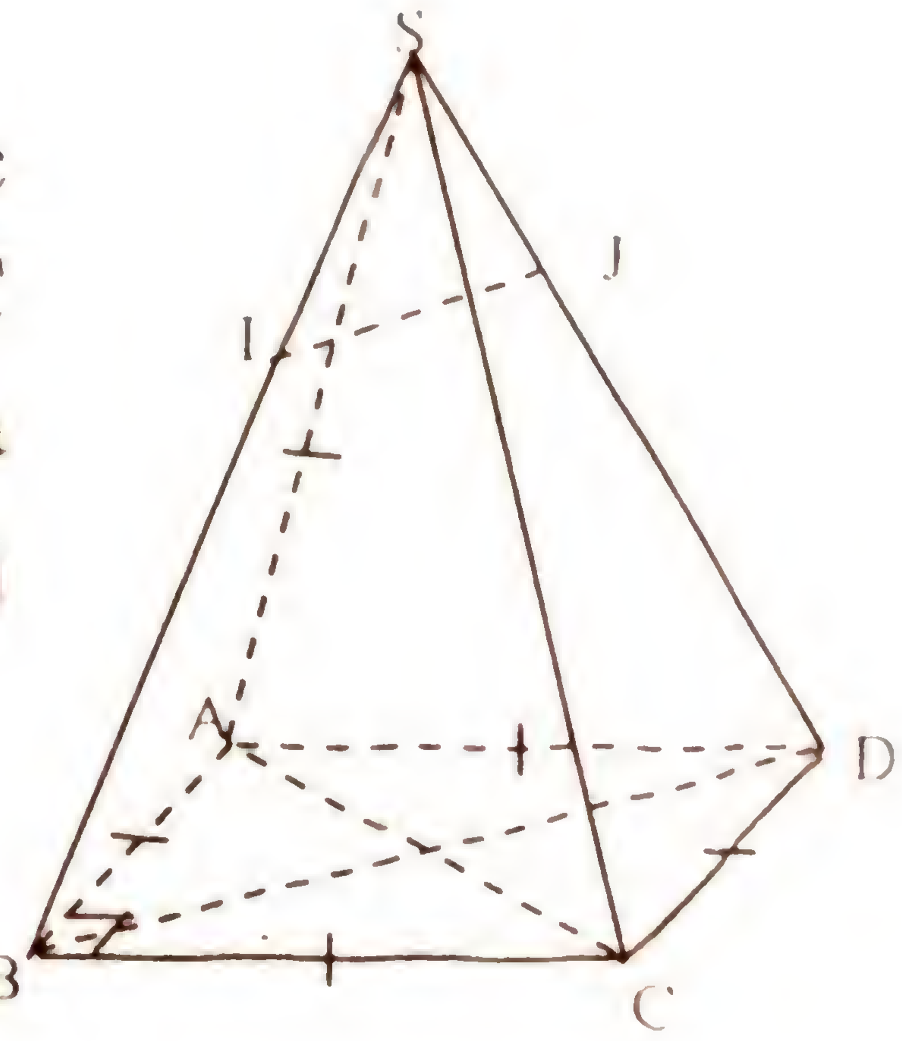
b) Khi IJHK là hình chữ nhật thì $\widehat{JIK} = 90°$. Do đó, góc giữa AB và CD bằng 90°.

**Ví dụ 9:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, cạnh bên SA = AB và SA vuông góc với BC.

a) Tính góc giữa các đường thẳng SD và BC.

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho IJ // BD. Chứng minh rằng góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

**Giải**




a) Vì BC // AD nên góc giữa SD và BC bằng góc giữa SD và AD. Từ giả thiết ta có SA ⊥ BC nên SA ⊥ AD. Mặt khác SA bằng cạnh của hình thoi ABCD, nên $\widehat{SDA} = 45°$ là góc phải tìm và góc $\widehat{SDA} = 45°$.

Vậy góc giữa BC và SD bằng 45°.

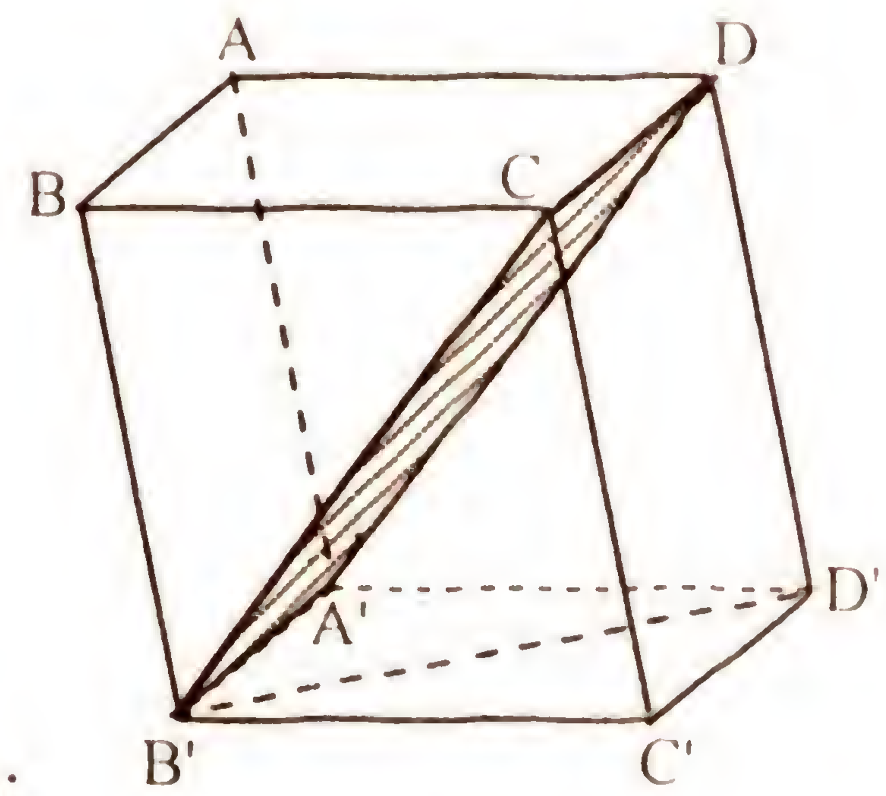
b) Do ABCD là hình thoi nên AC ⊥ BD.
Mặt khác IJ // BD nên AC ⊥ IJ.
Vậy góc giữa IJ và AC bằng 90° không đổi, không phụ thuộc vào vị trí I và J.

## DẠNG 3: TOÁN TỔNG HỢP

**Ví dụ 1**: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60°$

a) Chứng minh AC ⊥ B'D'.

b) Tính diện tích tứ giác A'B'CD.




**Giải**

a) Ta có AC // A'C' , A'C' ⊥ B'D' (do A'B'C'D' là hình thoi) nên AC ⊥ B'D'.

b) Ta có A'B'CD là hình bình hành, ngoài ra B'C = a = CD nên A'B'CD là hình thoi, hơn nữa:

$$\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

nên CB' ⊥ CD, do đó A'B'CD là hình vuông cạnh a.

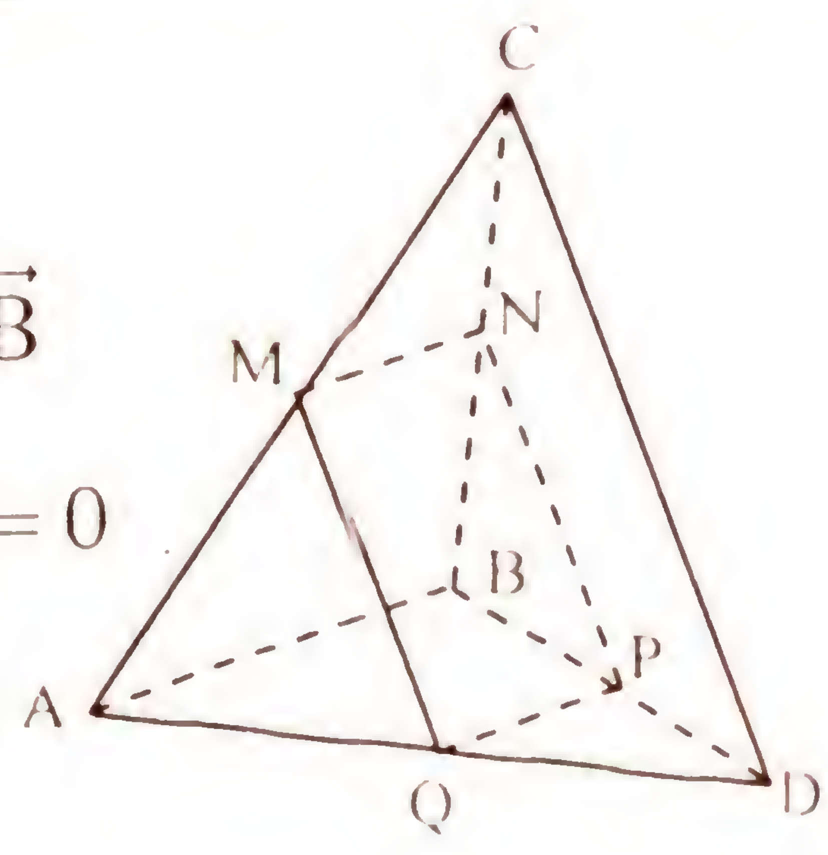
Vậy diện tích hình vuông A'B'CD là $a^2$.

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều.

a) Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC, BD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

**Giải**




a) Gọi cạnh hai tam giác đều là a.

Ta có: $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$= AD.AB.\cos 60° - AC.AB.\cos 60° = a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2} = 0$

Vậy CD ⊥ AB.

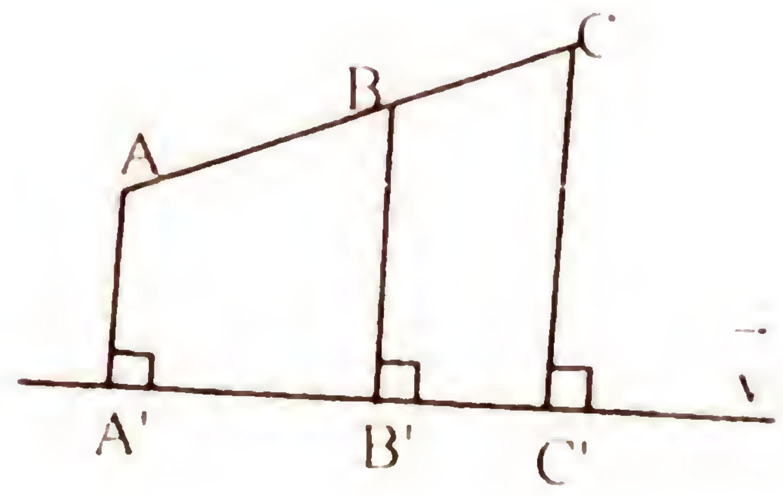
b) Ta có MN // PQ // AB và $MN = PQ = \dfrac{AB}{2}$

nên tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Vì MN // AB và NP // CD mà $AB \perp CD$ nên hình bình hành MNPQ là hình chữ nhật.

**Ví dụ 3:** Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và một đường thẳng Δ. A', B', C' là những điểm trên Δ sao cho AA', BB' CC' đều vuông góc với Δ. Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$ khi BC không vuông góc Δ.

**Giải**




Vì A, B, C thẳng hàng nên : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ ;

A', B', C' cũng thẳng hàng nên $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{B'C'}$

Gọi $\vec{v} \neq \vec{0}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì:

$\overrightarrow{AA'}.\vec{v} = \overrightarrow{BB'}.\vec{v} = \overrightarrow{CC'}.\vec{v} = 0$

Từ $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{B'C'}$ ta suy ra

$(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'})\vec{v} = k(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'})\vec{v}$ hay $\overrightarrow{AB}.\vec{v} = k'\overrightarrow{BC}.\vec{v}$

Vì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ nên từ đó suy ra $k\overrightarrow{BC}.\vec{v} = k'\overrightarrow{BC}.\vec{v}$

Ta có $\overrightarrow{BC}.\vec{v} \neq 0$ (BC không vuông góc với Δ) nên k = k', hay là $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.

**Ví dụ 4:** Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng BC và AD sao cho $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$ với k là số thực cho trước. Đặt α là góc giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$ ; β là góc giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$. Tìm mối liên hệ giữa AB và CD để α = β = 45°.

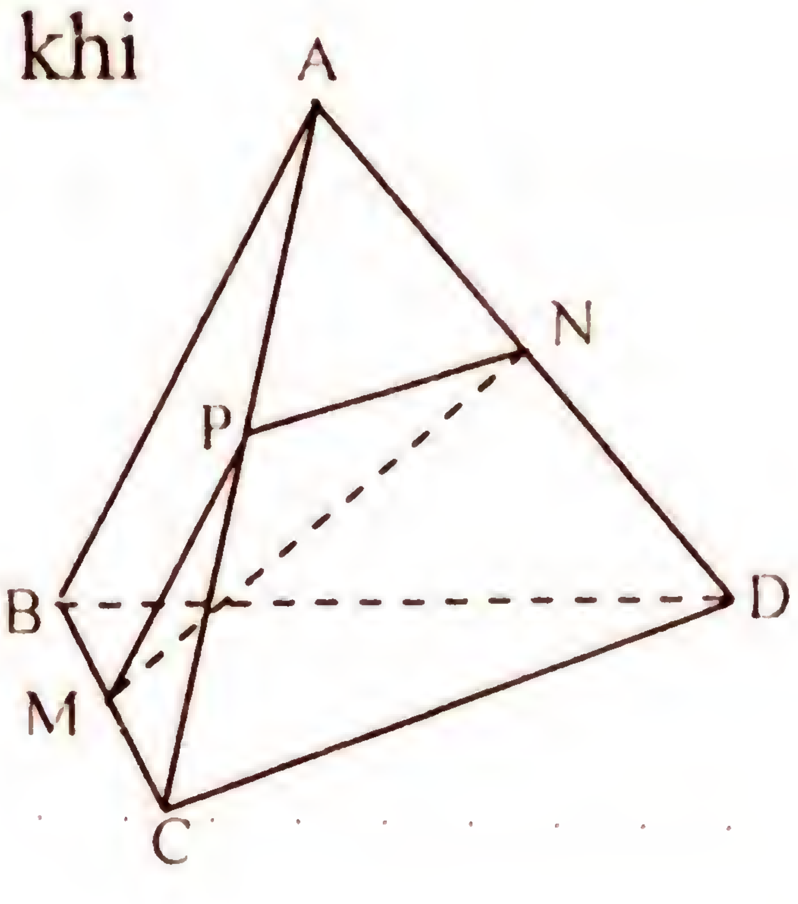
**Giải**

Vẽ MP // AB thì NP // CD. Từ đó, góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$ bằng góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$, đó là góc $\widehat{PMN}$. Góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$, đó là góc $\widehat{PNM}$.

Vậy hai góc trên bằng nhau và bằng 45° khi và chỉ khi MP = NP và $\widehat{MPN} = 90°$.

Từ đó, suy ra $\dfrac{CP}{CA}.AB = \dfrac{AP}{AC}.CD$ và $AB \perp CD$.

Mặc khác, ta có $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC} \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = |k|$.



Vậy giữa AB và CD có mối liên hệ $\frac{AB}{CD} = |k|$ và $AB \perp CD$ thì góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ với $\overrightarrow{BA}$ bằng góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ với $\overrightarrow{CD}$ và cùng bằng 45°.

**<u>Ví dụ 5:</u>** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, BÂA' $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với A'D và AC' với B'D.

b) Tính diện tích các hình A'B'CD và ACC'A'.

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' và các đường thẳng AB, AD, AA'.

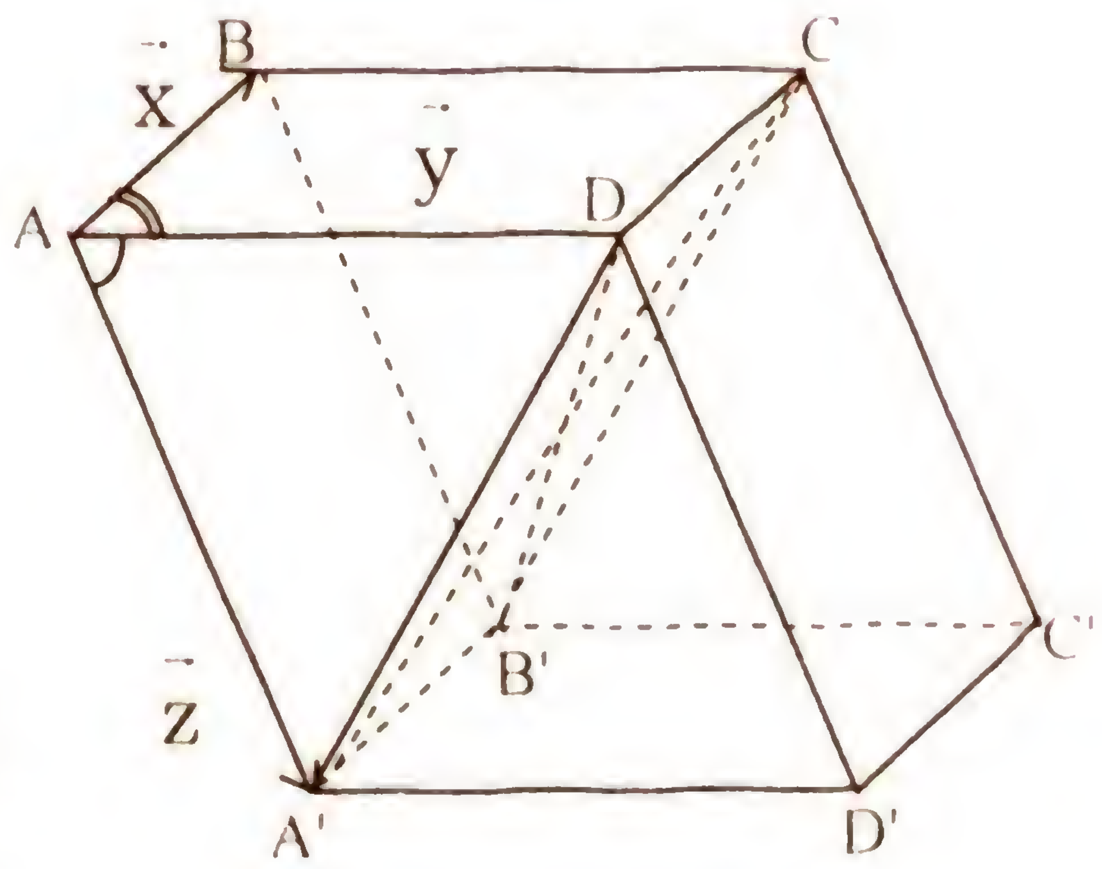
**Giải**

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z}$ thì $\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = a^2$

$$\vec{x}.\vec{y} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{y}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2}$$

$$\vec{x}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2}$$




a) Vì AB // A'B' nên góc giữa AB và A'D bằng góc A'B' và A'D, đó là góc $\widehat{DA'B'}$ hay $180^\circ - \widehat{DA'B'}$.

Đặt $\widehat{DA'B'} = \alpha$. Ta có $DB'^2 = A'D^2 + A'B'^2 - 2A'D.A'B'.\cos\alpha$

Với $A'D = a\sqrt{3}$, $A'B' = a$

$$\overrightarrow{DB'} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = 3a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 2a^2$$

nên $2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a.a\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy góc giữa A'D và AB bằng $\alpha$ mà $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = 3a^2 + a^2 - a^2 - a^2 = 2a^2$$

Ta có AB' = a và ADC'B' là hình bình hành mà AD = AB', AC' = B'D do đó ADC'B' là hình vuông nên $AC' \perp B'D$, tức là góc giữa AC' và B'D bằng 90°.

b) $S_{A'B'CD} = A'D.A'B'\sin\widehat{DA'B} = a\sqrt{3}.a.\frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy diện tích $S_{A'B'CD} = a^2\sqrt{2}$

Đặt $\widehat{ACC'} = \beta$ thì $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC.CC'\cos\beta$

hay $2a^2 = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}.a.\cos\beta$

$\Rightarrow \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy diện tích $S_{ACC'A'} = AC.CC'\sin\beta = a\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$

c) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ nên

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{x} = a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$$

hay $\left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\gamma = a^2 \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45°$

Vậy góc giữa AB và AC' bằng 45°.

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{y} = \frac{a^2}{2} + a^2 - \frac{a^2}{2} = a^2$$

hay $\left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\varphi = a^2 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45°$

Vậy góc giữa AD và AC' bằng 45°.

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{z} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + a^2 = 0$$

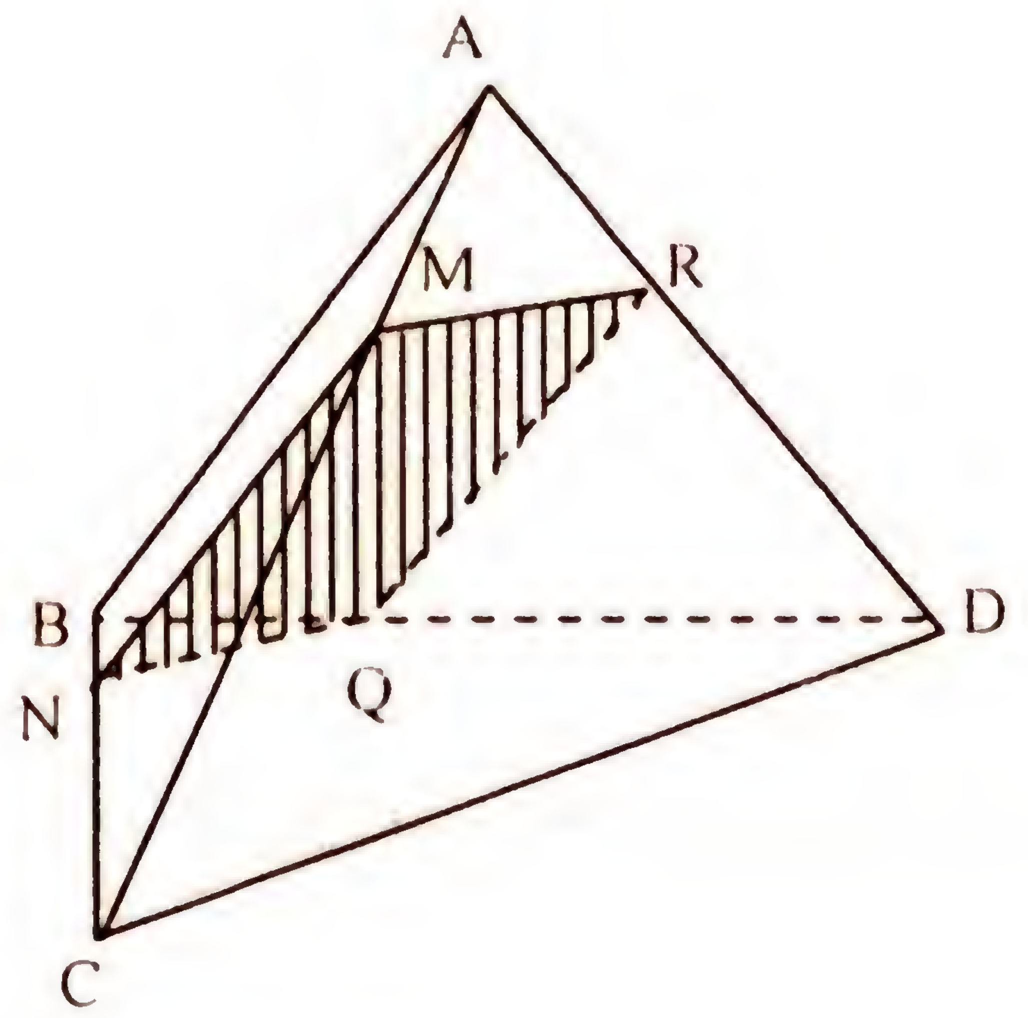
Vậy góc giữa AC' và AA' bằng 90°.

<u>**Ví dụ 6:**</u> Cho tứ diện ABCD trong đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\alpha$. Gọi M là điểm bất kì thuộc cạnh AC, đặt AM = x (0 < x < AC). Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB, CD.

a) Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng chu vi thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi AB = CD.

**Giải**




a) Thiết diện là hình bình hành MNQR.

$$S_{MNQR} = NM.NQ.\sin\widehat{MNQ}$$

Do MN // AB, NQ // CD nên góc giữa MN và NQ bằng góc giữa AB và CD nên $\sin\widehat{MNQ} = \sin\alpha$.

Ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{AC - x}{AC} \Rightarrow MN = \dfrac{AB}{AC}(AC - x)$

$NQ = MR$, $\dfrac{MR}{CD} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{x}{AC} \Rightarrow MR = \dfrac{CD}{AC}x$

nên $S_{MNQR} = \dfrac{AB.CD}{AC^2}(AC - x)x.\sin\alpha \le \dfrac{1}{4}AB.CD.\sin\alpha$

Từ đó $S_{MNQR}$ max $\Leftrightarrow AC - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{AC}{2}$.

Vậy khi M là trung điểm của AC thì diện tích thiết diện của ABCD cắt bởi (P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Gọi P là nửa chu vi thiết diện, khi đó

$$p = MN + MR = \frac{AB}{AC}(AC - x) + \frac{CD}{AC}x = \frac{CD - AB}{AC}x + AB$$

Từ đó, chu vi thiết diện không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $CD - AB = 0$ hay $AB = CD$.

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, $AD = 2AB$, mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại A. Với điểm M bất kì thuộc cạnh AD (M khác A và D), xét mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua điểm M và song song với SA, CD.

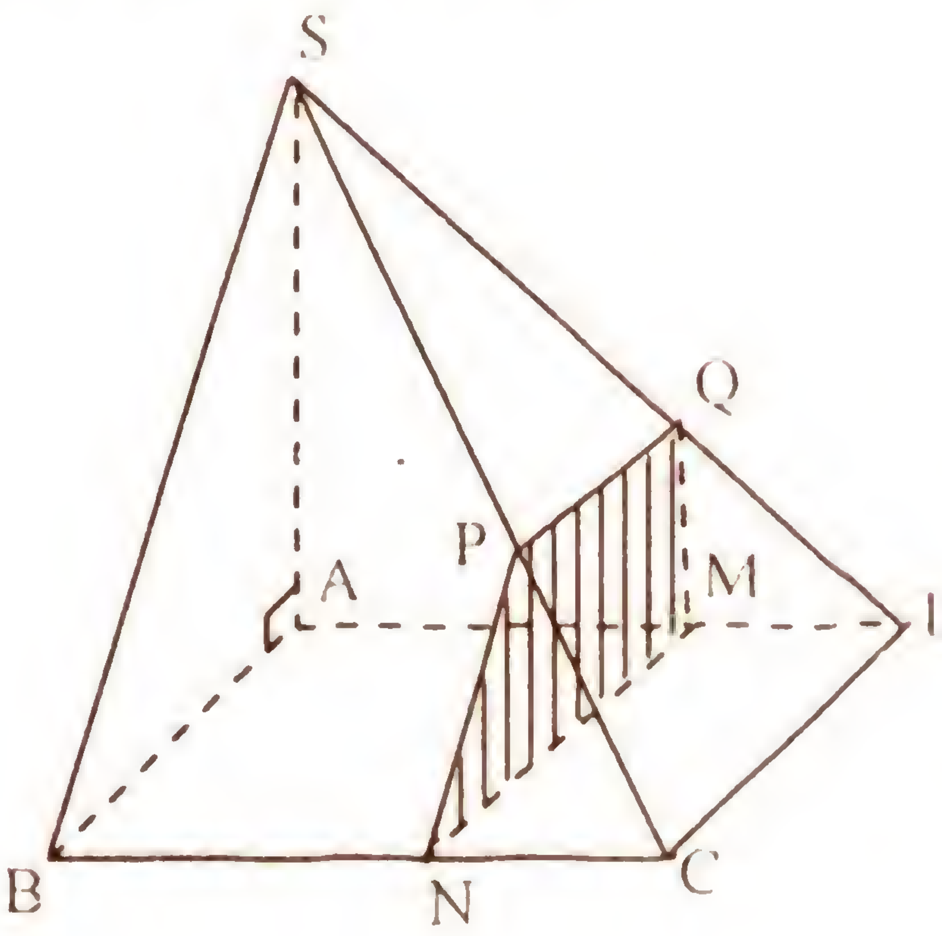
a) Thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mp$(\alpha)$ là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và b, biết $AB = a$, $SA = b$, và $MA = 2MD$.

**Giải**

a) Thiết diện là MNPQ trong đó $MN \,//\, QP \,//\, CD$, $MQ \,//\, SA$.

Do $SA \perp AB$, $AB \,//\, MN$, $MQ \,//\, SA$ nên thiết diện MNPQ là hình thang vuông tại M và Q.




b) $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MN + PQ).MQ$

Do $MA = 2MD$ nên $MQ = \dfrac{1}{3}SA = \dfrac{1}{3}b$

$PQ = \dfrac{2}{3}CD = \dfrac{2}{3}a$, $MN = a$

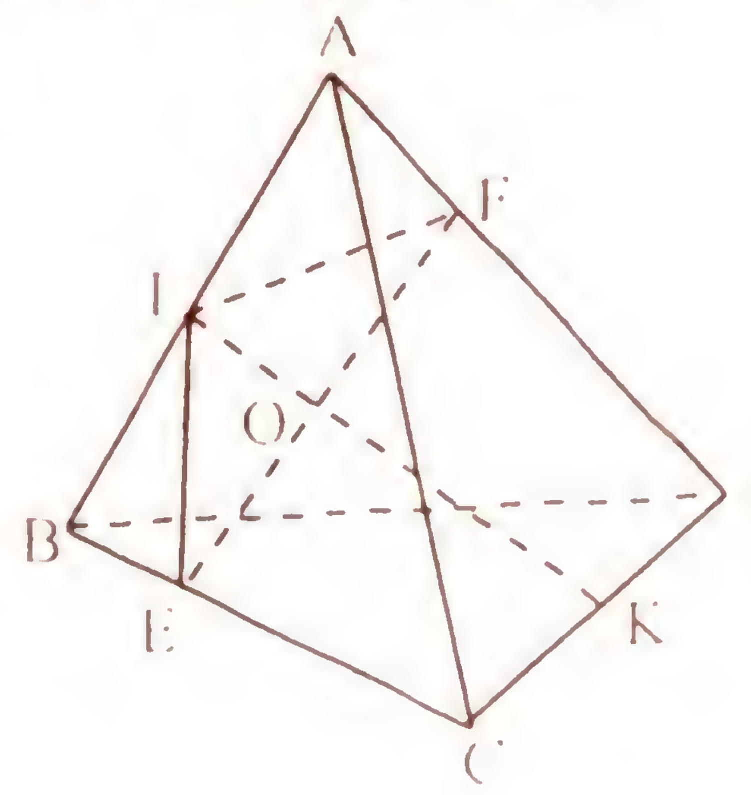
Vậy diện tích $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{2a}{3}\right).\dfrac{b}{3} = \dfrac{5ab}{18}$.

**Ví dụ 8:** Cho hình tứ diện ABCD, I và K lần lượt là các trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AD}$ là đồng phẳng.

b) Mặt phẳng (P) qua IK, cắt BC tại E, cắt AD tại F, chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{BE} = \alpha\overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}$ đồng phẳng.

c) Chứng minh nếu $IK \perp AB$ và $IK \perp CD$ thì $IK \perp EF$ tại O và O là trung điểm của EF.




**Giải**

a) Chọn hệ vectơ cơ sở : $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b}, \overrightarrow{BA} = \vec{c}$

$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Vậy $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ là đồng phẳng.

b) Ta có $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}$. Đặt $\overrightarrow{AF} = \beta.\overrightarrow{AD}$ thì

$$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = \frac{\vec{c}}{2} + \beta(\vec{b} - \vec{c})\ ;\ \overrightarrow{IK} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}$$

Ta chứng minh $\alpha = \beta$

Vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}$ đồng phẳng nên có x, y sao cho :

$$\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IE} + y\overrightarrow{IF} \Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2} = -\frac{x\vec{c}}{2} + x\alpha\vec{a} + \frac{y\vec{c}}{2} + y\beta(\vec{b} - \vec{c})$$

$$= x\alpha\vec{a} + y\beta\vec{b} + \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - y\beta\right)\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\alpha = \frac{1}{2} \\ y\beta = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{2} - y\beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \alpha = \beta \\ x\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

nên $\overrightarrow{AF} = \beta.\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\alpha\vec{a} + \vec{c} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})$

$$= \alpha(\vec{b} - \vec{a}) + (1 - \alpha)\vec{c} = \alpha\overrightarrow{CD} + (1 - \alpha)\overrightarrow{BA}$$

Vậy $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA}$ là đồng phẳng.

c) Ta có: $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IK}\left[\alpha\overrightarrow{CD} + (1 - \alpha)\overrightarrow{BA}\right]$

$$= \alpha.\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{CD} + (1 - \alpha)\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{BA} = 0$$

Vậy IK $\perp$ EF tại O.

Vì I, O, K thẳng hàng nên có số $\gamma$ sao cho: $\overrightarrow{IO} = \gamma\overrightarrow{IK}$

Vì E, O, F thẳng hàng nên có số z sao cho:

$$z\overrightarrow{IE} + (1 - z)\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IO} = \gamma\overrightarrow{IK}$$

Mà $\overrightarrow{IE} = -\frac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}$; $\quad \overrightarrow{IF} = \frac{\vec{c}}{2} + \beta(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{\vec{c}}{2} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})$

nên $z\left(-\frac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}\right) + (1 - z)\left[\frac{\vec{c}}{2} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})\right] = \gamma\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow z\alpha\vec{a} + (1-z)\alpha\vec{b} + \left(\frac{-z}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \alpha + z\alpha\right)\vec{c} = \frac{\gamma}{2}\vec{a} + \frac{\gamma}{2}\vec{b} - \frac{\gamma}{2}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\alpha = \dfrac{\gamma}{2} \\ (1-z) = \dfrac{\gamma}{2} \\ \dfrac{1}{2} - z - \alpha + z\alpha = -\dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

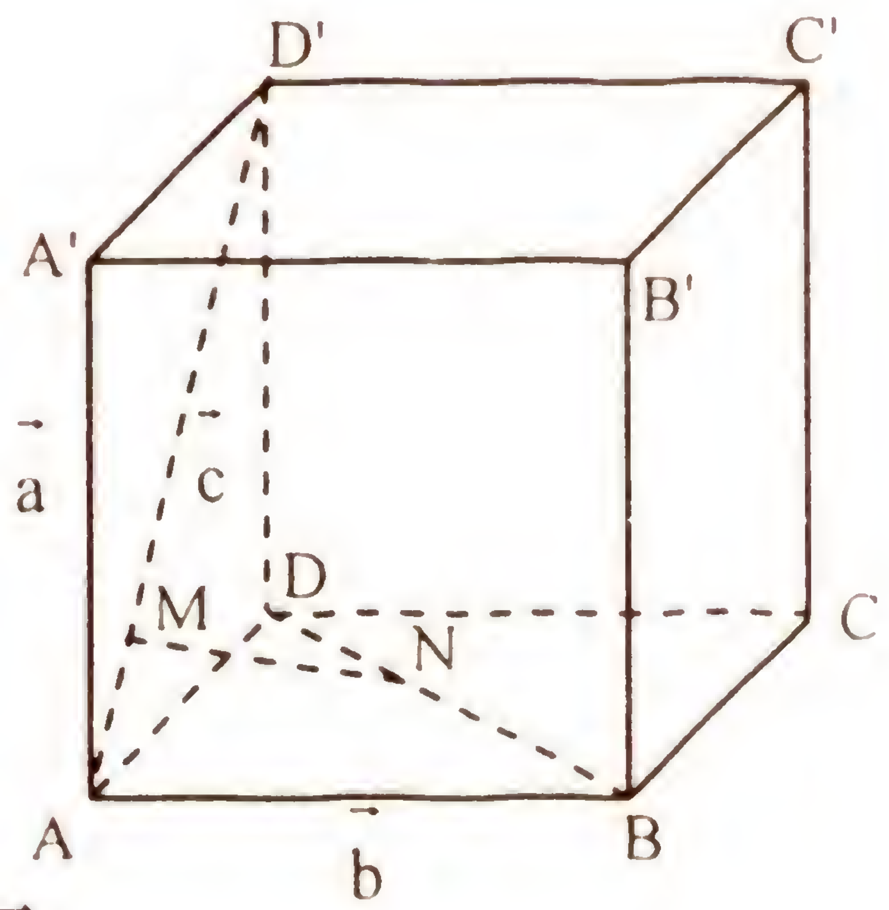
Suy ra $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) \Rightarrow$ O là trung điểm của EF.

<u>**Ví dụ 9**</u>: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt chia các đoạn thẳng AD' và DB theo cùng tỉ số k ($k \neq 0, 1$). Chứng minh:

a) MN luôn luôn song song với mp(A'BCD')

b) Nếu $k = -\frac{1}{2}$ thì MN // A'C và MN $\perp$ AD' và MN $\perp$ DB.

**Giải**




a) Đặt : $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ , $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ , $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Theo giả thiết, ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AD'} = \frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = \frac{\vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$

Suy ra : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \dfrac{\vec{c} - k\vec{b} + k\vec{a} + k\vec{c}}{1-k}$

$$= \frac{1}{1-k}\left[k(\vec{a} - \vec{b}) + (k+1)\vec{c}\right] = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA'} + \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC}$$

Do đó $\overrightarrow{MN}$ , $\overrightarrow{BA'}$ , $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng và vì MN không thuộc mp(A'BCD') nên MN // (A'BCD')

b) Khi $k = -\frac{1}{2}$ thì $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$

Và do các đường thẳng MN và A'C cắt mp(ABCD) tại các điểm khác nhau nên chúng không trùng nhau . Vậy MN // A'C.

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})(\vec{c} + \vec{a})$$

$$= \frac{1}{3}\vec{b}(\vec{c} + \vec{a}) + \frac{1}{3}(\vec{c}^2 - \vec{a}^2) = 0 \Rightarrow MN \perp AD'$$

Tương tự ta chứng minh được MN $\perp$ DB.

**Ví dụ 10**: Một tứ diện gọi là gần đều nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một.

a) Với tứ diện ABCD, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương:

(i) Tứ diện ABCD là gần đều ;

(ii) Các đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau ;

(iii) Các trọng tuyến (đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) bằng nhau ;

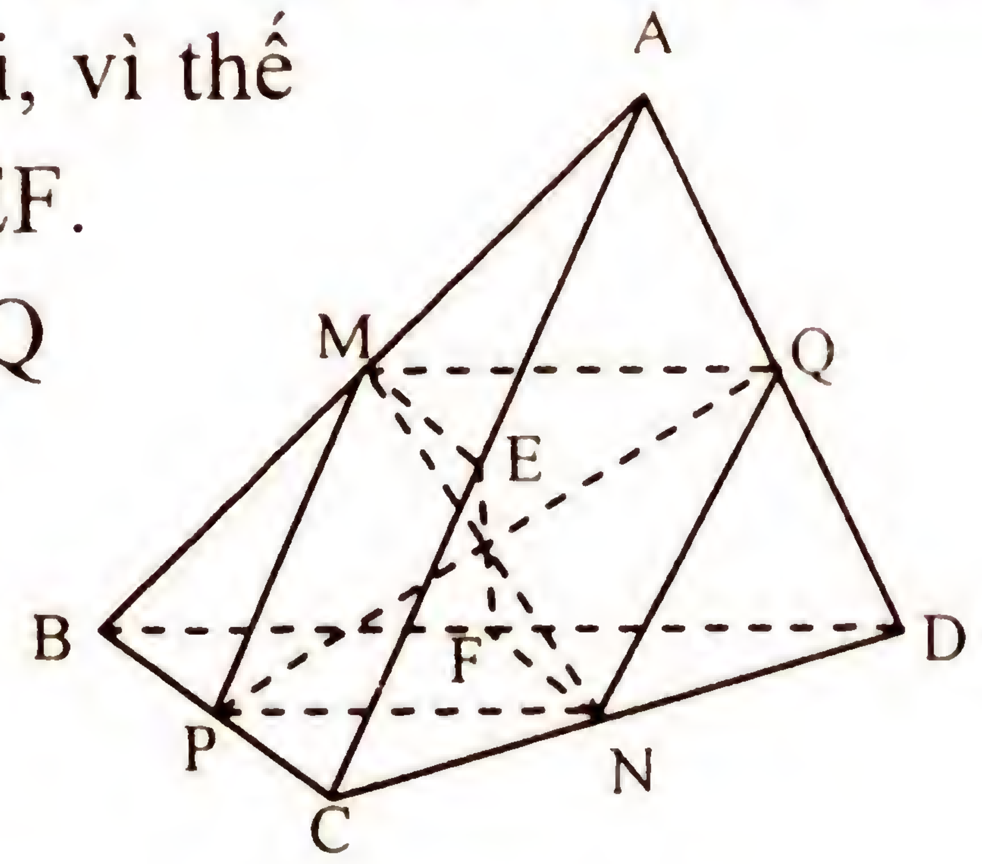
(iv) Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng $180°$ .

b) Chứng tỏ hình khai triển của tứ diện gần đều ABCD trên mp(BCD) làm thành một tam giác nhọn.

**Giải**

a) - Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.




(i) $\Rightarrow$ (ii): Do AC = BD nên MPNQ là hình thoi, vì thế $MN \perp PQ$. Tương tự ta có $MN \perp EF$, $PQ \perp EF$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): MPNQ là hình bình hành mà $MN \perp PQ$ nên MPNQ là hình thoi, tức là MP = MQ, từ đó AC = BD.

Tương tự có BC = AD, AB = CD.

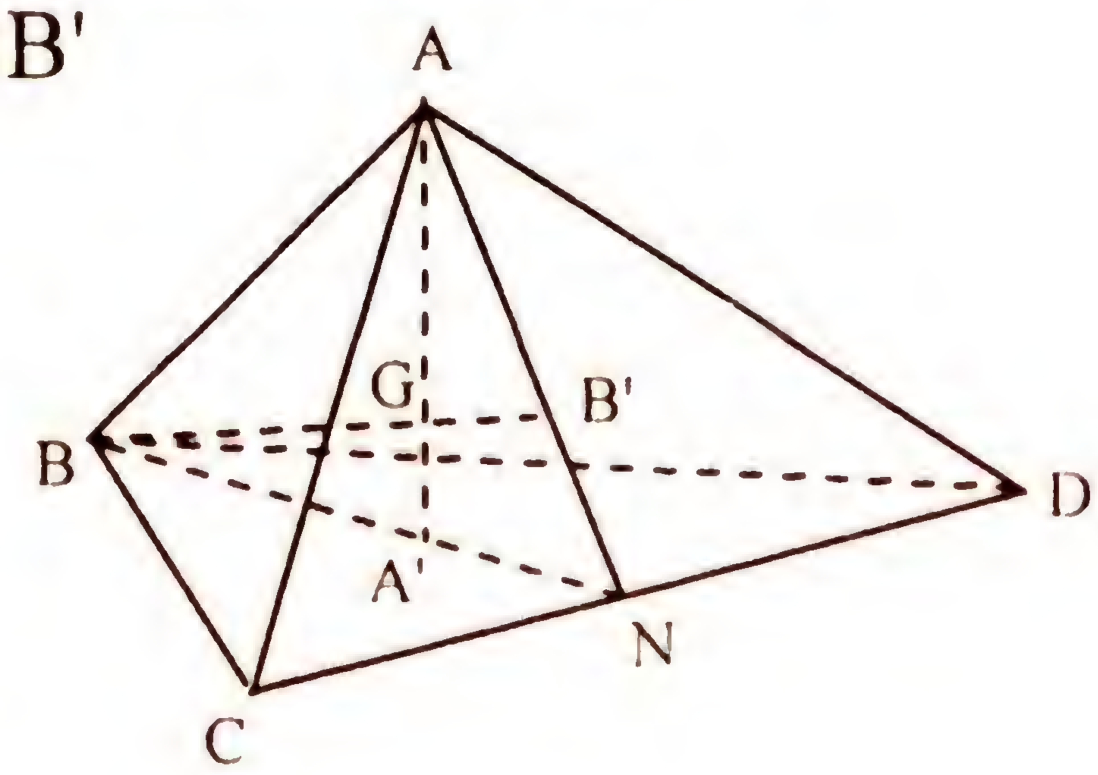
- Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

Gọi A', B' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Ta có $\Delta BCD = \Delta ADC$ (c.c.c) nên BN = AN, từ đó A'N = B'N .

Vậy $\Delta AA'N = \Delta BB'N$ (c.g.c), suy ra AA' = BB'

Tương tự ta có đpcm.




(iii) $\Rightarrow$ (i): Do giả thiết ta có BB' = AA', mà AA' cắt BB' tại G, AG = 3GA', BG = 3GB' nên BG = AG và GA' = GB'. Các tam giác BGA' và AGB' bằng nhau nên BA' = AB' , BN = AN.

mà $AC^2 + AD^2 = 2AN^2 + \dfrac{CD^2}{2}$ ; $BC^2 + BD^2 = 2BN^2 + \dfrac{CD^2}{2}$

do đó $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$ .

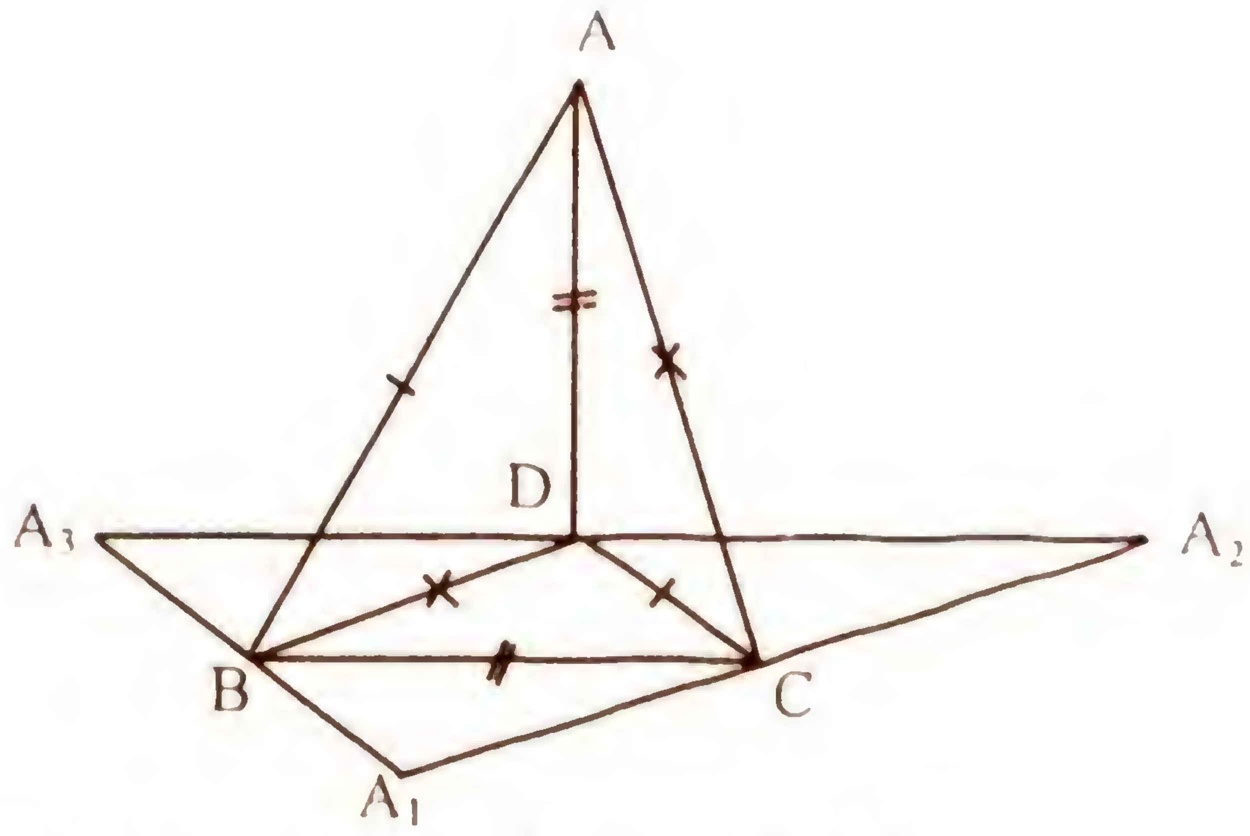
Tương tự $CA^2 + CB^2 = DA^2 + DB^2$ .

Suy ra AD = BC và AC = BD.

Tương tự ta có AB = CD.

- Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (iv)

(i) $\Rightarrow$ (iv): Do sự bằng nhau của các tam giác ABC, CDA, BAD với tam giác CDB nên tổng các góc tại B bằng 180°. Đối với các đỉnh còn lại cũng được lý luận tương tự như trên.




(iv) $\Rightarrow$ (i): Trải các mặt ABC, ACD, ABD lên mặt phẳng (BCD).

Do tổng các góc tại B cũng như tại C, tại D đều bằng 180° nên các bộ ba điểm $A_1$ , C , $A_2$ ; $A_2$ , D , $A_3$ ; $A_3$, B , $A_1$ là những bộ ba điểm thẳng hàng.

Như vậy BC, CD, BD là ba đường trung bình của tam giác $A_1A_2A_3$ .

Từ đó $BD = A_1C = CA_2 = CA$.

Tương tự ta có AD = BC , CD = AB.

b) Theo chứng minh trên thì ta có hình khai triển của tứ diện ABCD trên mặt phẳng (BCD) là tam giác $A_1A_2A_3$ .

Ta chứng minh tam giác $A_1A_2A_3$ có ba góc nhọn.

Thật vậy, xét tam giác $AA_1A_2$ có $AC = A_1C = A_2C$ nên

$AA_1 \perp AA_2$. Tương tự thì $AA_1$ , $AA_2$ , $A_1A_3$ đôi một vuông góc.

Ta có: $A_1A_2^2 = AA_1^2 + AA_2^2$ ; $A_2A_3^2 = AA_2^2 + AA_3^2$ ;

$A_3A_1^2 = AA_3^2 + AA_1{}^2$

$\Rightarrow$ $A_1A_2^2 + A_2A_3^2 > A_1A_3^2$ ; $A_2A_3^2 + A_3A_1^2 > A_1A_2^2$;

$A_3A_1^2 + A_1A_2^2 > A_2A_3^2$

Dùng định lý hàm số côsin cho tam giác $A_1A_2A_3$ $\Rightarrow$ đpcm.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**1.** Mệnh đề sau đúng hay sai:

a) $a \perp b, a \perp c \Rightarrow b // c$ b) $a \perp b, b \perp c \Rightarrow a // c$

c) $a \perp b, b // c \Rightarrow a \perp c$ d) $a \perp b \Rightarrow$ a cắt b

**ĐS:** a) S b) S c) c Đ d) S.

**2.** Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M trung điểm CD, cho AM = b.

a) Tính góc giữa AB và CD, AB và AM.

b) Tính khoảng cách từ A đến trọng tâm G của tam giác BCD.

**HD:** b) dùng bình phương vô hướng

**3.** Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC, AC.

Chứng minh $MN \perp RP$ và $MN \perp RQ$.

**4.** Cho tứ diện gần đều ABCD có các cặp cạnh đối AB = CD = 3, AC = BD = 5, AD = BC = 4. Tính các góc giữa các đường thẳng BC và AD, AC và BD, AB và CD.

**HD:** $\cos(AB, CD) = |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})|$

**5.** Hai tam giác cân ABC, DBC nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau.

Gọi M, N thuộc AB, DB sao cho $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -3\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa đường thẳng MN và BC.

**ĐS:** $90^0$

**6.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'.

a) Chứng minh : $MN \perp A'C$.

b) Chứng minh $\cos(MN, AC') = \sqrt{2}/3$.

c) Lấy E, F thuộc B'C', CD mà B'E = CF. Tính góc giữa AE và BF.

**HD:** dùng quan hệ vectơ

**7.** Cho tứ diện ABCD. Cho $g(AB, CD) = g(AC, BD) = 90^0$. Tính g( AD, BC).

**ĐS:** $90^0$

**8.** Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' các cạnh bằng a, góc $\widehat{BAD} = 90^0$, $\widehat{DAA'} = 60^0$. Tính g(AB, A'D), g(AC', B'D).

**9.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' . Gọi M, N thuộc AD', DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$; $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}, k \neq 0$. Chứng minh:

a) MN // (A'BC)     b) Nếu MN // A'C thì $MN \perp AD'$, DB.

**10.** Cho tứ diện ABCD. Xác định thiết diện cắt bởi mp (P) song song AC và BD mà có diện tích thiết diện lớn nhất.

**HD:** dùng bất đẳng thức Côsi

**11.** Cho tứ diện vuông OBCD có 3 cạnh OB, OC, OD đôi một vuông góc nhau. Chứng minh tam giác BCD nhọn.

**HD:** dùng định lý hàm số côsin

**12.** Cho 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương ở trên mặt phẳng (P). Chứng minh nếu $\vec{n}$ vuông góc chung với $\vec{a}, \vec{b}$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với mọi vectơ thuộc mặt phẳng (P)

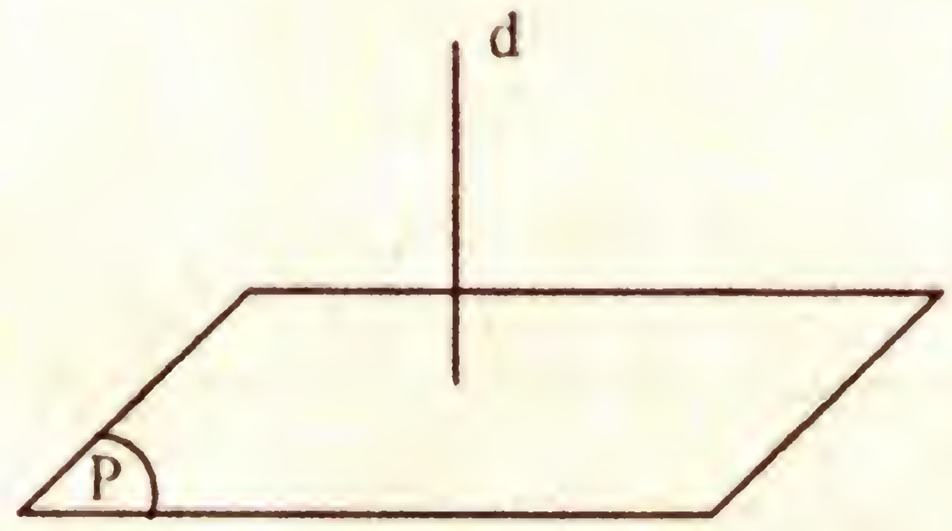
**HD:** Mọi vectơ $\vec{u}$ ở trên mặt phẳng (P) đều biểu diễn theo 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

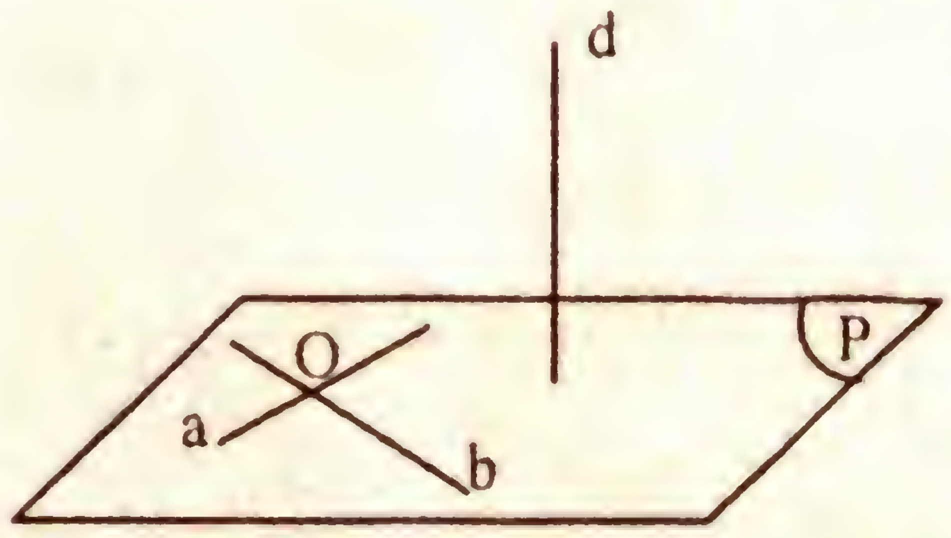
# §3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

– Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).




– Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

– Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

– Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn đó tại trung điểm.

– Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

– Trục của một tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tam giác tại tâm đường tròn ngoại tiếp.

– Trục của tam giác là tập hợp các điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác.

– Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

– Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

– Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

– Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

– Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau . Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.

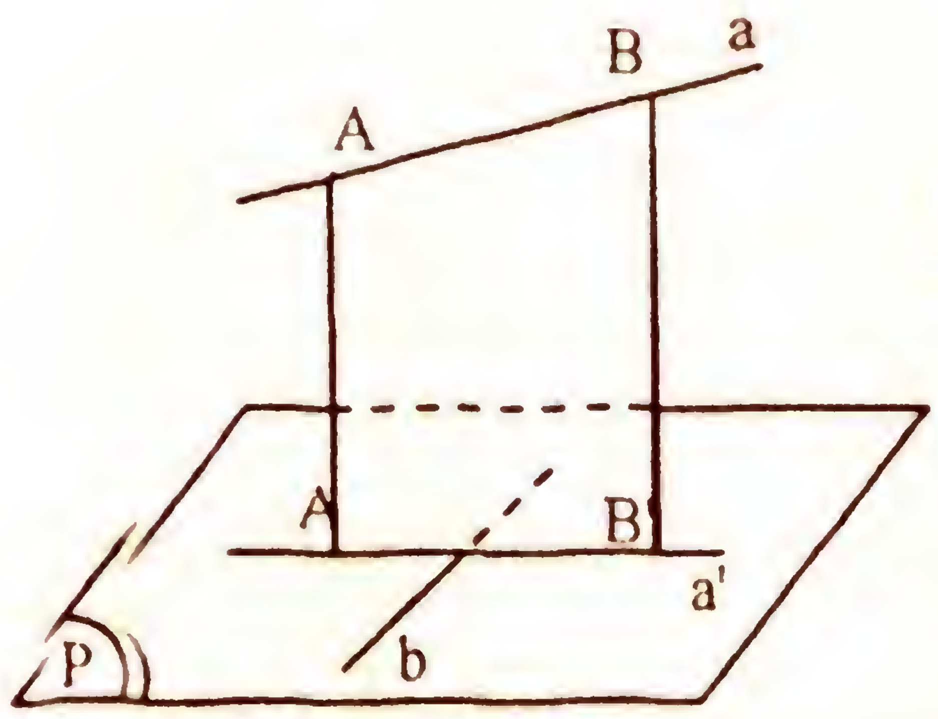
– Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

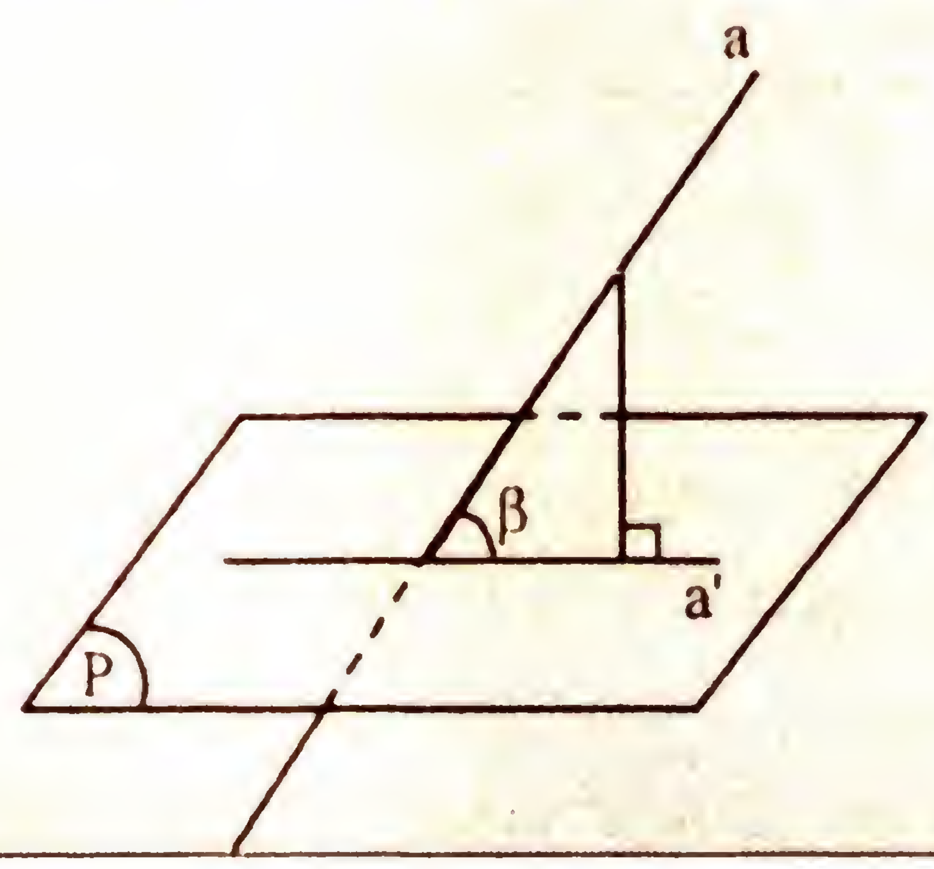
– Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

– Định lí ba đường vuông góc: Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

– Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90^\circ$.

– Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).




## B. PHẦN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

• Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mp($\alpha$) có thể chứng minh:

– d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trên ($\alpha$).

– d vuông góc với hai cạnh tam giác ABC nằm trên ($\alpha$).

– d//d' mà d' $\perp$ mp($\alpha$).

– d $\perp$ mp($\beta$) mà mp($\beta$) // mp($\alpha$).

– d là trục của tam giác ABC nằm trên mp($\alpha$) (nghĩa là chứng minh d chứa hai điểm cách đều A, B, C).

• Để chứng minh hai đường thẳng d và d' vuông góc, có thể chứng minh:

– $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$, với $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và d'.

– góc giữa chúng bằng $90^\circ$.

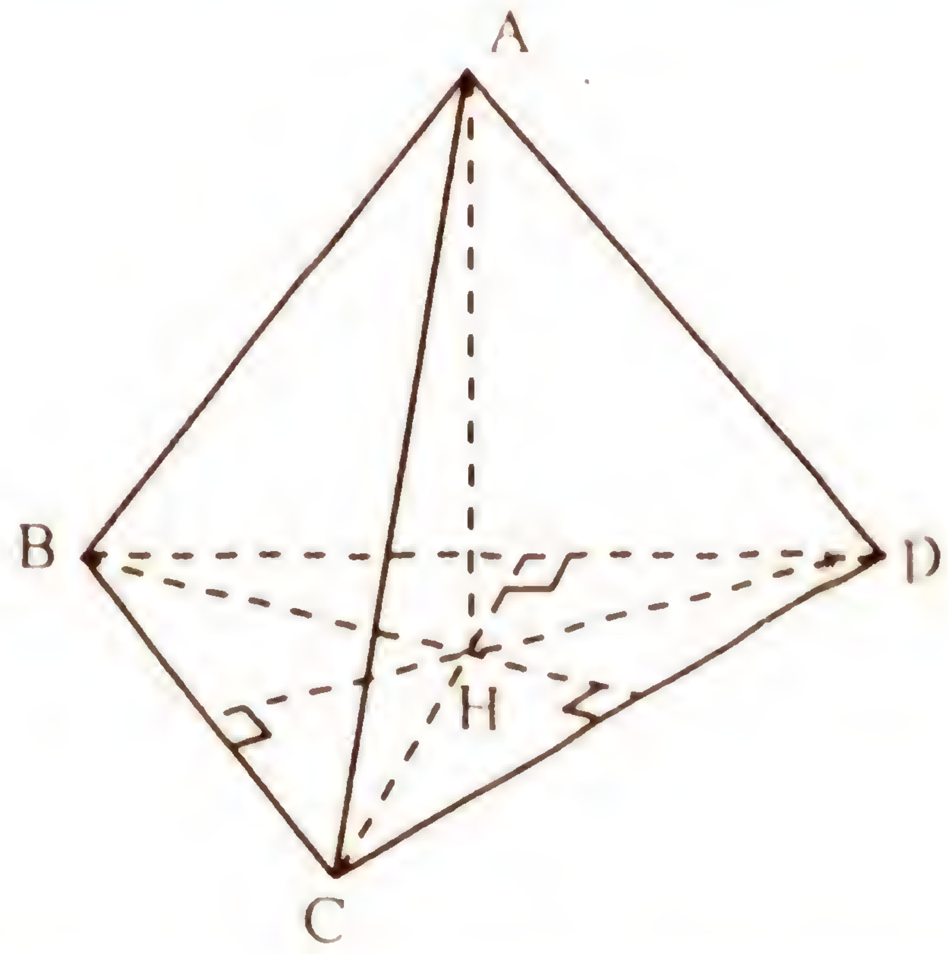
– d song song với đường thẳng Δ trung gian, còn d' vuông góc với đường thẳng Δ.

– đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

– đường thẳng này vuông góc với hình chiếu của đường thẳng kia trên một mặt phẳng.

– Đặc biệt, khi d và d' cắt nhau, đưa về bài toán vuông góc phẳng: 2 đường chéo hình thoi, trung tuyến của tam giác cân, góc có cạnh tương ứng vuông góc, định lý đảo của định lý Pitago, ...

**Ví dụ 1**: Chứng minh rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ thì $AD \perp BC$.




**Giải**

Hạ $AH \perp (BCD)$ tại H, thì $CD \perp AH$ mà $CD \perp AB$ nên $CD \perp mp(ABH)$ $\Rightarrow CD \perp BH$. Tương tự vì $BD \perp AC$ thì $BD \perp CH$.

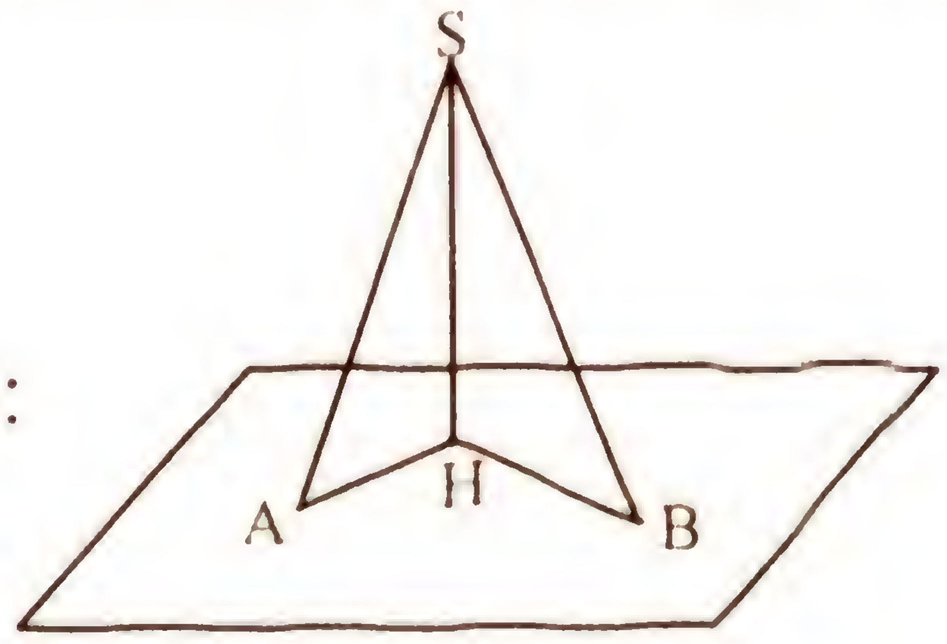
Do đó H là trực tâm của tam giác BCD nên $DH \perp BC$.

Mà $AH \perp BC$ nên $BC \perp AD$.

**Ví dụ 2**: Cho điểm S có hình chiếu trên mp(P) là H. Với điểm M bất kì trên (P) (M không trùng H), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh:

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau.

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào dài hơn thì có hình chiếu dài hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.




**Giải**

a) Vì $SH \perp mp(P) \Rightarrow SH \perp HA, HB$.

Hai tam giác vuông SHA, SHB có SH chung nên:

$SA = SB \Leftrightarrow HA = HB$: đpcm.

b) Ta có $SH^2 = SA^2 - HA^2 = SB^2 - HB^2$ nên:

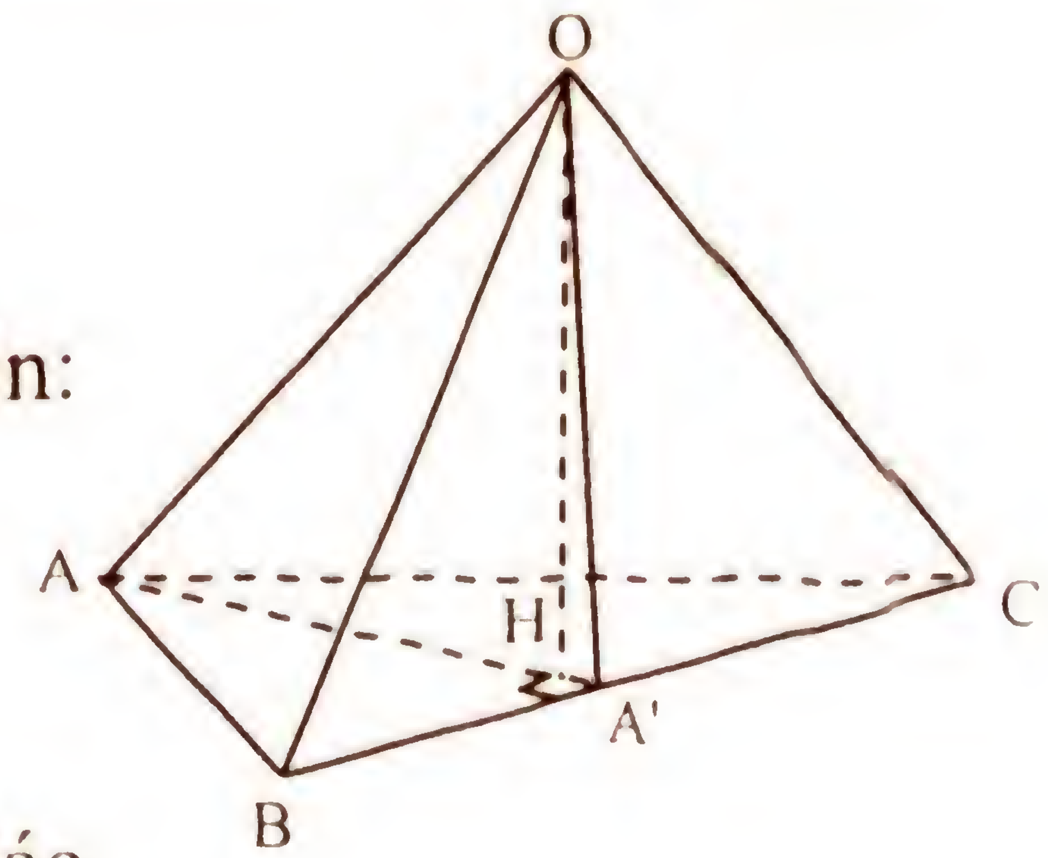
$SA > SB \Leftrightarrow HA > HB$: đpcm.

**Ví dụ 3**: Cho hình tứ diện vuông OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Chứng minh:

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn.

b) Hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC.

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.




**Giải**

a) Các tam giác OAB, OBC, OCA vuông tại O nên:

$AB^2 = OA^2 + OB^2$

$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$AC^2 = OA^2 + OC^2$

Do đó $BC^2 < AB^2 + AC^2$ nên góc B của tam giác ABC là góc nhọn. Tương tự thì tam giác ABC có cả ba góc đều nhọn.

b) Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên OH $\perp$ (ABC). Mà OA $\perp$ (OBC) nên OA $\perp$ BC do đó hình chiếu AH $\perp$ BC. Tương tự thì BH $\perp$ CA.

Vậy H là trực tâm tam giác ABC.

c) Nếu AH $\perp$ BC tại A' thì BC $\perp$ OA'. Vì OH là đường cao của tam giác vuông AOA', vuông tại O và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC, vuông tại O nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}, \quad \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

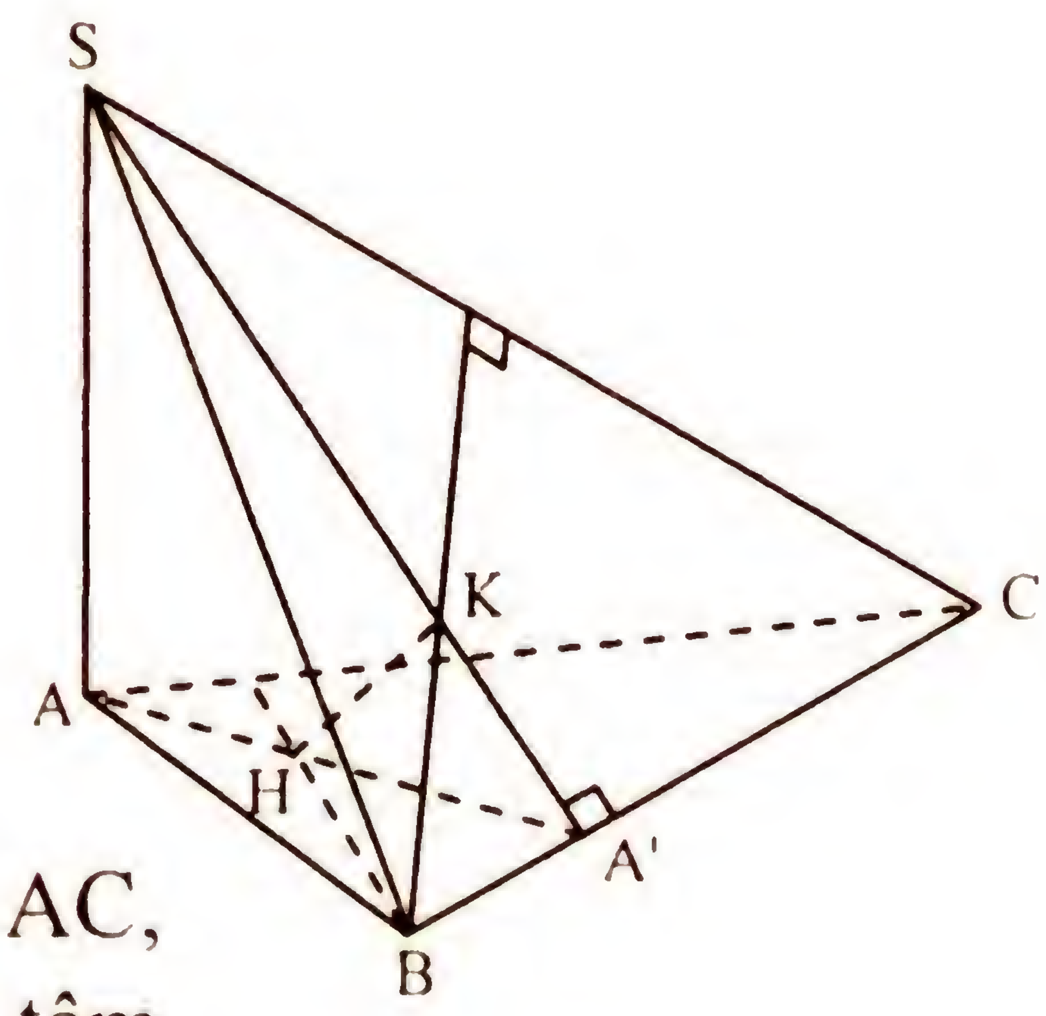
Vậy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ mp(ABC) và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.  b) SC $\perp$ mp(BHK)

c) HK $\perp$ mp(SBC).

**Giải**




a) Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC, do SA $\perp$ (ABC) nên SA' $\perp$ BC. Vì H là trực tâm tam giác ABC, K là trực tâm tam giác SBC nên H thuộc AA', K thuộc SA'. Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'.

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên BH $\perp$ AC, mà BH $\perp$ SA nên BH $\perp$ SC. Mà K là trực tâm tam giác SBC nên BK $\perp$ SC. Vậy SC $\perp$ (BHK).

c) Từ câu b) ta suy ra HK $\perp$ SC. Mà HK $\perp$ BC do BC $\perp$ (SAA').

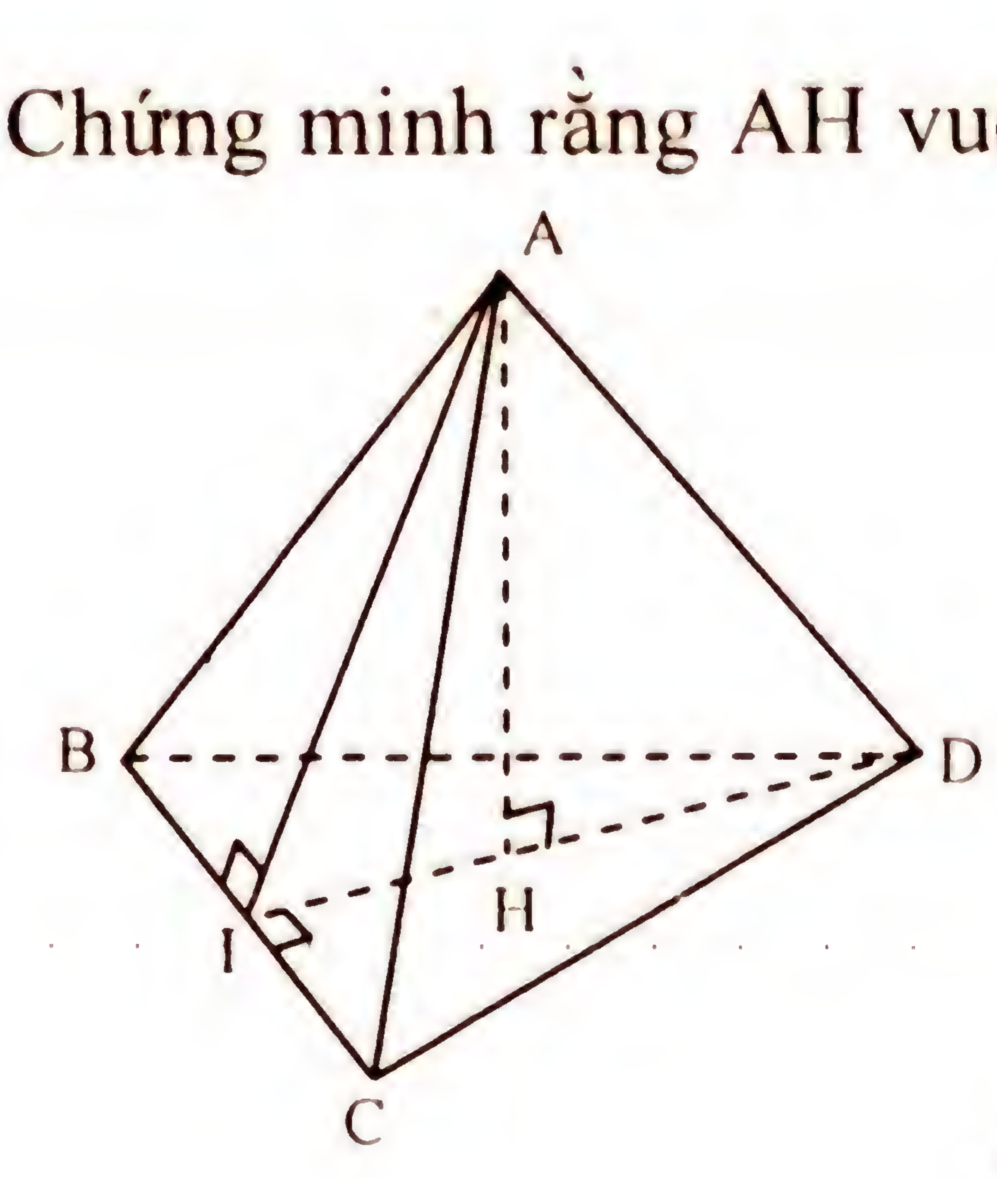
Vậy HK $\perp$ mp(SBC).

**Ví dụ 5**: Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau có chung cạnh đáy BC tạo nên tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh BC $\perp$ AD.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

**Giải**




a) Tam giác ABC cân đỉnh A và có I là trung điểm của BC nên AI $\perp$ BC. Tương tự tam giác DBC cân đỉnh D và có I là trung điểm của BC nên DI $\perp$ BC.

Ta suy ra: $BC \perp (AID)$ nên $BC \perp AD$.

b) Vì $BC \perp (AID)$ nên $BC \perp AH$.

Mặt khác $AH \perp ID$ nên ta suy ra AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

**Ví dụ 6**: Tứ diện OABC có các cạnh $OA = OB = OC = a$ và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$, $\widehat{BOC} = 90^o$.

a) Tính độ dài các cạnh còn lại của tứ diện. Từ đó suy ra tam giác ABC là tam giác vuông.

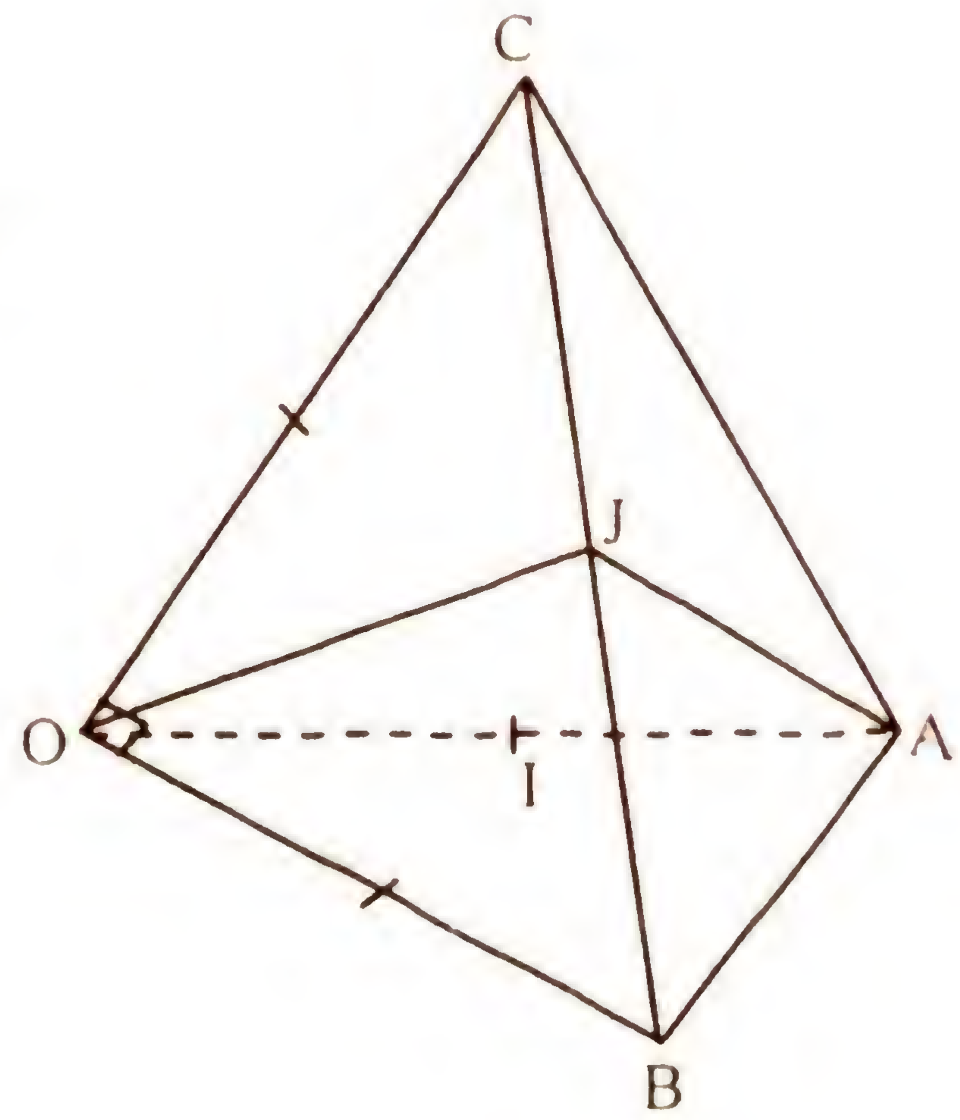
b) Chứng minh rằng $OA \perp BC$ và nếu gọi I, J lần lượt là trung điểm của OA, BC thì $IJ \perp OA$ và $IJ \perp BC$. Tính đoạn IJ.

**Giải**

a) Các tam giác AOB và AOC là tam giác đều cạnh a nên $AB = AC = a$ và $\Delta BOC$ vuông cân nên $BC = a\sqrt{2}$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2a^2$.

Do đó $\Delta ABC$ vuông cân tại A.




b) Do O và A cách đều B, C nên chúng thuộc mặt phẳng trung trực (OAIJ) của đoạn BC.

Vì vậy: $OA \perp BC$ và $IJ \perp BC$.

Ta có: $OJ = JA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $OA = a$ nên tam giác $\Delta OAJ$ vuông cân tại J và $IJ \perp OA$;

$IJ = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

**Ví dụ 7**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Gọi O, O' là tâm của 2 đáy. Chứng minh $OO' \perp mp(A'B'C'D')$.

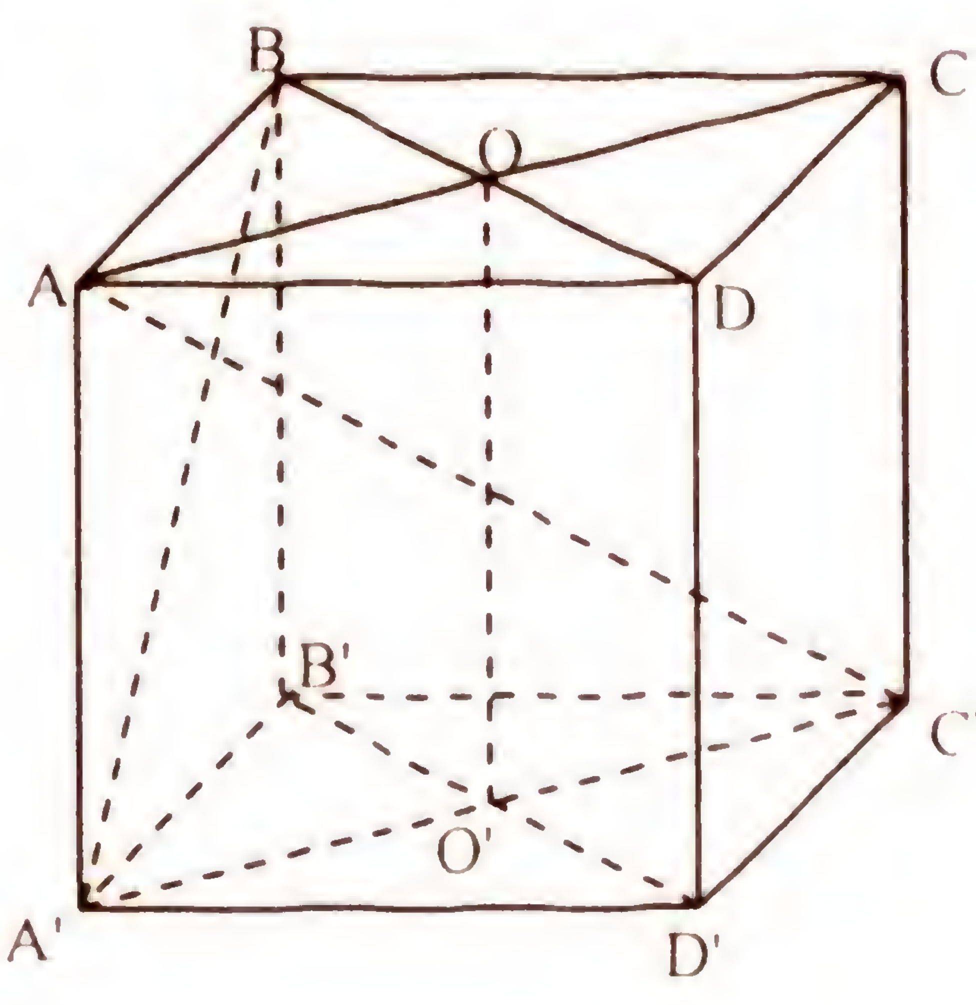
b) Chứng minh đường chéo $AC' \perp mp(A'BD)$.

**Giải**

a) Ta có $AA' \perp A'B', A'D'$ nên: $AA' \perp mp(A'B'C'D')$.

Vì O, O' là 2 tâm của 2 đáy nên: $OO' // AA'$.

Do đó $OO' \perp mp(A'B'C'D')$.

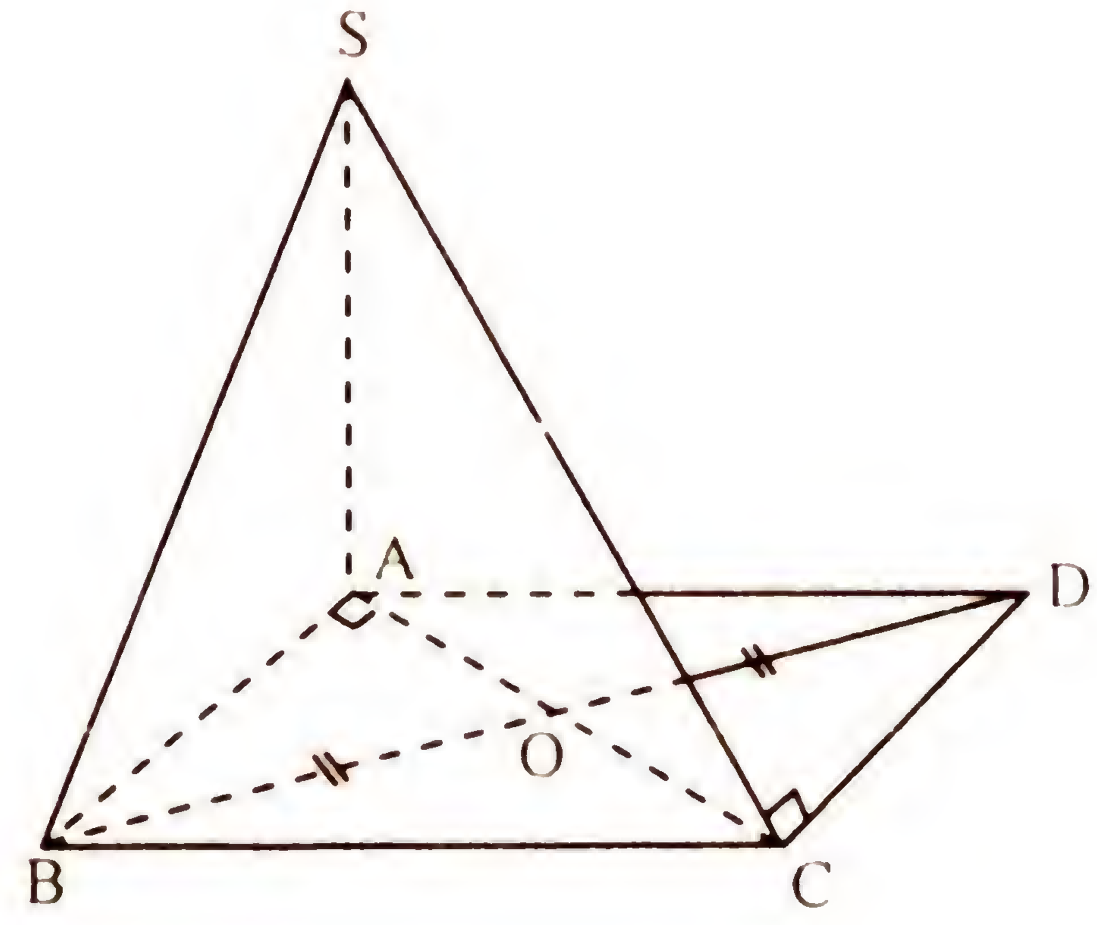



b) Ta có: $AA' = AB = AD$ và $C'A' = C'B = C'D = AB\sqrt{2}$ nên A và C' cách đều 3 đỉnh A', B, D, do đó AC' là trục của tam giác A'BD.

Vậy $AC' \perp mp(A'BD)$.

**Ví dụ 8:** Hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy là (ABC). Gọi D là điểm đối xứng của điểm B qua trung điểm O của cạnh AC.

Chứng minh $CD \perp (SCA)$.




**Giải**

Ta có $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow SA \perp DC$

Vì AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn nên tứ giác ABCD là hình bình hành và do đó AB // DC.

Vì $AB \perp AC$ nên $CD \perp CA$, mà $CD \perp SA$.

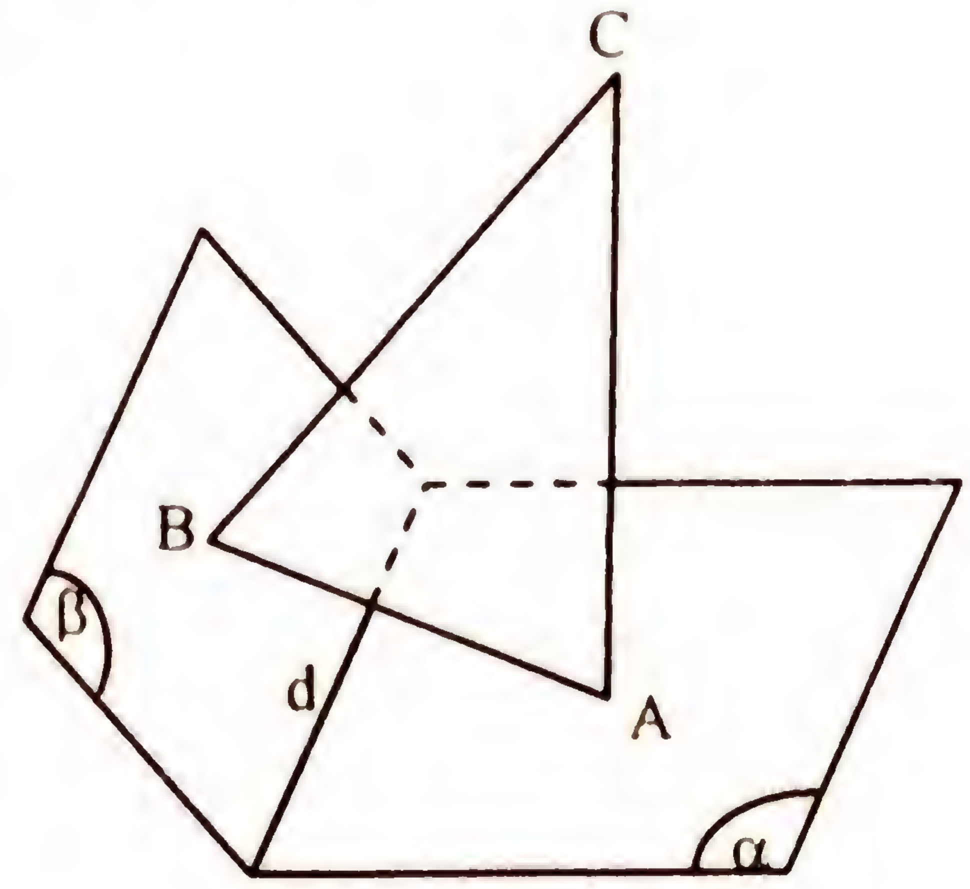
Do đó $CD \perp (SCA)$.

**Ví dụ 9**: Cho tam giác ABC. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CA tại A và $(\beta)$ là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng CB tại B. Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ cắt nhau và giao tuyến d của chúng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

**Giải**

Hai mặt phẳng hoặc trùng nhau hoặc song song hoặc cắt nhau.

– Giả sử $(\alpha)$ và $(\beta)$ trùng nhau thì từ một điểm C ta dựng được hai đường thẳng CA, CB cùng vuông góc với một mặt phẳng: vô lí.




– Giả sử $(\alpha)$ và $(\beta)$ song song thì từ $CB \perp (\beta)$ ta suy ra $CB \perp (\alpha)$. Do đó từ một điểm C ta dựng được hai đường thẳng CA, CB cùng vuông góc với $(\alpha)$: vô lí.

Vậy $(\alpha)$ và $(\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến d.

Ta có $CA \perp (\alpha)$, $d \subset (\alpha) \Rightarrow CA \perp d$.

$CB \perp (\beta)$, $d \subset (\beta)$

$\Rightarrow CB \perp d$, do đó $d \perp mp(ABC)$.

**Ví dụ 10:** Cho hình vuông ABCD, H là trung điểm của AB, K là trung điểm của AD. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại H lấy một điểm S khác với H. Chứng minh:

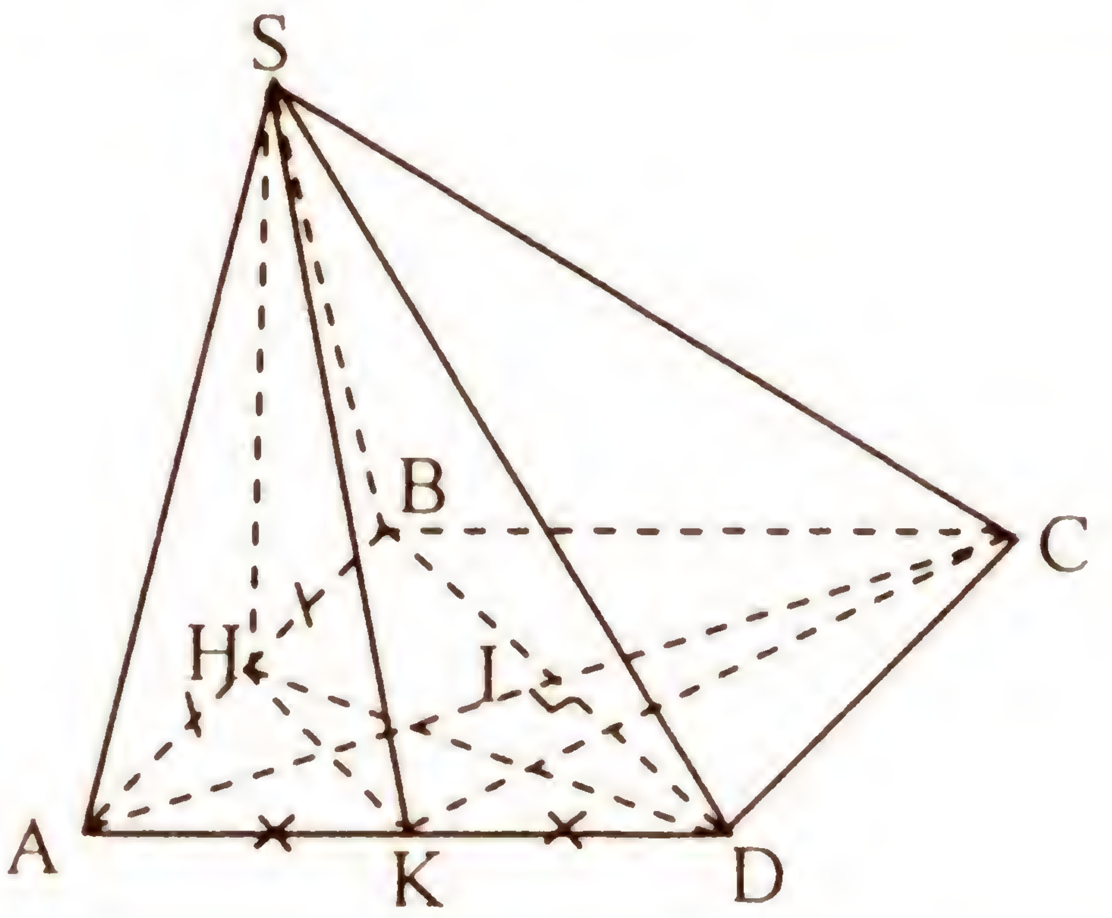
a) đường thẳng AC vuông góc với mp(SHK)

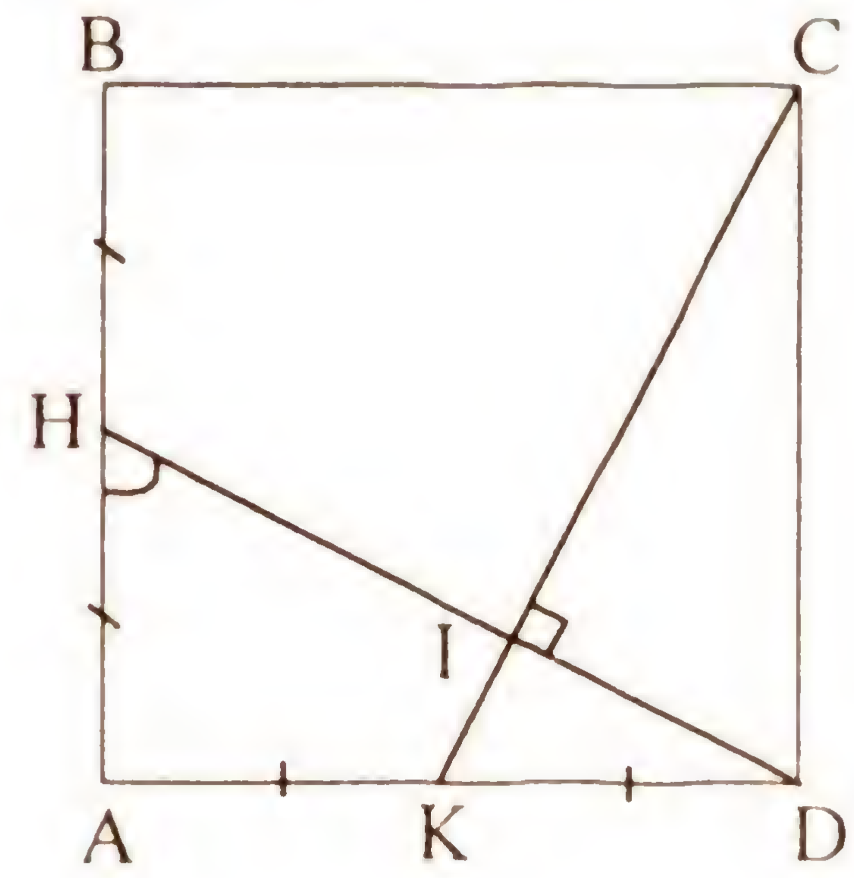
b) đường thẳng CK vuông góc với đường thẳng DH, SD.

**Giải:**

a) Theo giả thiết, ta có: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$

Ta lại có: $AC \perp BD$, $HK // BD \Rightarrow AC \perp HK$




b) Gọi I là giao điểm của DH và CK.

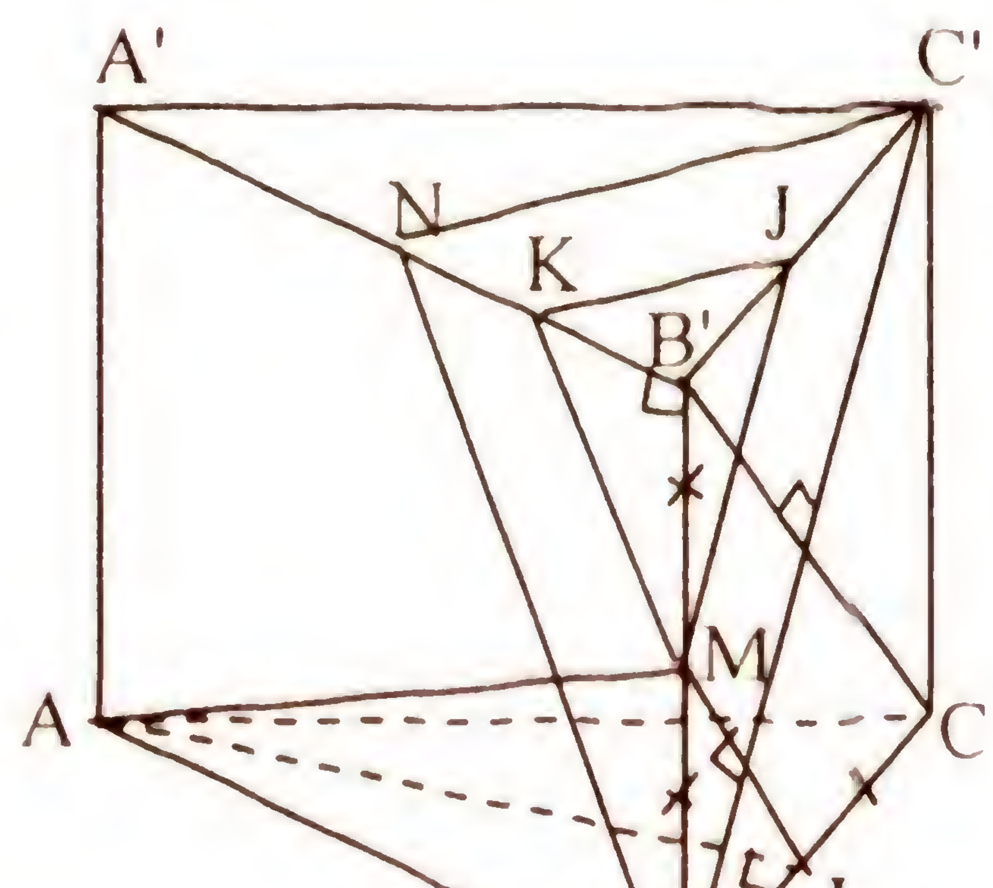
Ta có: $\Delta HAD = \Delta KDC \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{DKC} \Rightarrow \widehat{CID} = 1v$

$\Rightarrow CK \perp DH$., mặt khác, vì $SH \perp (ABCD)$ nên DH là hình chiếu của SD do đó : $CK \perp SD$.

**Ví dụ 11**: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên CC' vuông góc với đáy và CC' = a.

a) Gọi I, M là trung điểm của BC, BB'. Chứng minh AI vuông góc với BC' và BC' vuông góc với AM.

b) Gọi K là điểm trên đoạn A'B' sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của B'C'. Chứng minh AM vuông góc với KJ.




**Giải:**

a) Tam giác đều ABC nên trung tuyến $AI \perp BC$.

Theo giả thiết, ta có: $CC' \perp (ABC)$.

Do đó: $CC' \perp AI$

Suy ra: $AI \perp (BCC')$. Vậy $AI \perp BC'$

Ta đã có: $BC' \perp AI$. Mặt khác, BCC'B' là hình vuông cạnh a nên $BC' \perp CB'$. IM là đường trung bình của tam giác BCB' nên IM // CB'.

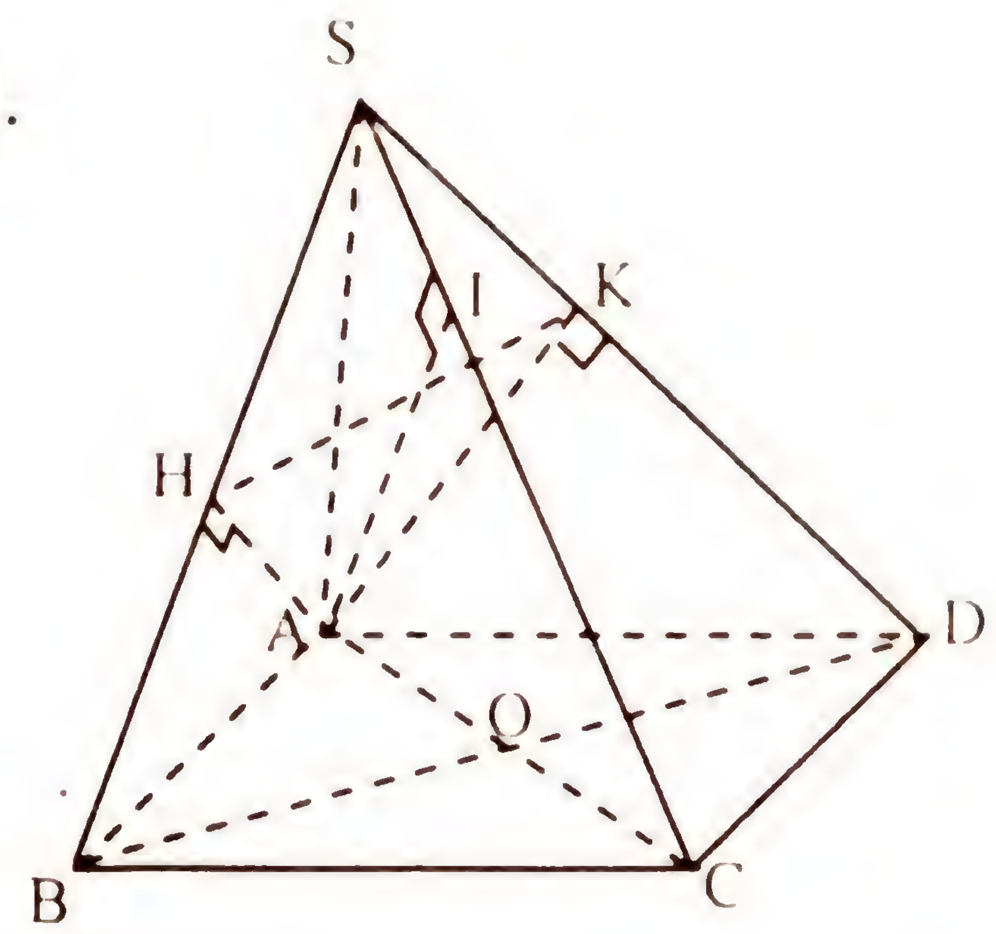
Từ đó ta có: $BC' \perp IM$. Ta suy ra: $BC' \perp (AIM)$. Vậy: $BC' \perp AM$.

b) Hình chiếu AM lên (A'B'C') là A'B'. Tam giác A'B'C' đều nên $C'N \perp A'B'$ mà JK // C'N nên $JK \perp A'B'$. Vậy $AM \perp JK$.

**Ví dụ 12:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD. Chứng minh:

a) $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$ và $BD \perp (SAC)$.

b) Bốn điểm A, H, I, K đồng phẳng và $HK \perp AI$.




**Giải**

a) Vì đáy ABCD là hình vuông nên $BC \perp BA$, mà $BC \perp SA$ do đó $BC \perp (SAB)$

Tương tự $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$.

Ta có $BD \perp AC$ vì đáy ABCD là hình vuông và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$.

b) $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$ và theo giả thiết $SB \perp AH$ ta suy ra $AH \perp (SBC)$. Vì $SC \subset (SBC)$ nên $AH \perp SC$.

Tương tự $AK \perp SC$ mà $AI \perp SC$ nên A, H, I, K nằm trong mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với SC.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$, $SA \perp AD$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau vì chúng có cạnh SA chung và AB = AD. Do đó SB = SD, SH = SK nên HK // BD.

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$ và do đó $HK \perp AI$.

**Ví dụ 13**: a) Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là tứ diện trực tâm.

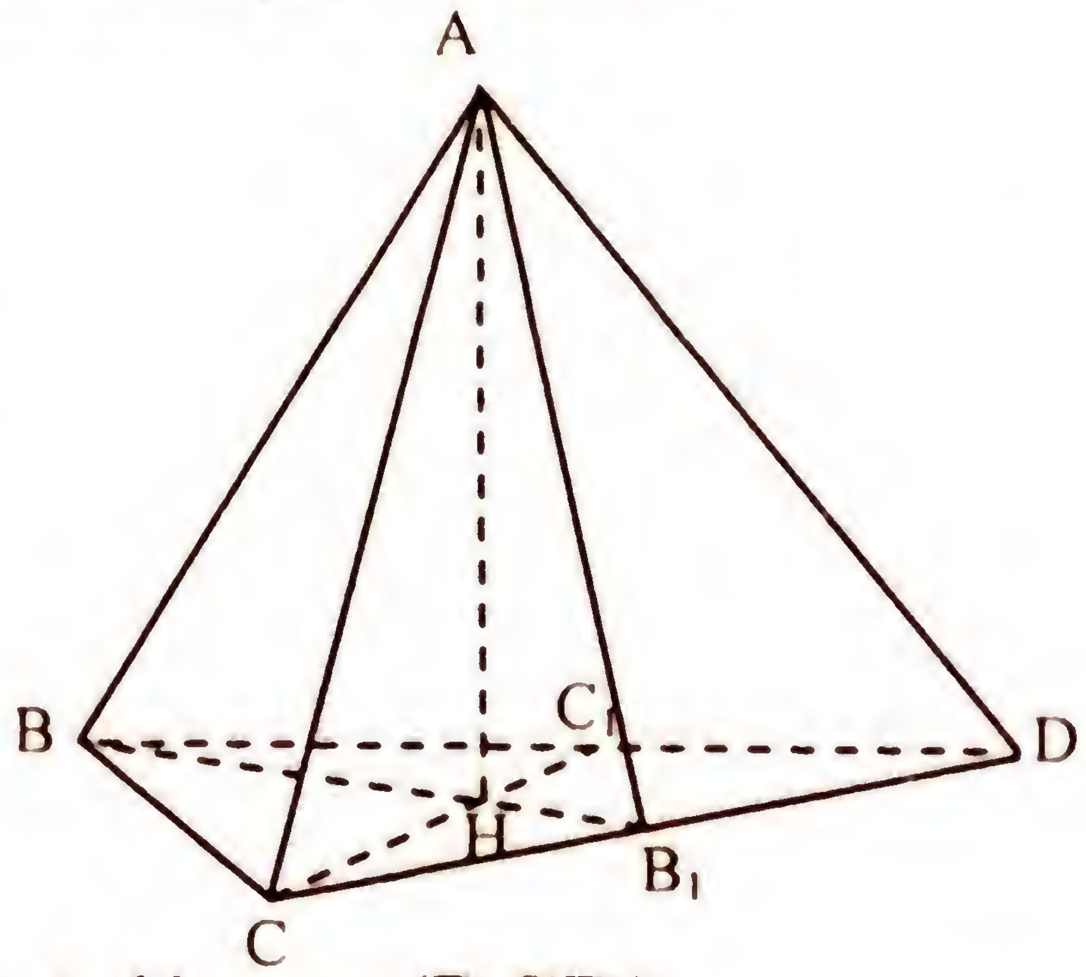
b) Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương:

(i) ABCD là tứ diện trực tâm.

(ii) Chân đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.

(iii) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

c) Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện nói trên.




**Giải**

a) Hạ đường cao $BB_1$ và $CC_1$ của tam giác BCD, gọi H là trực tâm của tam giác đó. Vì $AB \perp CD$, $BB_1 \perp CD$ nên $CD \perp AH$. Tương tự $BD \perp AH$.

Do đó $AH \perp BC$ mà $DH \perp BC$.

Do đó $BC \perp AD$.

b) Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Hạ $AA' \perp (BCD)$ thì A' là hình chiếu của A lên mp(BCD).

Nếu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ thì $BA' \perp CD$, $CA' \perp BD$.

Vậy A' là trực tâm tam giác BCD.

Ngược lại, nếu A' là trực tâm tam giác BCD thì $BA' \perp CD$, từ đó suy ra $AB \perp CD$. Tương tự, ta cũng có $AC \perp BD$.

Từ câu a) và kết quả trên, ta suy ra: đpcm.

– Chứng minh (i) ⇔ (iii). Ta có:

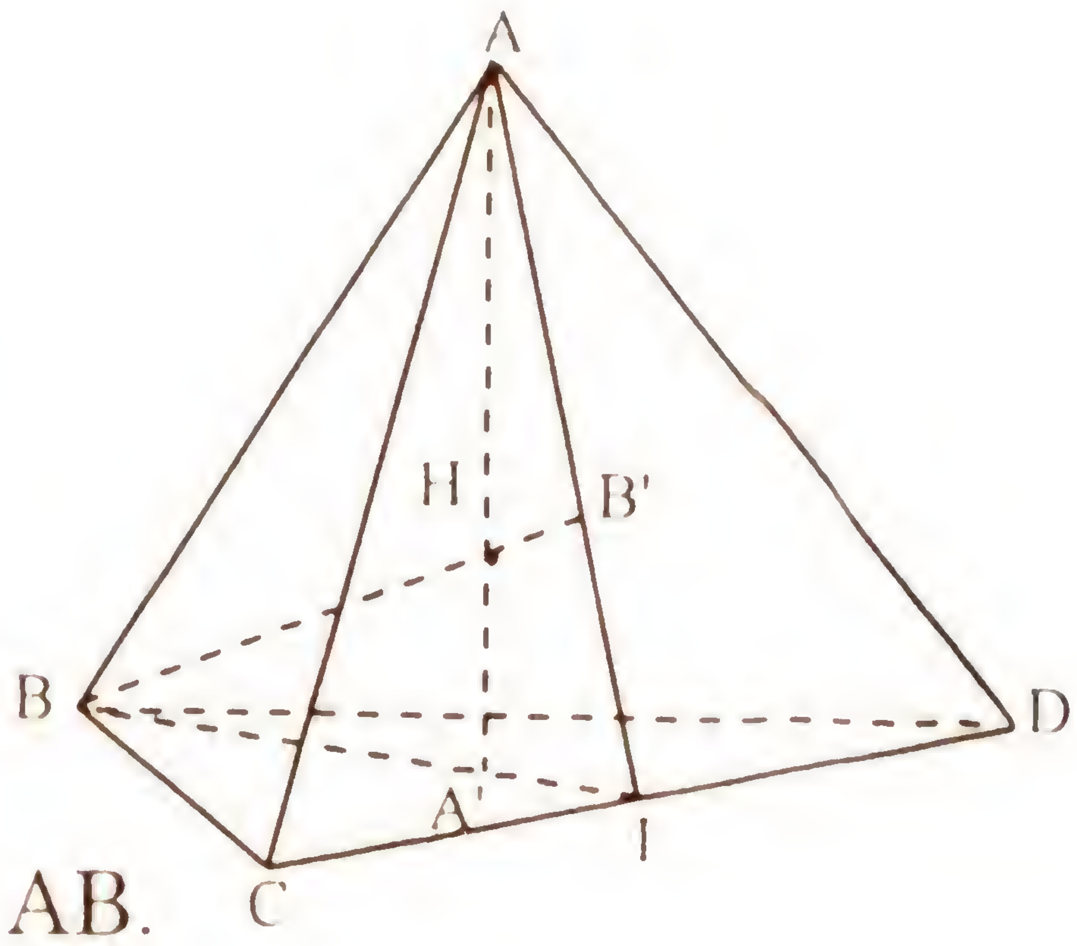
$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC.$




Tương tự: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DC \perp AB.$

$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DB \perp AC.$

c) Vì ABCD là tứ diện trực tâm nên nếu vẽ các đường cao AA' và BB' của tứ diện thì A', B' lần lượt là trực tâm của tam giác BCD và ACD. Khi đó BA', AB' và CD đồng quy tại I. Như vậy AA', BB' là hai đường cao của tam giác ABI nên AA' và BB' cắt nhau. Tương tự, nếu kẻ đường cao CC' của tứ diện thì ta cũng có AA', CC' cắt nhau và BB', CC' cắt nhau. Mặt khác, AA', BB', CC' không cùng nằm trong một mặt phẳng nên AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm.
Tương tự ta có AA', BB', DD' đồng quy (DD' là đường cao của tứ diện ABCD).
Vậy, khi ABCD là tứ diện trực tâm thì các đường cao AA', BB', CC', DD' đồng quy tại một điểm.

## DẠNG 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng d và mặt phẳng $(\alpha)$:

– Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(\alpha)$ bằng $90^o$.

– Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ thì góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên $(\alpha)$ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(\alpha)$.

Chú ý:

– Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá $90^o$.

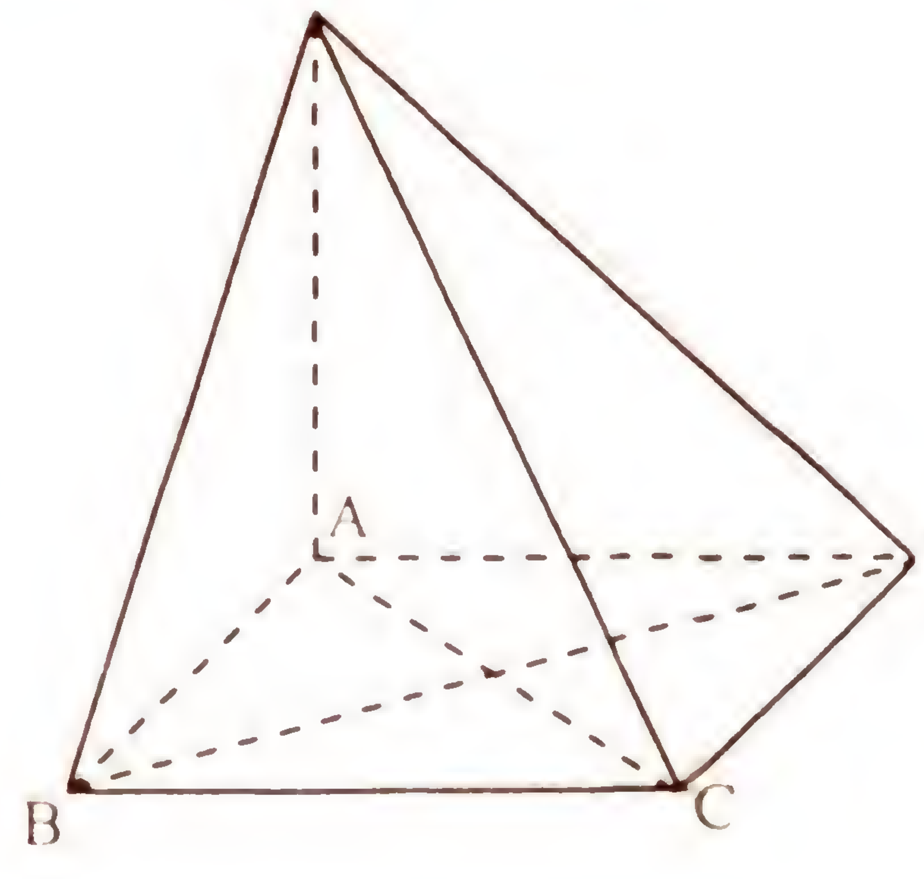
– Việc tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng được quy về tính góc giữa hai đường thẳng. Góc này, các phương pháp tính đã nêu ở phần trước, tuy nhiên cần xác định được đường thẳng hình chiếu lên mặt phẳng.

**Ví dụ 1**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, $SA \perp mp(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa:

a) Đường thẳng SC, SD với mp(ABCD).

b) Đường thẳng BD với mp(SAC).

**Giải**




a) Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABCD) nên góc giữa đường thẳng SC với mp(ABCD) là góc giữa đường thẳng SC

và AC. Tam giác vuông SAC có $AC = a\sqrt{2}$,

$SA = a\sqrt{2}$ nên là tam giác vuông cân tại A.

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) bằng $45^o$.

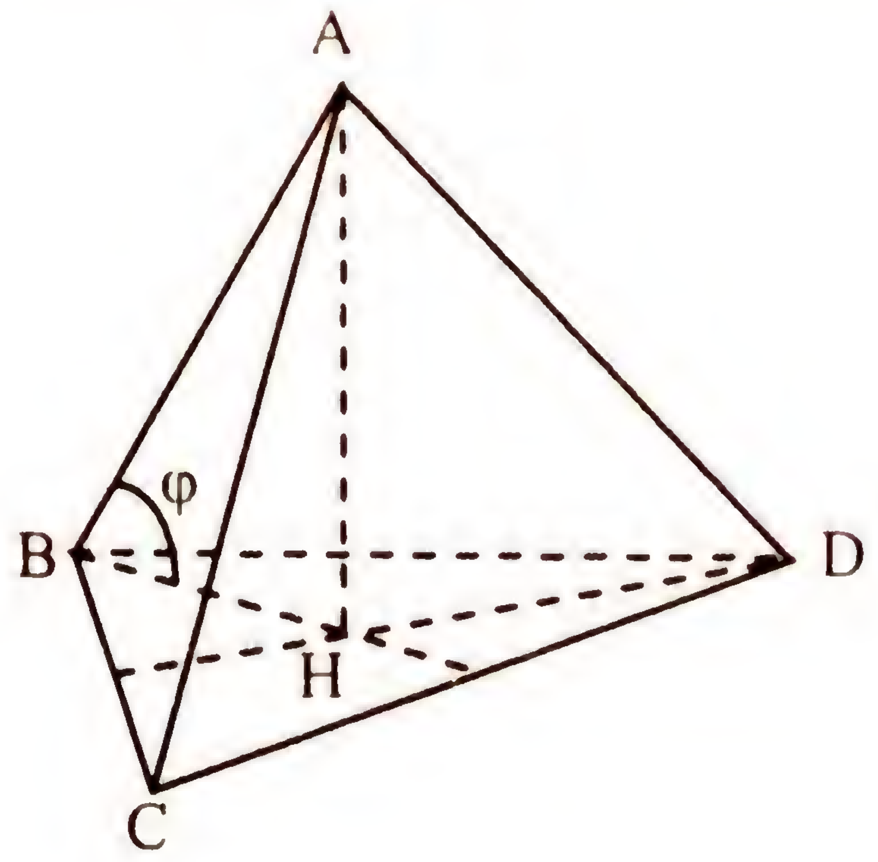
– Ta có AD là hình chiếu của SD lên mp(ABCD) nên góc giữa SD với mp(ABCD) là góc giữa đường thẳng SD và AD, đặt bằng $\varphi$.

Tam giác SAD vuông tại A: $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

b) Ta có $SA \perp mp(ABCD)$ nên $SA \perp BD$ và ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$, do đó $BD \perp mp(SAC)$. Vậy góc giữa đường thẳng BD và mp(SAC) bằng $90^o$.

**Ví dụ 2**: Cho tứ diện đều ABCD. Tính góc giữa đường thẳng AB và mp(BCD).

**Giải**




Hạ $AH \perp mp(BCD)$.

Vì $AB = AC = AD \Rightarrow HB = HC = HD$.

nên H là tâm của tam giác đều BCD.

Ta có BH là hình chiếu của AB lên mp(BCD) nên góc giữa đường thẳng AB với mp(BCD) là góc $\varphi$ giữa đường thẳng AB và BH.

Gọi a là cạnh tứ diện đều. Tam giác ABH vuông:

$$\cos\varphi = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Ví dụ 3**: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

**Giải:**

1) Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC).

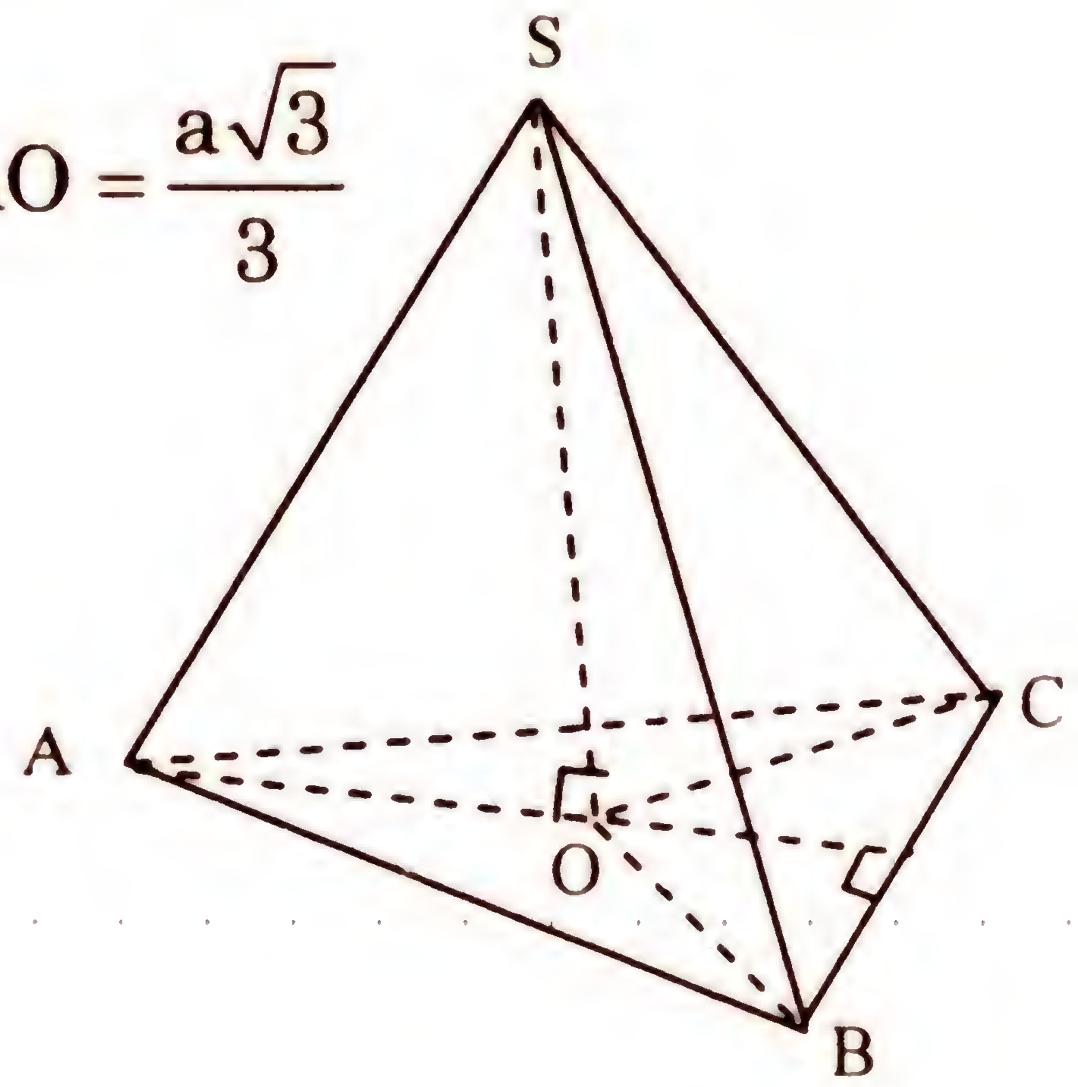
Vì SA = SB = SC nên OA = OB = OC.

Do đó O là tâm của tam giác đều ABC và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SO^2 = SA^2 - AO^2 = \dfrac{12a^2}{9} - \dfrac{3a^2}{9} = a^2$

$\Rightarrow SO = a$

2) Ta có AO là hình chiếu của AS trên (ABC) nên góc giữa SA và (ABC) là góc $\widehat{SAO}$.



Ta có: $\tan\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{AO} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$

Vậy $\widehat{SAO} = 60^0$.

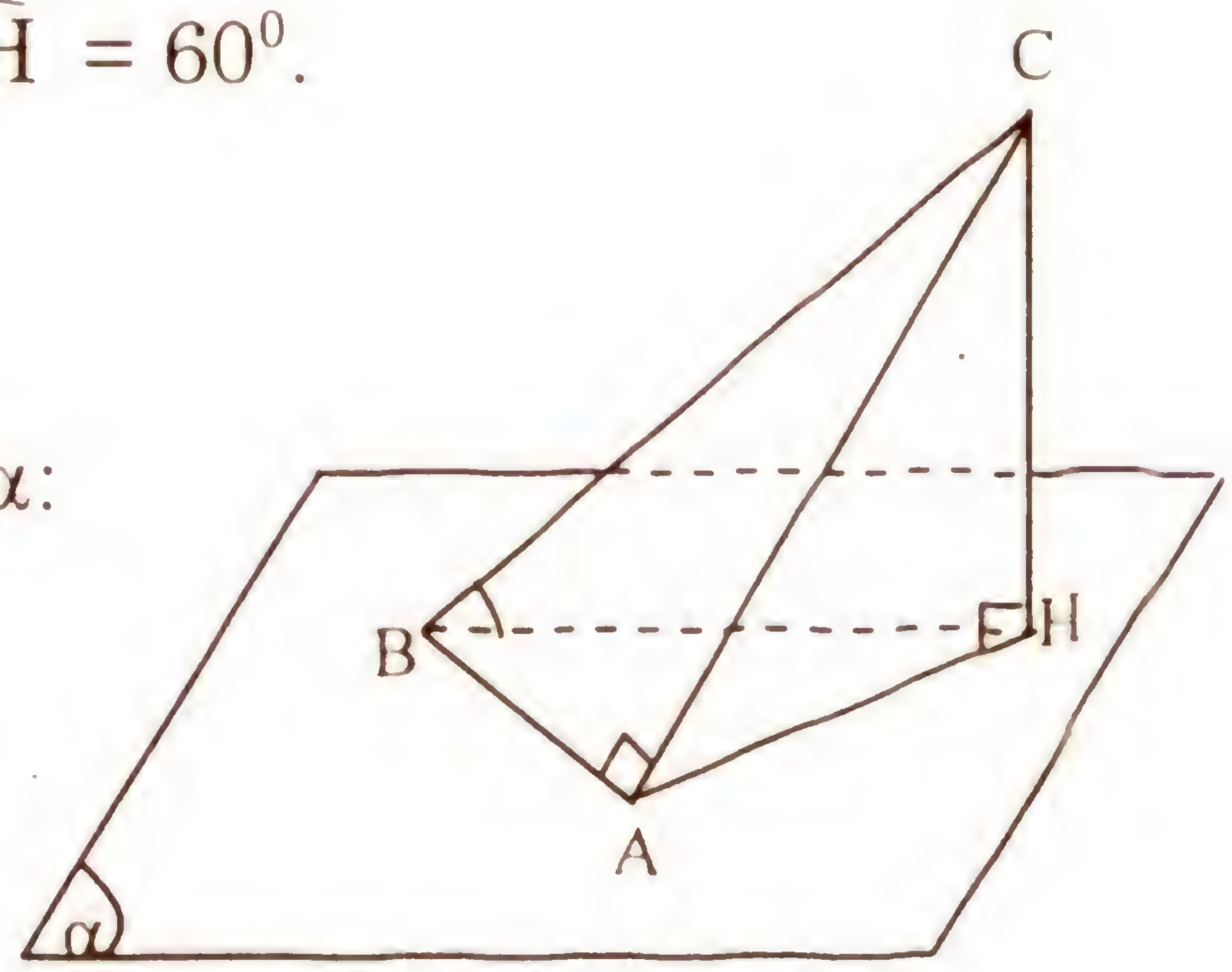
**Ví dụ 4**: Cho tam giác ABC vuông góc tại A, cạnh AB = a và nằm trong mặt phẳng α, cạnh AC = $a\sqrt{2}$ và tạo với α một góc $60^0$. Tính góc hợp bởi BC với α.

**Giải:**

Ta có: BC = $a\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu của C trên α thì $\widehat{CAH} = 60^0$.

$$CH = AC.\sin60^0 = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$




Ta có $\widehat{CBH}$ là góc của cạnh BC tạo với α:

Tam giác vuông CBH :

$$\sin\widehat{CBH} = \frac{CH}{BC} = \frac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

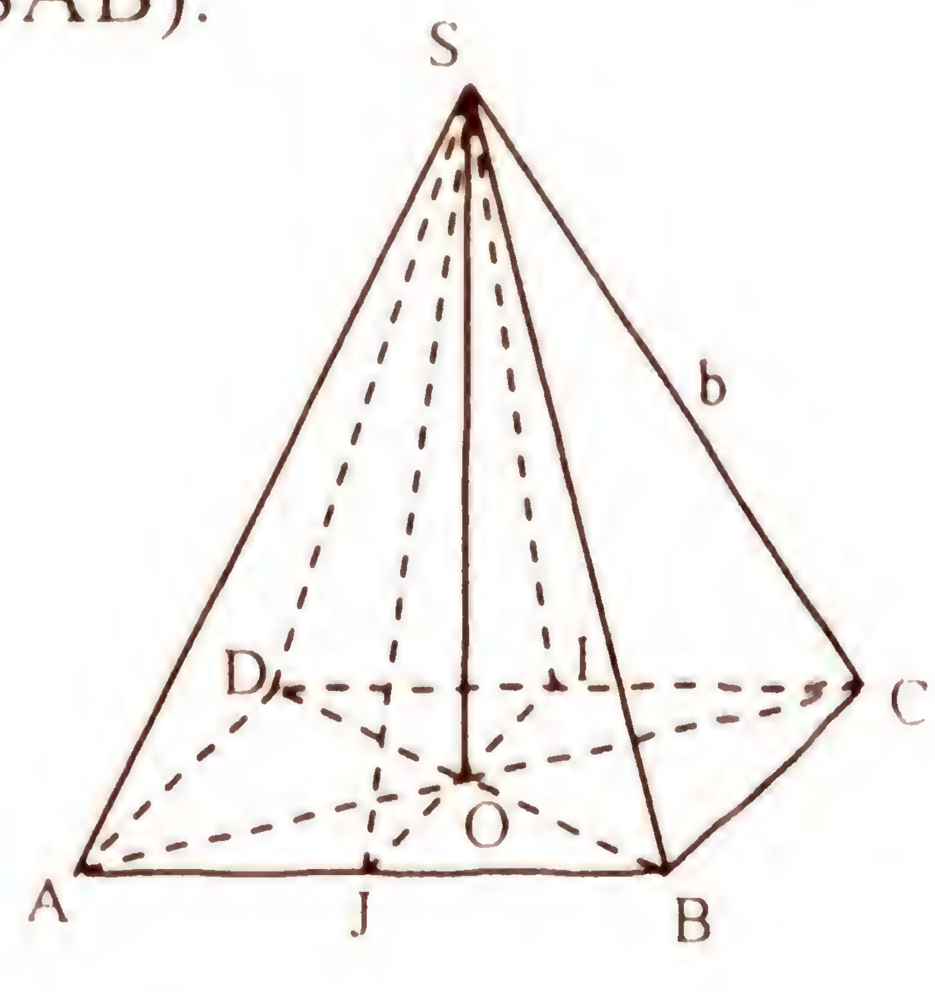
Vậy góc $\widehat{CBH} = 45^0$.

**Ví dụ 5:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, cạnh bên SA = SB = SC = SD = b cùng hợp với đáy góc $60^0$.

Gọi I là trung điểm của CD. Tính góc hợp bởi đường thẳng:

a) SC với mp(SBD) b) SI với mp(SAB).

**Giải**




a) Hạ SO ⊥ mp(ABCD).

Vì SA = SB = SC = SD

⇒ OA = OB = OC = OD nên O là tâm của hình vuông đáy, góc $\widehat{SCO} = 60^0$.

Ta có: SO ⊥ OC, BD ⊥ OC

⇒ OC ⊥ mp(SBD) nên SO là hình chiếu của SC lên mp(SBD).

Tam giác vuông SOC có góc C = $60^0$ nên góc S = $30^0$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC với mp(SBD) bằng $30^0$.

b) Gọi CD là trung điểm của AB. Ta có IJ ⊥ AB mà SO ⊥ AB nên AB ⊥ mp(SIJ), do đó hình chiếu của đường thẳng SI lên mp(SAB) là đường thẳng SJ.

Hình vuông ABCD có đường chéo AC = SA = SB = b nên $IJ = BC = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$,

tam giác đều SAC có đường cao $SO = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng SI và SJ, tam giác vuông SOI:

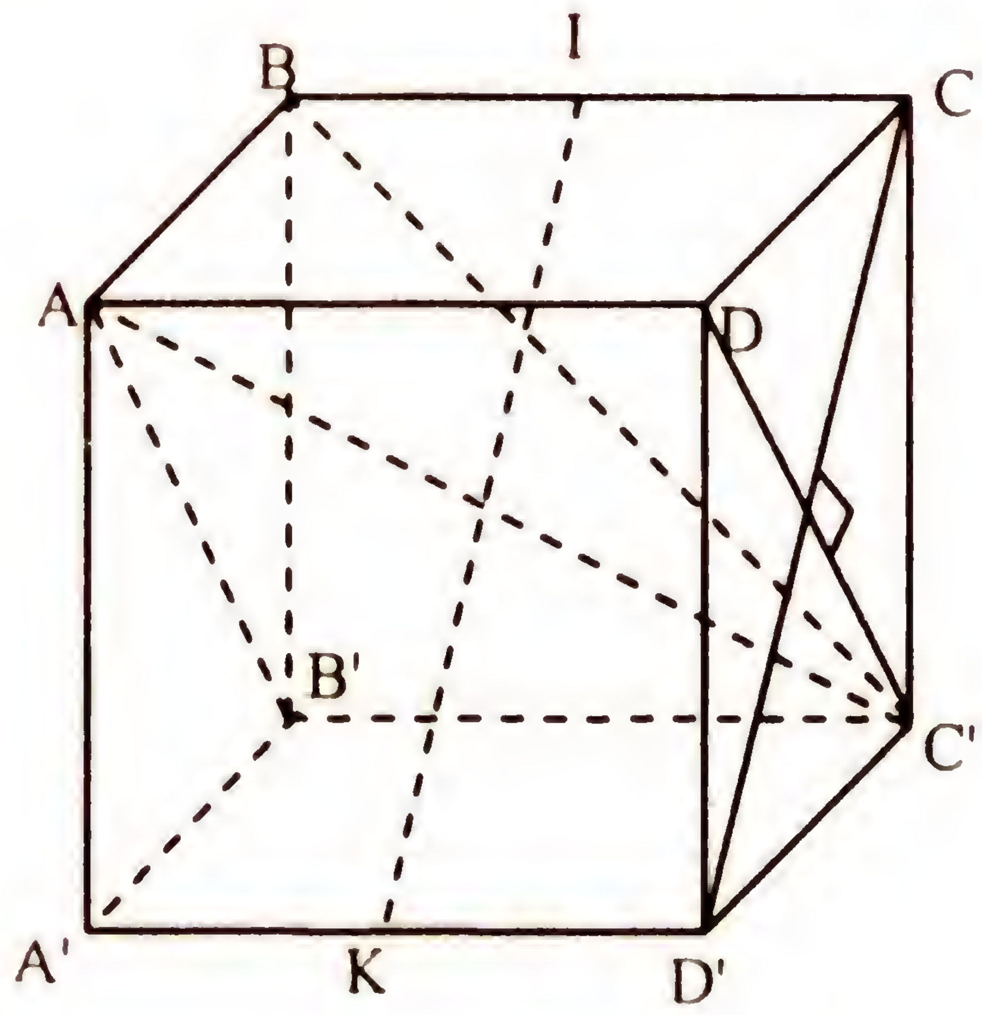
$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{OI}{SO} = \frac{\frac{b}{2\sqrt{2}}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

**Ví dụ 6**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Hãy tính góc của đường thẳng:

a) AB' và BC' ; AC' và CD'

b) IK với mp(A'B'C'D'), trong đó I, K là trung điểm của BC, A'D'.

**Giải**




a) Ta có AB' // DC' nên góc α giữa AB' và BC' là góc giữa DC' và BC'. Vì tam giác BC'D đều nên $\alpha = 60^{\circ}$.

Ta có: $CD' \perp C'D$ và $CD' \perp AD$ nên $CD' \perp (ADC'B')$.

Do đó $CD' \perp AC'$.

Vậy góc giữa AC' và CD' bằng $90^{\circ}$.

b) Ta có IK // CD' nên góc giữa đường thẳng IK với mp(A'B'C'D') là góc giữa CD' với mp(A'B'C'D').

Hình chiếu CD' lên mp(A'B'C'D') là D'C'. Vì DCC'D' là hình vuông nên góc cần tìm bằng $45^{\circ}$.

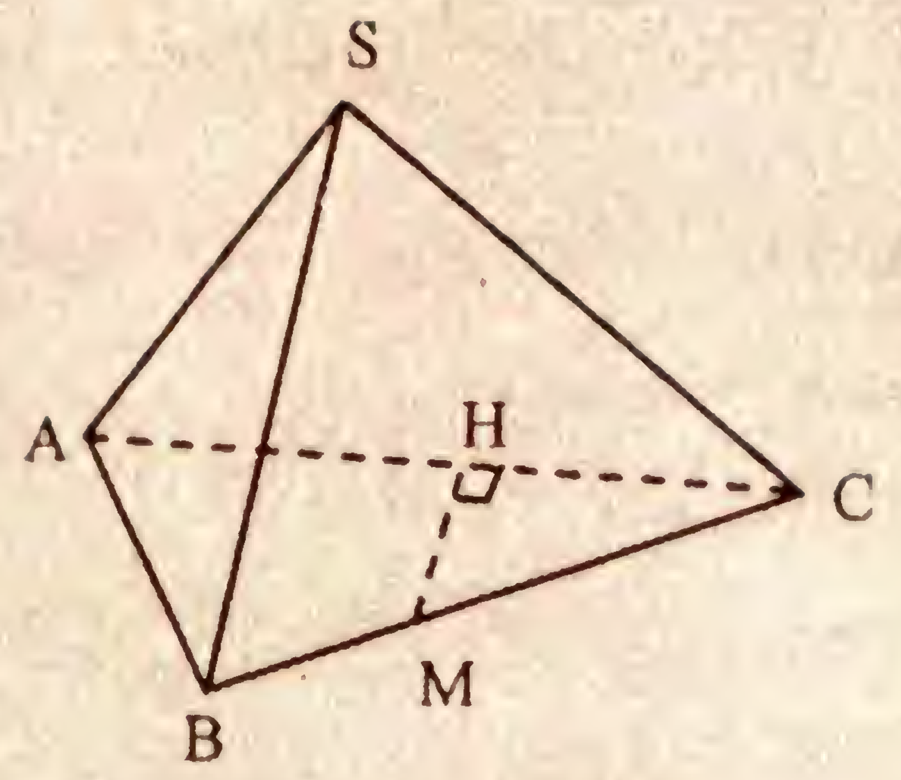
## DẠNG 3: THIẾT DIỆN VUÔNG GÓC

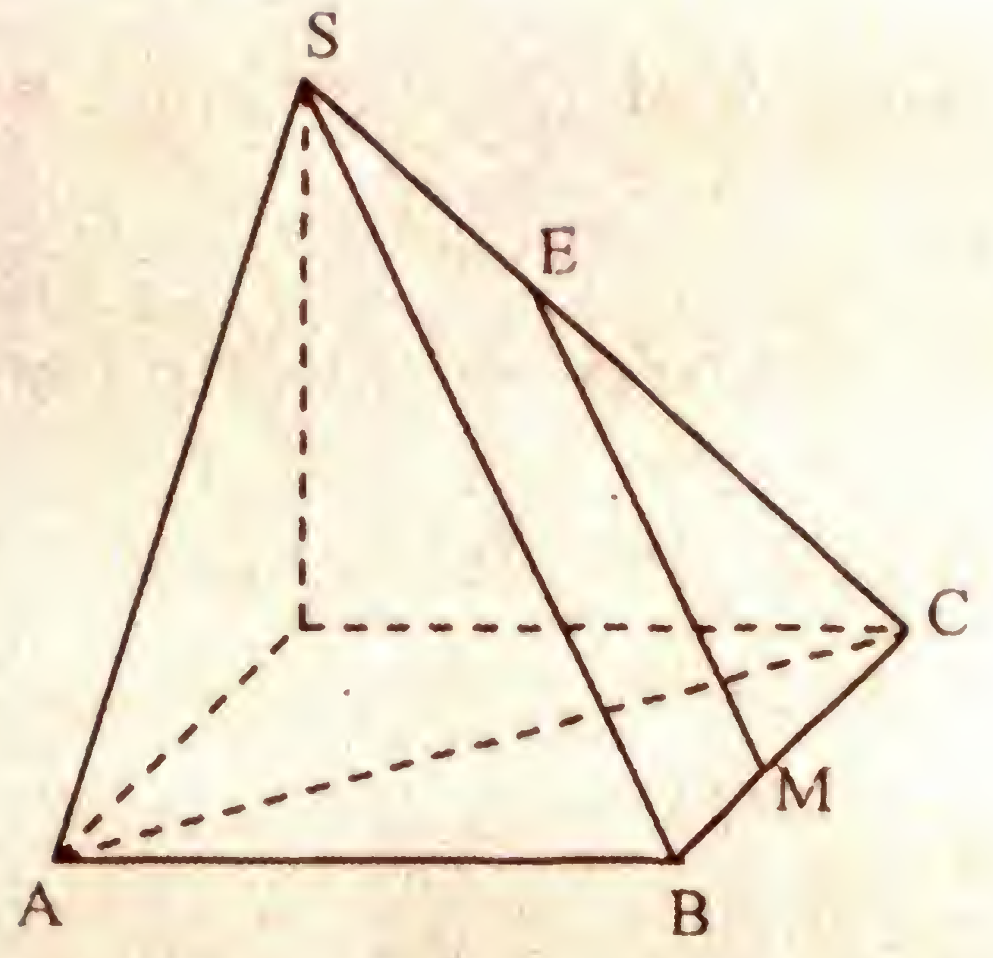
Mặt phẳng (P) cắt một số cạnh của khối đa diện tạo thành đỉnh đa giác thiết diện, cắt một số mặt của khối đa diện tạo thành cạnh của đa giác thiết diện.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với AC của khối đa diện:

– Nếu có mặt chứa M và AC thì hạ MH vuông góc với AC, H thuộc đường thẳng AC. Điểm H là một đỉnh của thiết diện, từ đó vẽ tiếp thiết diện.

– Nếu có cạnh SB vuông góc với AC thì SB // (P) hoặc $SB \subset (P)$. Lúc đó (P) cắt mặt chứa M theo giao tuyến song song với SB. Nếu có 2 đường thẳng $d_1$, $d_2$ cùng vuông góc với AC thì (P) là mặt phẳng qua M, song song với $d_1$, $d_2$.

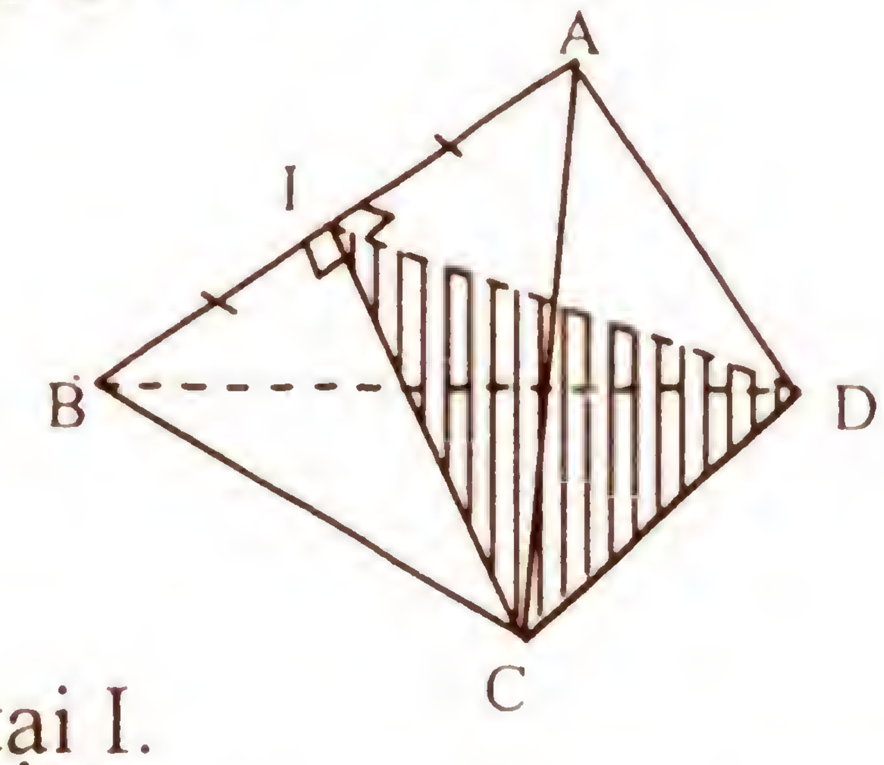



Chú ý: Các chân đường cao đặc biệt của tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông cân, ....

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện đều ABCD. Xác định thiết diện cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB.

**Giải**




Tứ diện ABCD đều nên tam giác ABC, ABD đều do đó $CI \perp AB$, $DI \perp AB$ nên $AB \perp (ICD)$.

Ta có mp(P) chính là mp(ICD).

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác ICD cân tại I.

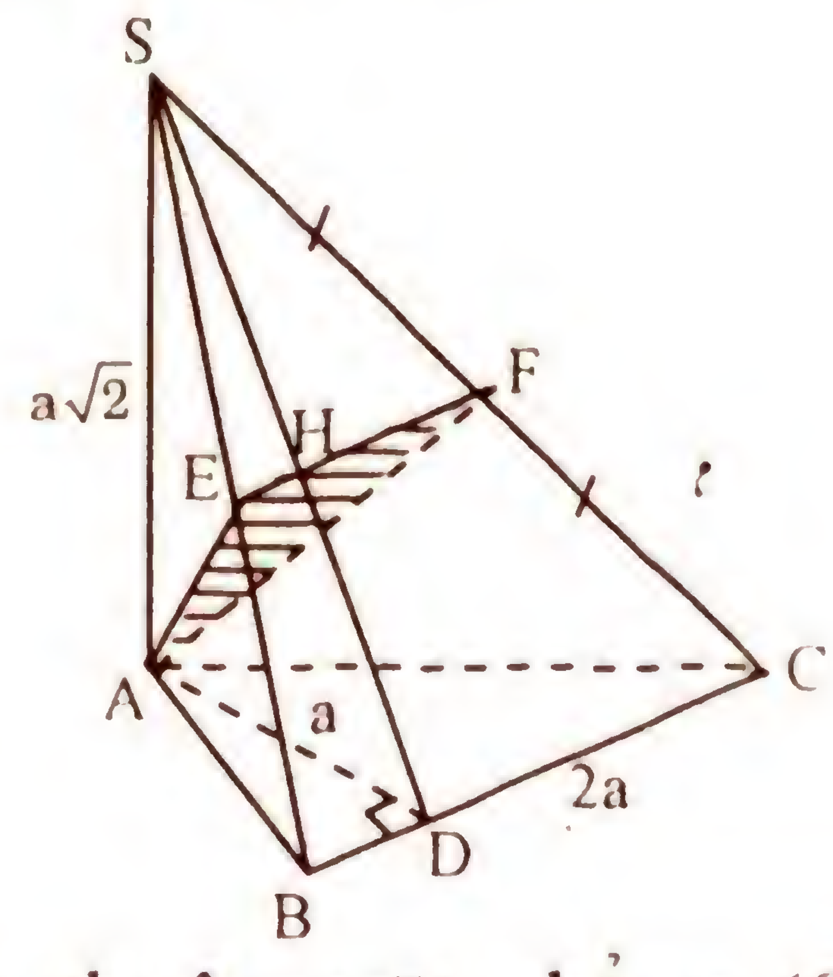
**Ví dụ 2**: Tam giác ABC có BC = 2a và đường cao AD = a. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Chứng minh BC vuông góc với (SAD).

b) Gọi H là hình chiếu của A trên EF. Chứng minh AH nằm trên (SAD). Hãy cho biết vị trí của điểm H đối với hai điểm S và D.

c) Tính diện tích của tam giác AEF.

**Giải**




a) $BC \perp AD$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAD)$

b) Ta có: $AH \perp EF$, $EF \parallel BC$

$\Rightarrow AH \perp BC$

Như vậy , ta có: $AH \perp BC$, $(SAD) \perp BC$

$\Rightarrow AH \subset (SAD)$.

Điểm H vừa thuộc mặt phẳng (SAD), vừa thuộc mặt phẳng (SBC), (vì $H \in EF$) nên $H \in SD$. Vì EF là đường trung bình của tam giác SBC nên H là trung điểm của SD.

c) Ta có: $S_{AEF} = \dfrac{1}{2}AH.EF$ mà $EF = \dfrac{1}{2}BC = a$

và $AH = \frac{1}{2}SD$ với $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$.

Ta suy ra: $S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

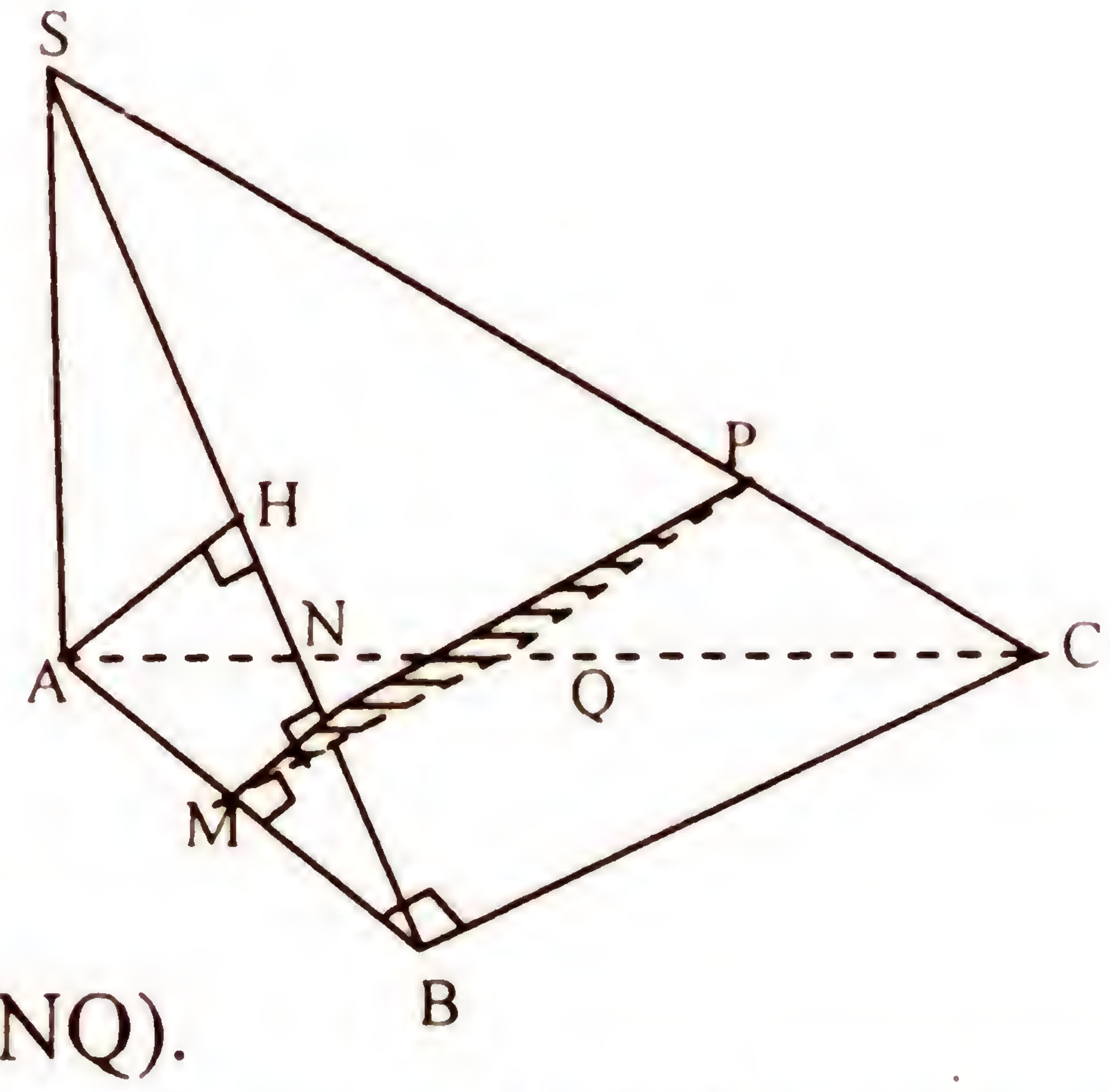
**Ví dụ 3**: Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a, SA vuông góc với (ABC), SA = a. Gọi ($\alpha$) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB.

a) Xác định mặt phẳng ($\alpha$).

b) ($\alpha$) cắt tứ diện SABC theo thiết diện là hình gì?

c) Tính diện tích của thiết diện

**Giải**




a) Hạ $AH \perp SB$
Vì AS = AB = a, nên H là trung điểm của SB. Dựng MN // AH, N là trung điểm của BH thì $MN \perp SB$.
Mặt khác, ta có: $BC \perp (SAB)$
$\Rightarrow BC \perp SB$.
Dựng MQ // BC ($Q \in AC$)
$\Rightarrow MQ \perp SB$, ta suy ra ($\alpha$) là mặt phẳng (MNQ).

b) Ta có (MNQ) // BC $\Rightarrow$ (MNQ) cắt (SBC) theo giao tuyến NP song song với BC (với $P \in SC$). Nối PQ ta được thiết diện là hình thang MNPQ. Vì MQ // BC nên $MQ \perp (SAB)$, do đó $MQ \perp MN$. Vậy thiết diện là hình thang vuông tại M và N.

c) Ta có: $MQ = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{3}{4} \Rightarrow NP = \frac{3}{4}a$

$$MN = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{4}SB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP).MN = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right).\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{32}.$$

**Ví dụ 4**: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm của AH. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2a. Gọi I là một điểm trên OH, đặt AI = x, a < x < 2a. Gọi ($\alpha$) là mặt phẳng qua I và vuông góc với đường thẳng OH.

a) Xác định mặt phẳng ($\alpha$).

b) Dựng thiết diện của ($\alpha$) với tứ diện SABC. Thiết diện là hình gì?

c) Tính theo a và x diện tích của thiết diện. Với x nào thì diện tích thiết diện lớn nhất.

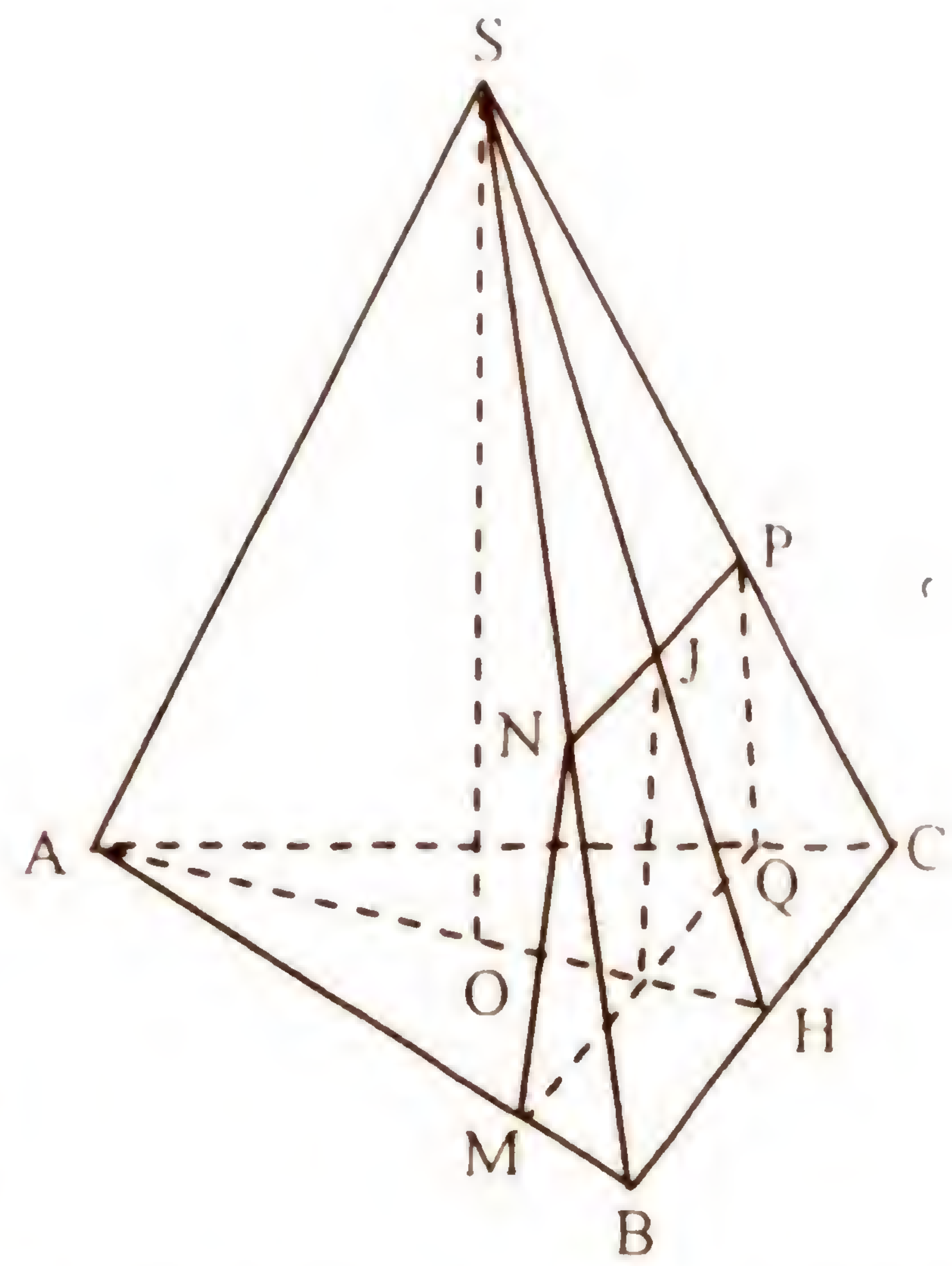
**Giải**

a) Ta có: $BC \perp OH$

Qua I, dựng $MQ \,//\, BC$ ($M \in AB$, $Q \in AC$) thì $MQ \perp OH$. Mặt khác, ta có: $SO \perp OH$.

Dựng $IJ \,//\, OS$ ($J \in SH$) thì $IJ \perp OH$.

Do đó mp($\alpha$) là mặt phẳng (JMQ).




b) Ta có: $MQ \,//\, BC \Rightarrow (\alpha) \,//\, BC$

$\Rightarrow$ ($\alpha$) cắt (SBC) theo giao tuyến qua J và song song với BC.

Do đó, qua J dựng đường thẳng song song với BC, cắt SB và SC tại N và P ta được MNPQ là thiết diện cần dựng.

Vì $NP \,//\, MQ \,//\, BC$ nên MNPQ là hình thang.

Ta có: $OB = OC \Rightarrow \Delta SOB = \Delta SOC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAC$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{SCA}$.

Ta cũng có: $BN = CP$, $BM = CQ$, do đó: $\Delta BMN = \Delta CQP$.

Do đó: $MN = QP$. Vậy thiết diện là hình thang cân.

c) Do $AH = 2a$, ta tính được $BC = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{AI}{AH} = \frac{x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{x}{2a}.\frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SJ}{SH} = \frac{OI}{OH} = \frac{x-a}{a} \Rightarrow NP = \frac{x-a}{a}.\frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{4(x-a)\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{IJ}{OS} = \frac{HI}{HO} = \frac{2a-x}{a} \Rightarrow IJ = 2(2a - x)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ+NP)\,IJ = \frac{1}{2}\left(\frac{2x\sqrt{3}}{3} + \frac{4(x-a)\sqrt{3}}{3}\right).2(2a-x)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(3x-2a)(2a-x).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si:

$$S = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}a\right)(2a-x) \le 2\sqrt{3}\left(\frac{x - \frac{2}{3}a + 2a - x}{2}\right)^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}a^2$$

Dấu = xảy ra khi $x - \dfrac{2}{3}a = 2a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}a$ (chọn).

**Ví dụ 5:** Tứ diện SABC có hai mặt ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a và $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, M là một điểm trên đoạn AB, đặt AM = x (0 < x < a). Gọi ($\alpha$) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Gọi D là trung điểm của BC.

a) Chứng minh ($\alpha$) song song với (SAD).

b) Xác định thiết diện của ($\alpha$) với tứ diện SABC.

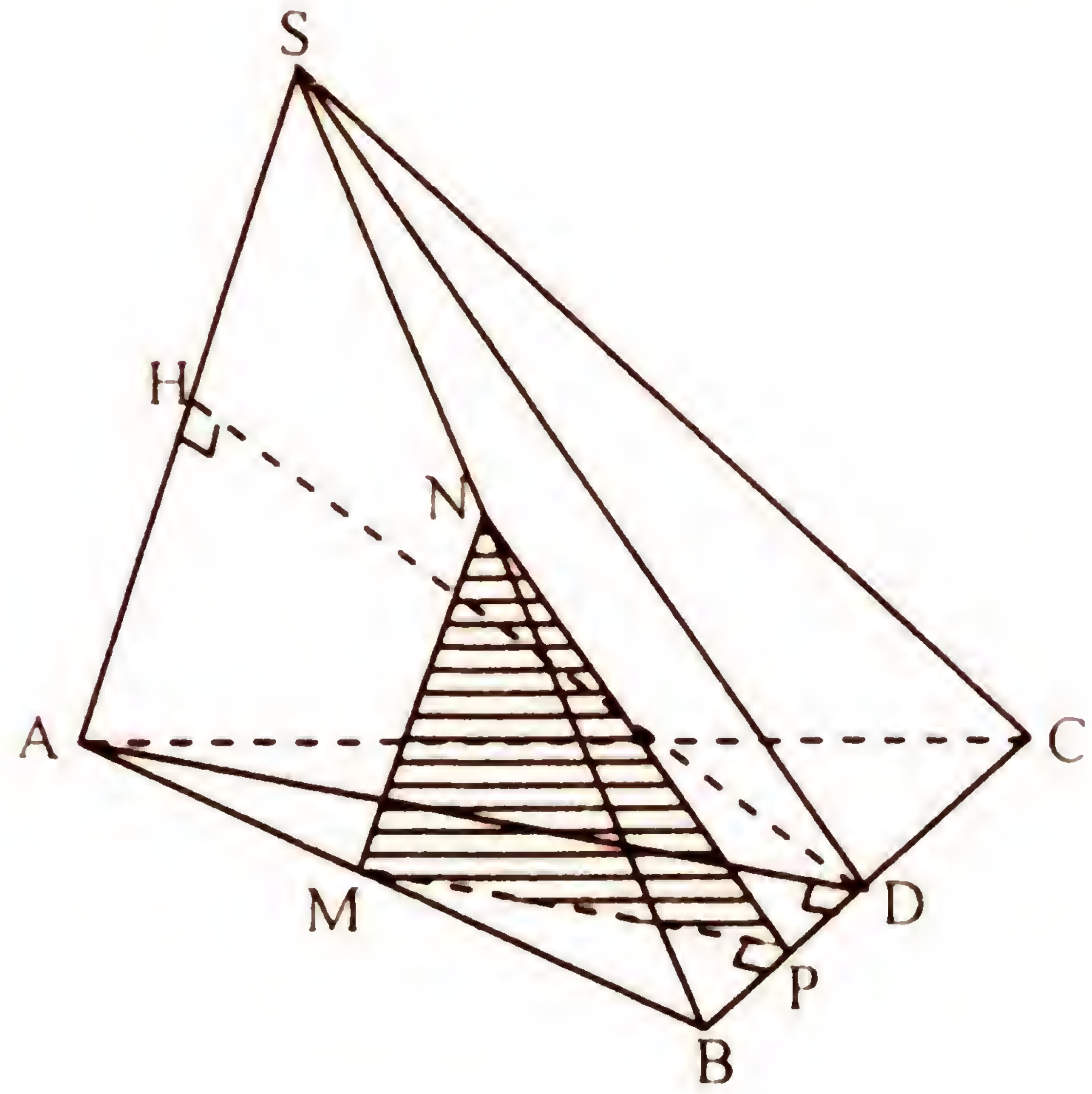
c) Tính theo a và x diện tích của thiết diện.

**Giải**

a) Vì ABC và SBC là các tam giác đều và D là trung điểm của BC nên: $BC \perp AD$, $BC \perp SD$

$\Rightarrow BC \perp (SAD)$

Vì ($\alpha$) $\perp$ BC nên: ($\alpha$) // (SAD)




b) Gọi N, P lần lượt là giao điểm của các cạnh SB, SC với ($\alpha$).

Vì ($\alpha$) // (SAD) nên ta có: MN // SA, NP // SD, PM // AD.

Thiết diện của ($\alpha$) với tứ diện SABC là tam giác MNP.

Ta có: $\frac{NP}{SD} = \frac{BP}{BD} = \frac{BM}{BA} = \frac{MP}{AD}$.

Vì SD = AD nên NP = MP

Vậy thiết diện MNP là tam giác cân đỉnh P.

c) Hai tam giác cân MNP và ASD đồng dạng với nhau, có tỉ số đồng dạng là $k = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a}$. Gọi H là trung điểm của SA.

Ta có: $DH^2 = DA^2 - AH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16} = \frac{9a^2}{16} \Rightarrow DH = \frac{3a}{4}$

Do đó: $S_{SAD} = \frac{1}{2}AS.DH = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

Suy ra: $S_{MNP} = k^2.S_{SAD} = \frac{(a-x)^2}{a^2}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{16}(a-x)^2$

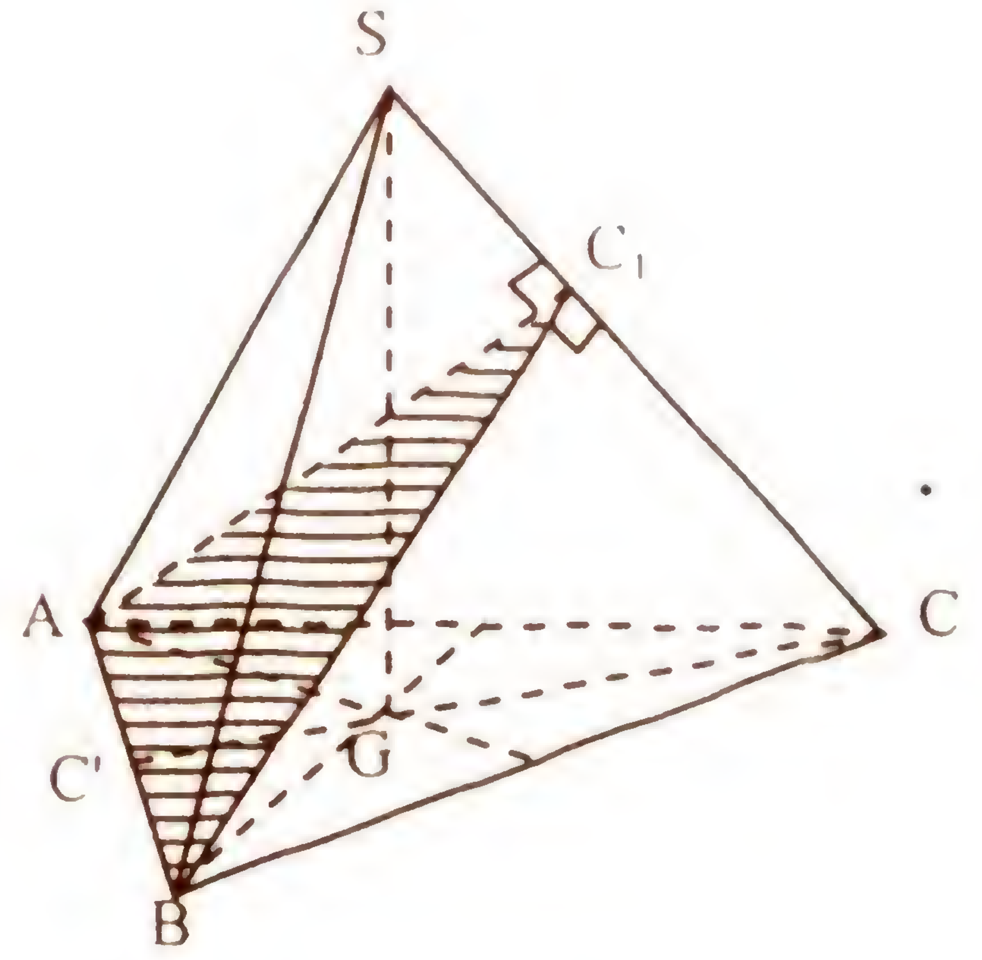
Nhận xét: Nếu x = 0 ta có M trùng với A, khi đó thiết diện có diện tích bằng diện tích tam giác SAD. Còn nếu x = a ta có M trùng với B, khi đó diện tích của thiết diện bị triệt tiêu.

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA = SB = SC = b. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG.

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm $C_1$ nằm giữa S và C. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(P).

**Giải**




a) Ta có SA = SB = SC và có GA = GB = GC.
Nên SG là trục của tam giác đều ABC.
Vậy SG ⊥ mp(ABC).

$$SG^2 = SA^2 - AG^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

nên $SG = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$, (với $3b^2 > a^2$).

b) Tạ có AB ⊥ SC. Vì (P) đi qua A và vuông góc với SC nên AB nằm trong (P). Vẽ đường cao $AC_1$ của tam giác SAC thì (P) chính là mp($ABC_1$). Do tam giác SAC cân tại S nên điểm $C_1$ nằm trong đoạn thẳng SC khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^o$.

$\Leftrightarrow AC^2 < SA^2 + SC^2 \Leftrightarrow a^2 < 2b^2$. Trong trường hợp này, thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (P) là tam giác $ABC_1$.

$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB.C'C_1 = \frac{1}{2}a.C'C_1,$$ với C' là trung điểm của AB.

Ta có: $C'C_1.SC = SG.CC'$

$$\Rightarrow C'C_1 = \frac{SG.CC'}{SC} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}.$$

Vậy: $S_{ABC_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$.

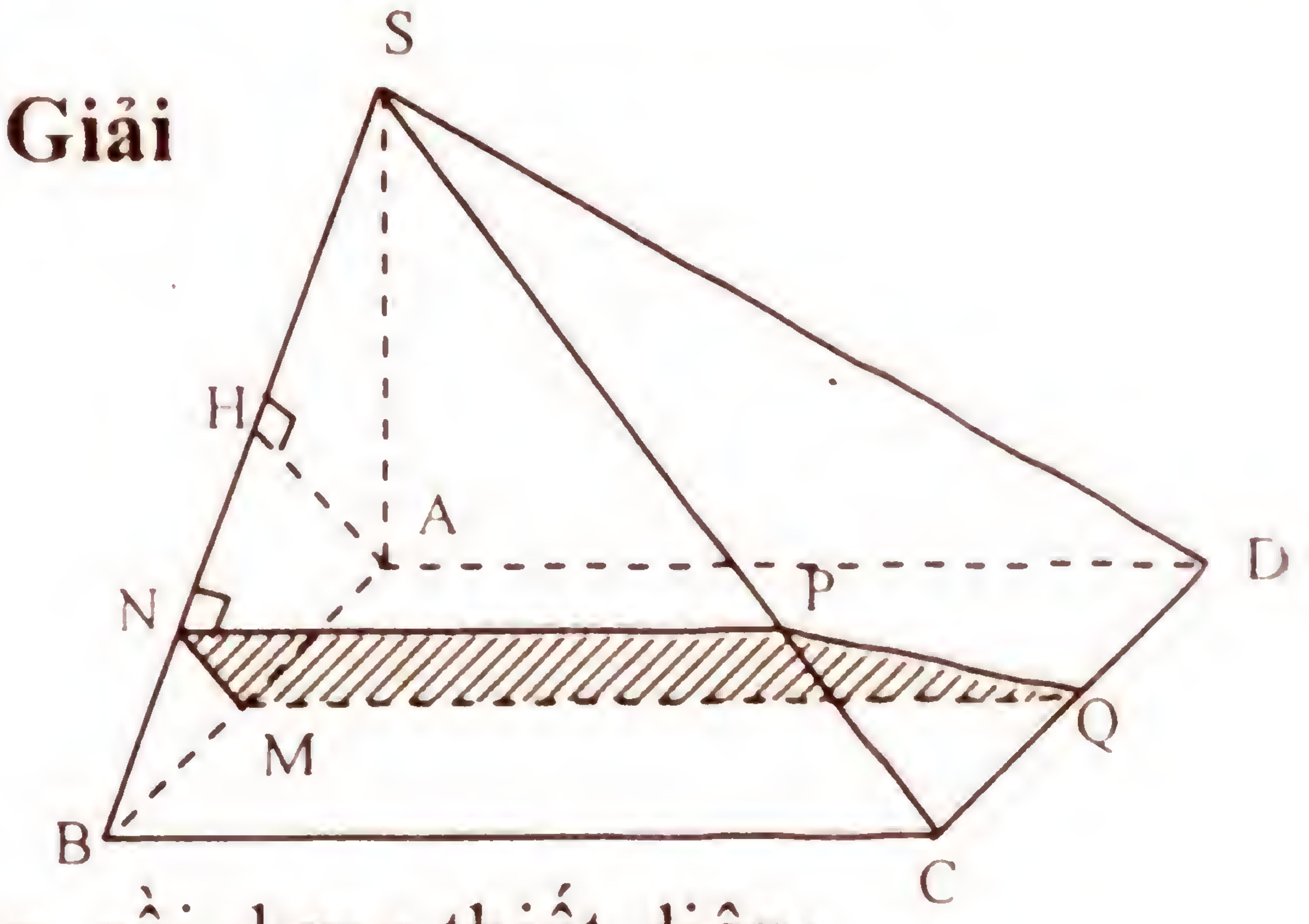
__Ví dụ 7__: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc với (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi AH là đường cao của tam giác SAB.

a) Tính tỉ số $\dfrac{SH}{SB}$ và độ dài đoạn AH.

b) Gọi M là trung điểm của AB, α là mặt phẳng qua M và vuông góc với SB. Mặt phẳng α cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

c) Tính diện tích của thiết diện.

**Giải**




a) Tam giác vuông SAB, ta có:

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 6a^2$$

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{1}{3}$$

$$AH = \frac{AS.AB}{SB} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

b) Trước tiên, ta xác định mặt phẳng rồi dựng thiết diện:

Ta có: AH ⊥ SB. Dựng MN // AH , N là trung điểm BH thì MN ⊥ SB và NB = NH.

Mặt khác, ta có: AD ⊥ AB và AD ⊥ SA nên AD ⊥ SB.

Dựng MQ // AD (Q ∈ CD), thì MQ ⊥ SB.

Do đó, ta suy ra (α) là mặt phẳng (MNQ).

Ta có MQ // BC ⇒ (α) // BC nên (α) cắt (SBC) theo giao tuyến NP // BC, P ∈ SC. Nối PQ, ta được thiết diện là hình thang MNPQ.

Vì BC ⊥ (SAB) nên MQ ⊥ (SAB), suy ra MQ ⊥ MN.

Vậy thiết diện MNPQ là hình thang vuông tại M và N.

c) Ta có: $MQ = BC = 2a$; $MN = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NP = \frac{4a}{3}$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)MN = \frac{5a^2\sqrt{3}}{9}$.

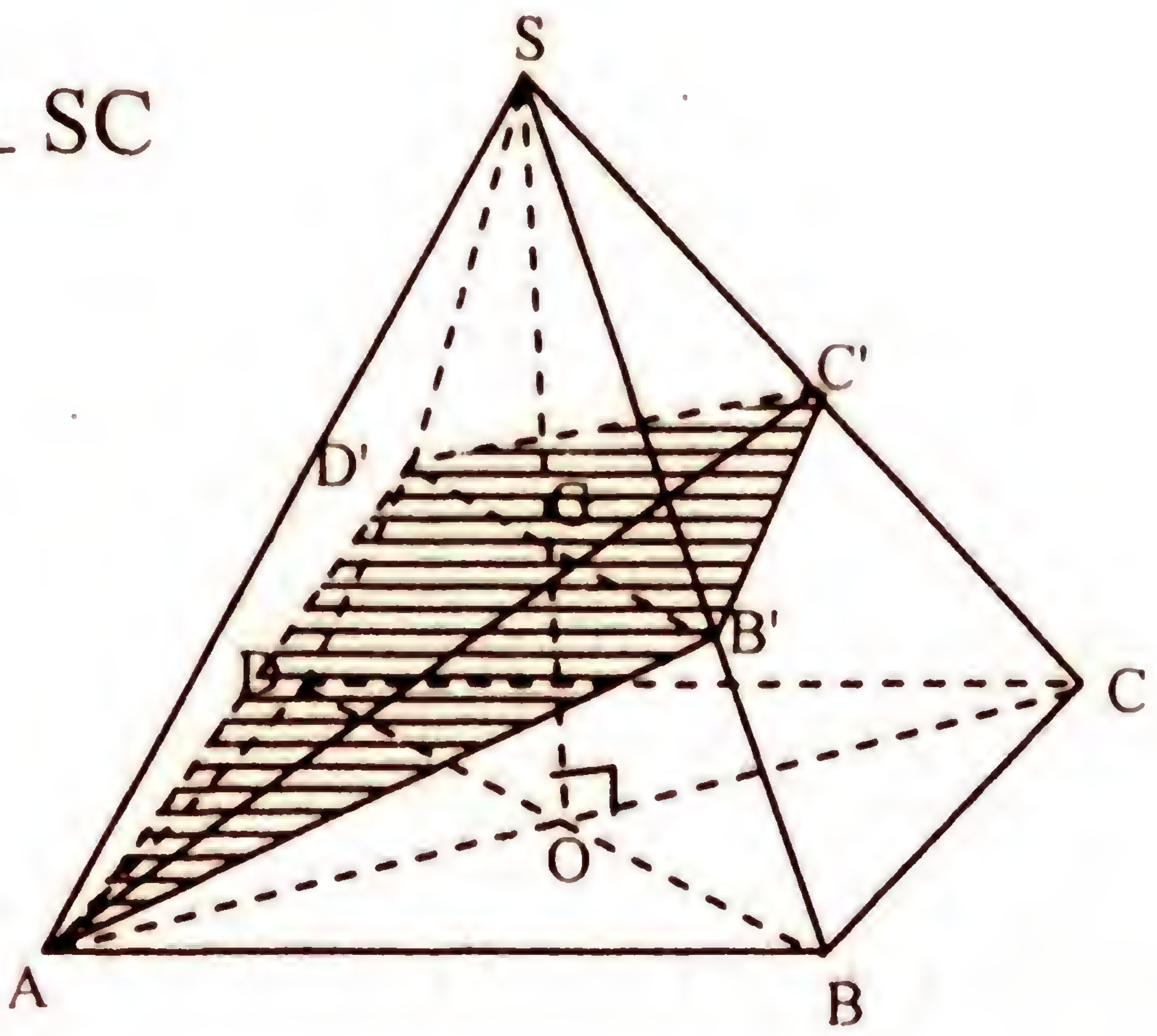
**Ví dụ 8**: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ABCD tại O, lấy điểm S sao cho $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'.

a) Tính AC'. Chứng minh C' là trung điểm của SC.

b) Chứng minh B'D' song song với BD. Từ đó suy ra cách dựng hai điểm B' và D'.

c) Chứng minh tứ giác AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích của tứ giác này.

**Giải**




a) Ta có: (α) ⊥ SC và AC' ⊂ (α) ⇒ AC' ⊥ SC

Vì $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow SC^2 = SO^2 + DC^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = 2a^2$

$\Rightarrow SC = a\sqrt{2}$.

Vậy SAC là một tam giác đều.

Do đó $AC' = SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Cách khác: Ta có thể tính AC' bằng công thức: AC'.SC = SO.AC từ diện tích tam giác SAC.

b) Ta có: BD ⊥ AC, BD ⊥ SO ⇒ BD ⊥ (SAC) ⇒ BD ⊥ SC.

Mặt khác theo giả thiết: (α) ⊥ SC. Vậy (α) // BD.

Do đó, ($\alpha$) cắt (SBD) theo giao tuyến B'D' // BD. Ta suy ra cách dựng B' và D'.

– Dựng AC' $\perp$ SC (C' là trung điểm của SC), AC' cắt SO tại G (G là trọng tâm của tam giác SAC).

– Dựng đường thẳng qua G song song với BD cắt SB và SD tại B' và D'.

c) Vì BD $\perp$ (SAC) nên B'D' $\perp$ (SAC), do đó B'D' $\perp$ AC'

$$S = \frac{1}{2}AC'.B'D'$$

Ta có: $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \dfrac{2BD}{3} = \dfrac{2}{3}a\sqrt{2} \quad \Rightarrow S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

**Ví dụ 9:** Cho hình tứ diện đều cạnh a, I và K lần lượt là trung điểm của cạnh AB và CD, mặt phẳng (P) chứa IK cắt hình tứ diện đều theo một thiết diện, xác định vị trí của mặt phẳng (P) để thiết diện tạo thành có diện tích là nhỏ nhất; lớn nhất. Tính giá trị nhỏ nhất, lớn nhất đó.

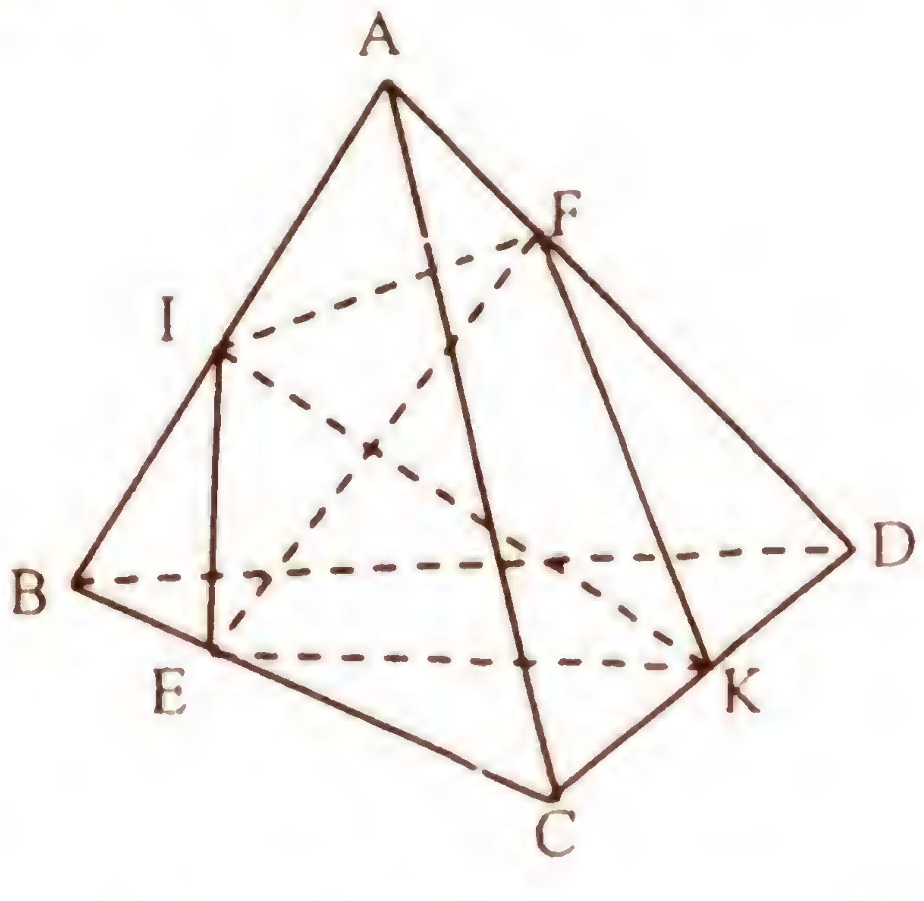
**Giải**

Mặt phẳng (P) cắt cạnh BC tại E thì cắt cạnh AD tại F và đặt $\overrightarrow{BE} = \alpha\overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AD}$ với $0 \le \alpha \le 1$.

Nếu $\alpha = 0$ thì E $\equiv$ B và F $\equiv$ A, thiết diện là tam giác ABK.

Nếu $\alpha = 1$ thì E $\equiv$ C và F $\equiv$ D, thiết diện là tam giác CID.

Nếu $0 < \alpha < 1$ thì E thuộc cạnh BC; F thuộc cạnh AD và thiết diện là tứ giác IEKF. Ta chứng minh tứ giác IEKF có hai đường chéo EF, IK vuông góc với nhau. Chọn hệ cơ sở gốc B: $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$




Ta có $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}$

$$= -\frac{\vec{c}}{2} + \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$$

$$= -\alpha\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{AD}$$

$$= -\alpha\vec{a} + \vec{c} + \alpha(\vec{b} - \vec{c}) = -\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c}$$

Ta có: $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c})(-\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c})$

$$= -\frac{1}{2}\alpha\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\alpha.\vec{a}.\vec{b} + \frac{1}{2}(1-\alpha)\vec{a}.\vec{c} - \frac{1}{2}\alpha\vec{a}\,\vec{b} + \frac{1}{2}\alpha\vec{b}^2$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\alpha)\vec{b}.\vec{c} + \frac{1}{2}\alpha\vec{a}.\vec{c} - \frac{1}{2}\alpha\vec{b}\,\vec{c} - \frac{1}{2}(1-\alpha)\vec{c}^2$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha a^2 + \frac{1}{4}\alpha a^2 + \frac{1}{4}(1-\alpha)a^2 - \frac{1}{4}\alpha a^2 + \frac{1}{2}\alpha a^2 + \frac{1}{4}(1-\alpha)a^2$$

$$+ \frac{1}{4}\alpha a^2 - \frac{1}{4}\alpha a^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha)a^2 = 0$$

Do đó IK $\perp$ EF nên: $S_{IEKF} = \frac{1}{2}IK.EF$.

$$IK^2 = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 = \frac{1}{4}[(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2) + 2\vec{a}\,\vec{b} - 2\vec{a}\,\vec{c} - 2\vec{b}\,\vec{c})]$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + a^2 + a^2 + a^2 - a^2 - a^2) = \frac{1}{4}(2a^2)$$

$$\Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$EF^2 = (-\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c})^2$$

$= \alpha^2\vec{a}^2 + \alpha^2\vec{b}^2 + (1-\alpha)^2\vec{c}^2 - 2\alpha^2\vec{a}\,\vec{b} - 2\alpha(1-\alpha)\vec{a}\,.\,\vec{c} + 2\alpha(1-\alpha)\vec{b}\,\vec{c}$

$= \alpha^2a^2 + \alpha^2a^2 + (1-\alpha)^2a^2 - \alpha^2a^2 - \alpha(1-\alpha)a^2 + \alpha(1-\alpha)a^2$

$= \alpha^2 a^2 + (1-\alpha)^2 a^2$.

$= a^2[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]$

$\Rightarrow EF = a\sqrt{\alpha^2 + (1-\alpha)^2}$

Vì IK không đổi nên diện tích IEKF lớn nhất, nhỏ nhất khi độ dài EF lớn nhất, nhỏ nhất. Mà độ dài EF là số dương nên EF lớn nhất, nhỏ nhất khi $EF^2$ là lớn nhất, nhỏ nhất.

Ta có $EF^2 = f(\alpha) = a^2[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]$ với $0 \le \alpha \le 1$.

$= a^2[2\alpha^2 - 2\alpha + 1]$.

| $\alpha$ | 0 | 1/2 | 1 |
|---|---|---|---|
| $f(\alpha)$ | $a^2$ ↘ | $a^2/2$ | ↗ $a^2$ |

Giá trị nhỏ nhất là $\frac{a^2}{2}$, lớn nhất là $a^2$.

Với $\alpha = \frac{1}{2}$ thì E và F là trung điểm của BC và AD, thiết diện có diện tích nhỏ nhất là:

$$\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}a^2$$

Với $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì thiết diện có diện tích lớn nhất là:

$$\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

## DẠNG 4: TOÁN TỔNG HỢP

– Chứng minh 2 đoạn bằng nhau: Đưa về chứng minh 2 tam giác bằng nhau.

– Chứng minh điểm thẳng hàng: Tìm 2 mặt phẳng phân biệt cùng chứa các điểm thì các điểm thẳng hàng trên giao tuyến.

– Bài toán quỹ tích (tập hợp điểm): phần thuận, giới hạn và phần đảo.

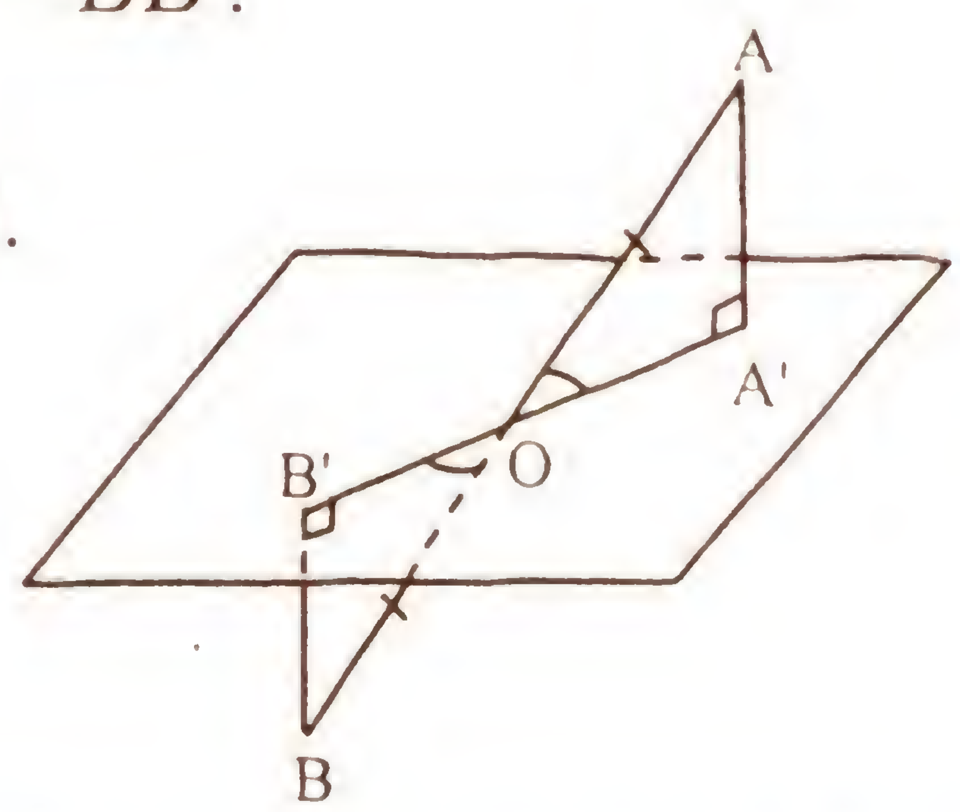
Chú ý: – Quan hệ song song và vuông góc.

– Mặt phẳng trung trực và trục của tam giác.

– Sử dụng vectơ để giải toán.

**Ví dụ 1**: Một đoạn thẳng AB không vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ cắt mặt phẳng này tại trung điểm O của đoạn thẳng đó. Các đường thẳng vuông góc với $(\alpha)$ qua A và B lần lượt cắt mặt phẳng $(\alpha)$ tại A' và B'. Chứng minh ba điểm A', O, B' thẳng hàng và AA' = BB'.

**Giải**




Ta có: $AA' \perp (\alpha)$, $BB' \perp (\alpha) \Rightarrow AA' // BB'$.

Mặt phẳng (AA', BB') xác định bởi hai đường thẳng song song AA', BB' cắt mặt phẳng $(\alpha)$ theo giao tuyến qua O, A', B'. Do đó ba điểm O, A', B' thẳng hàng.

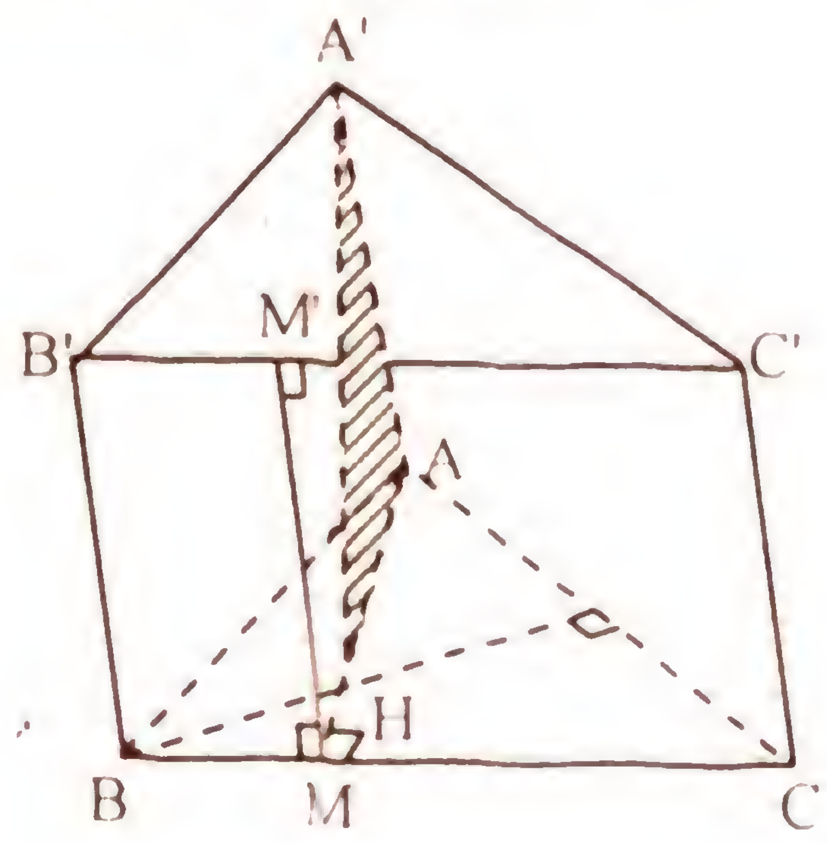
Hai tam giác vuông OAA' và OBB' bằng nhau vì có một cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau nên AA' = BB'.

**Ví dụ 2**: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có hình chiếu của A' lên (ABC) là trực tâm H của tam giác ABC.

a) Chứng minh $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.

b) Gọi MM' là giao tuyến của mặt phẳng (AHA') với mặt bên BCC'B', trong đó $M \in BC$ và $M' \in B'C'$. Chứng minh rằng tứ giác BCC'B' là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

**Giải**




a) $BC \perp AH$ và $BC \perp A'H$ vì $A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow BC \perp (A'HA)$

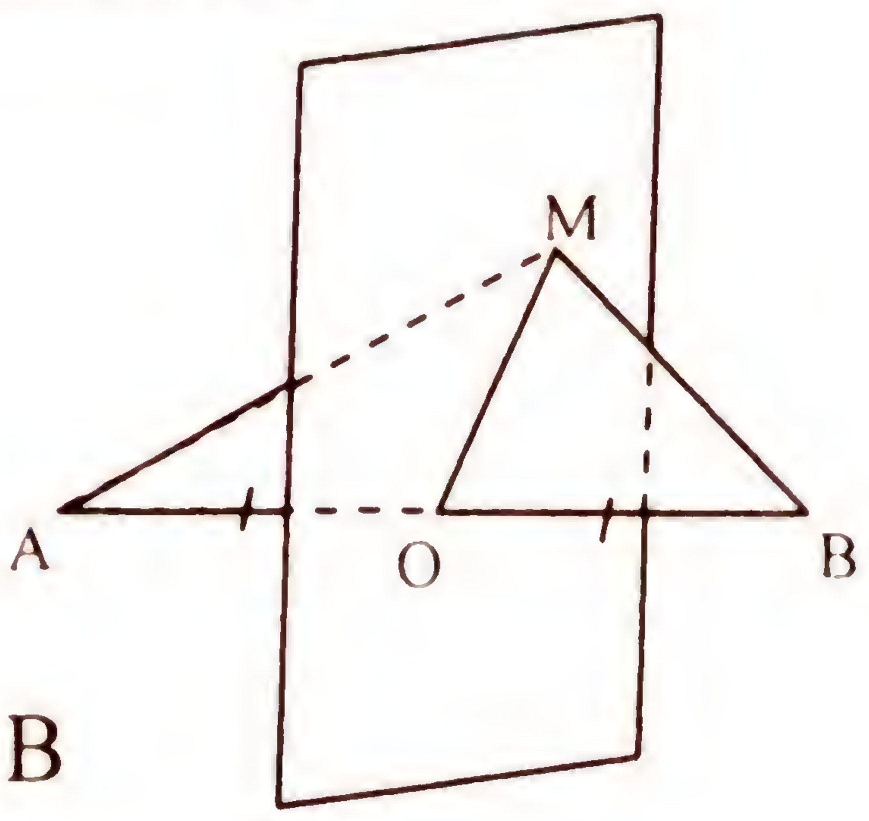
$\Rightarrow BC \perp AA'$ và $B'C' \perp AA'$ vì $BC // B'C'$.

b) Ta có $AA' // BB' // CC'$ mà $BC \perp AA'$ nên $BC \perp BB'$, do đó tứ giác BBC'B' là hình chữ nhật

Vì $AA' // (BCC'B')$ nên $AA' // MM'$ và vì $AA' \perp BC$ nên ta suy ra $MM' \perp BC$ và $MM' \perp B'C'$ nên MM' là đường cao của hình chữ nhật BCC'B'.

**Ví dụ 3**: Tìm tập hợp các điểm M cách đều 2 mút của đoạn AB.

**Giải**




Gọi O là trung điểm của đoạn AB thì O là một điểm thoả mãn OA = OB.

Xét M không trùng O thì tam giác MAB có MA = MB (cân tại M)

$\Leftrightarrow$ MO vuông góc với AB.

Vì O cố định nên tập hợp các điểm M cách đều A, B là mặt phẳng vuông góc với AB tại O, gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

**Ví dụ 4**: Tìm tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

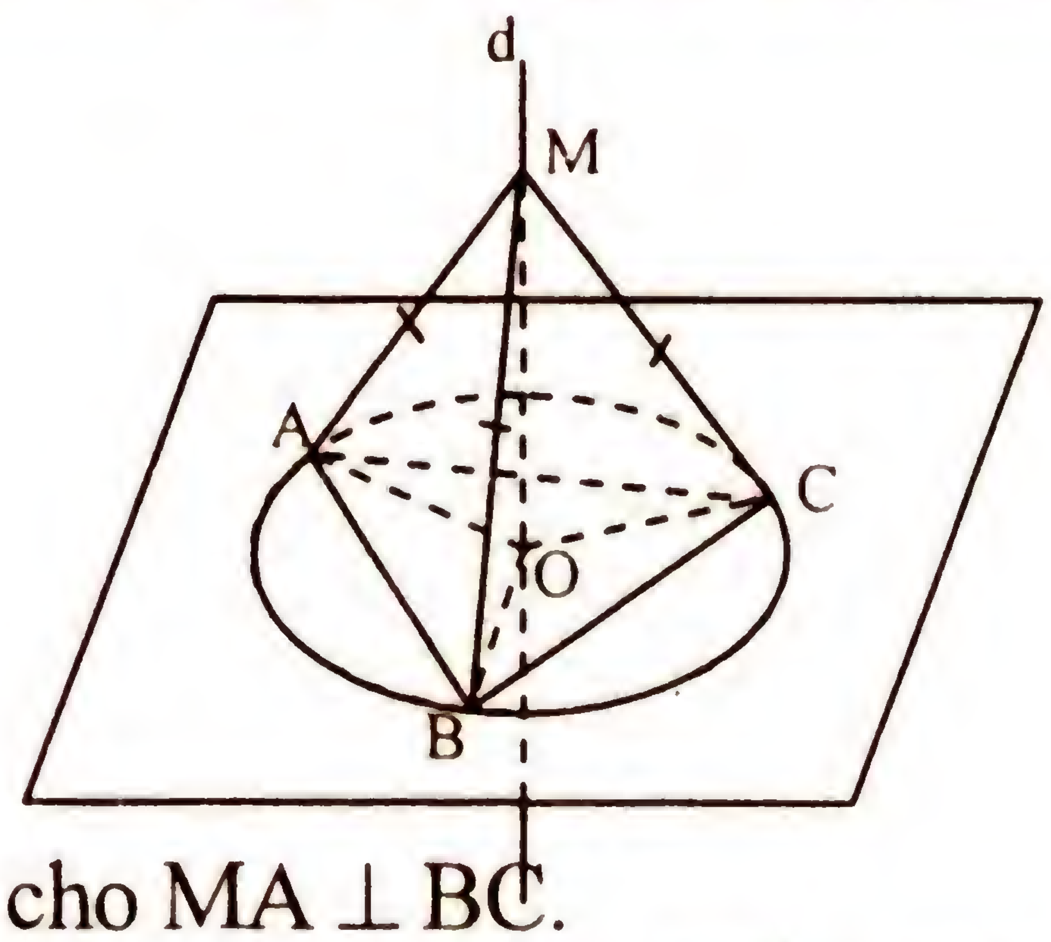
**Giải**

Hạ MH vuông góc với mp(ABC) tại H. Các tam giác vuông MAH, MBH, MCH có MH chung.

Ta có: MA = MB = MC

$\Leftrightarrow$ HA = HB = HC $\Leftrightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cố định.

Vậy, tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng $\Delta$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó, gọi là trục của tam giác ABC.




Cách khác:

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases}$$

Đưa về M thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trung trực của 2 cạnh AB và AC.

**Ví dụ 5**: Cho tam giác ABC.

a) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho MA $\perp$ BC.

b) Tìm tập hợp các điểm N trong không gian sao cho: NA $\perp$ BC; NB $\perp$ CA, NC $\perp$ AB.

**Giải**

a) Ta có MA $\perp$ BC mà A, B, C cố định nên:

Tập hợp các điểm M là mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với BC.

b) Hạ NH $\perp$ (ABC), vì NA $\perp$ BC nên HA $\perp$ BC. Tương tự HB $\perp$ CA, do đó H là trực tâm của tam giác ABC cố định.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mp(ABC).

**Ví dụ 6**: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn mỗi hệ thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM}$ (1)

b) $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ (2)

**Giải**

a) (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow MB \perp AC.$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng AC.

b) Gọi G là trọng tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó:

(2) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2 = 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC})^2$

$\Leftrightarrow OM^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} + OM^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$

$= 2OM^2 + 2OC^2 - 4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC}$

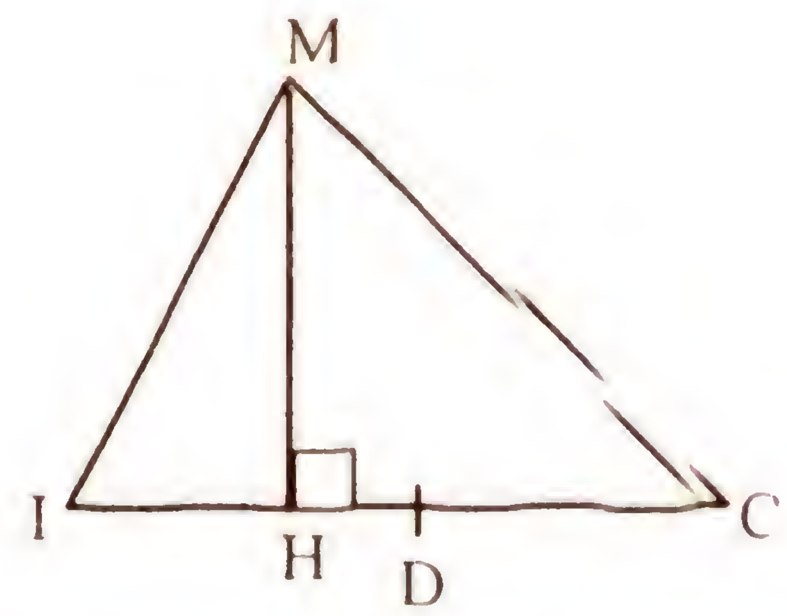
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) = 0$ (vì OA = OB = OC)

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{OM}(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OC}) = 0$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{CG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp CG.$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng CG.

Cách khác: Gọi I là trung điểm của AB, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm M sao cho $MI^2 - MC^2 = k$.




Gọi D là trung điểm của IC, H là hình chiếu của M lên đường thẳng IC, ta có:

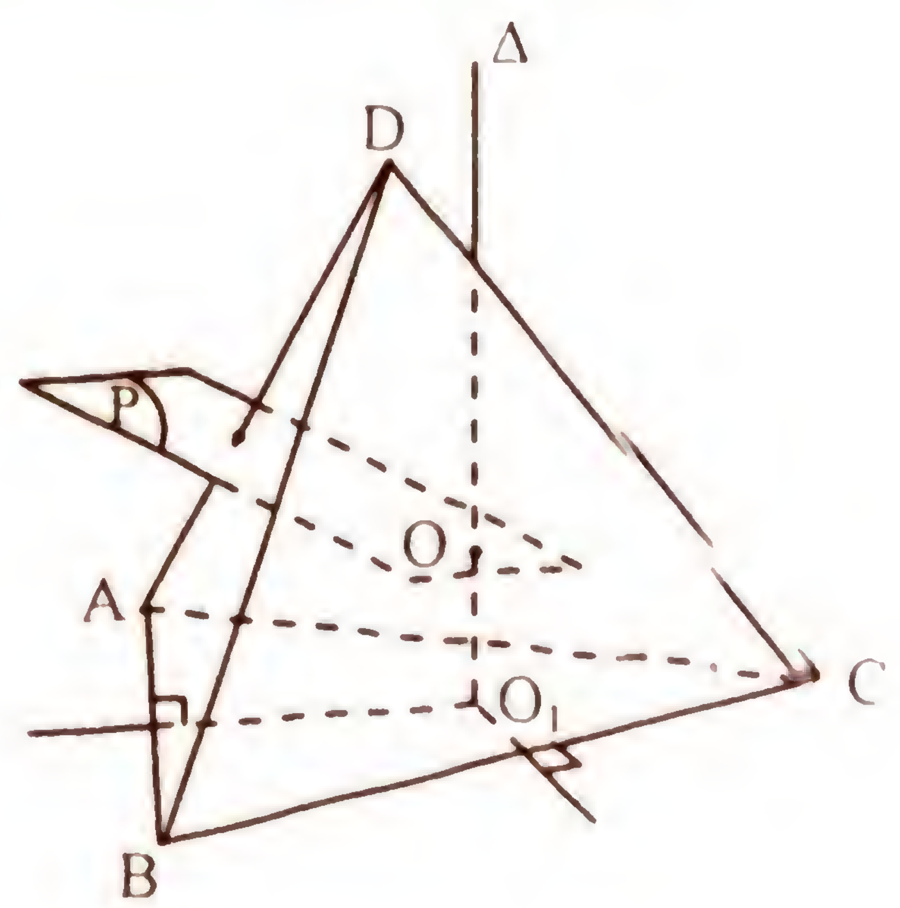
$MI^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{DH} = k.$

Do đó H cố định nên tập hợp các điểm M là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng IC tại H.

<u>**Ví dụ 7**</u>: Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện

**Giải**

Ta có: $OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OD \\ OA = OB = OC \end{cases}$




Tập các điểm cách đều ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC là đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABC) tại tâm $O_1$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của DA thì (P) cắt Δ tại điểm O, đó là điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C. D.

Để ý mp(P) phải cắt Δ vì nếu Δ // (P) hoặc Δ ⊂ (P) thì DA ⊥ (P) suy ra DA ⊥ Δ khi ấy DA nằm trong mp(ABC), mâu thuẫn với giả thiết A, B, C, D không đồng phẳng nên Δ cắt (P).

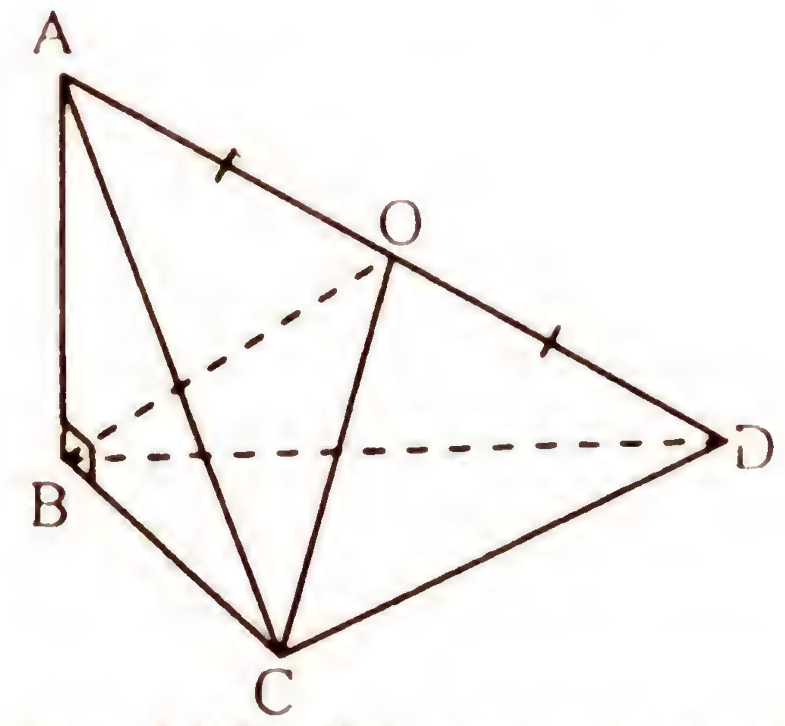
Cách khác: $OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB = OD \\ OA = OB = OC \end{cases}.$

Điểm O là giao điểm của 2 trục của 2 tam giác ABD, ABC. Để ý 2 trục này thuộc mặt phẳng trung trực của cạnh AB.

**Ví dụ 8**: Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc và AB = a, BC = b, CD = c.

a) Tính độ dài AD.    b) Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D.

**Giải**




a) Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp mp(BCD)$.

Mặt khác $BC \perp CD$ nên đường xiên $AC \perp CD$.

Ta có $AD^2 = AC^2 + CD^2$

$= AB^2 + BC^2 + CD^2$

$\Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

b) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^o$ nên gọi O là trung điểm của AD thì trung tuyến

$OB = \dfrac{AD}{2} = OA = OD, OC = \dfrac{AD}{2} = OA = OD$

Do đó OA = OB = OC = OD. Vậy O cách đều 4 đỉnh.

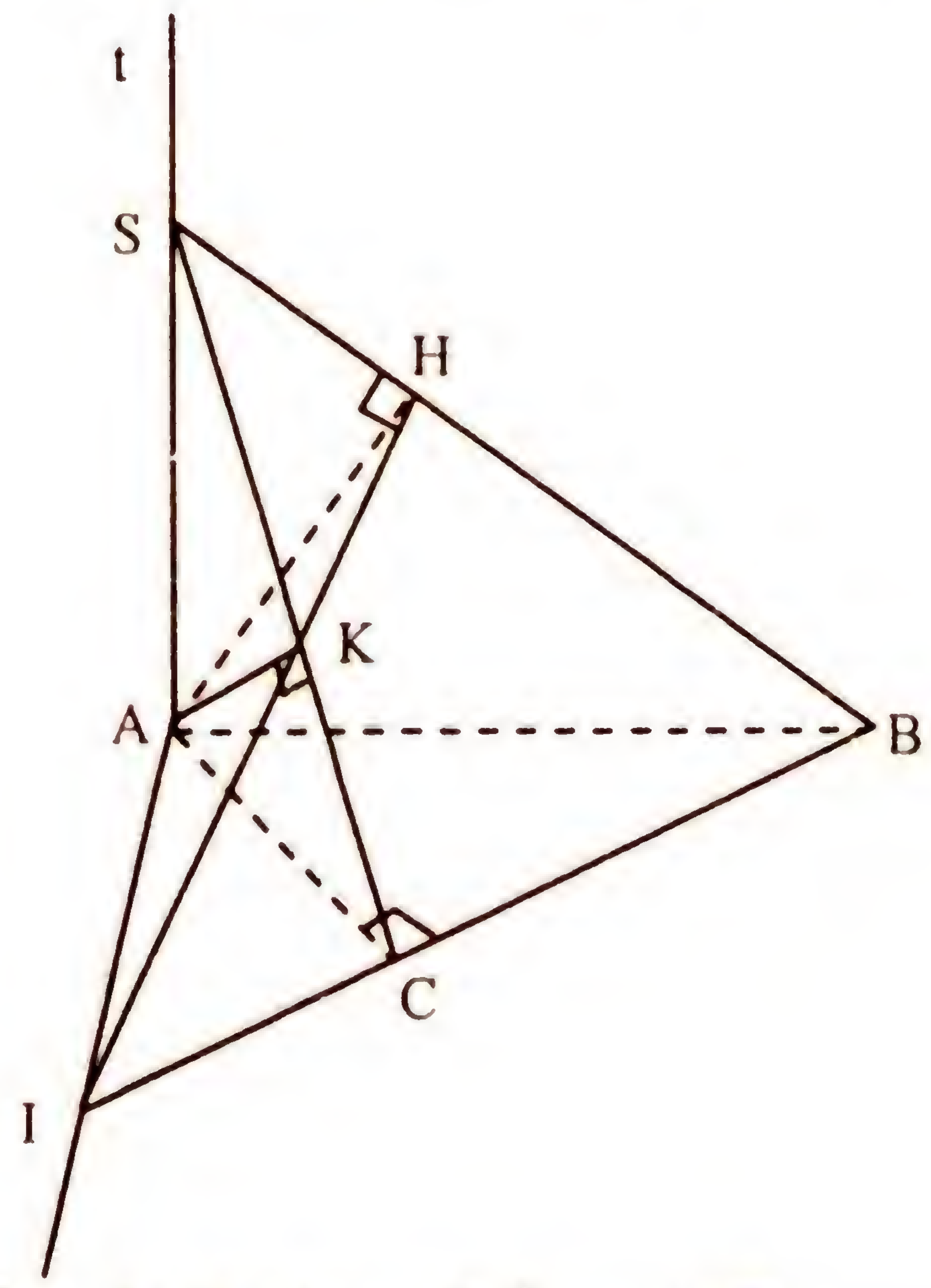
**Ví dụ 9:** Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên nửa đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng (ABC) ta lấy một điểm S. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Tìm tập hợp các điểm H và K khi S di động trên At.

b) Chứng minh AK vuông góc với (SBC) và KH vuông góc với SB.

c) Khi S di động trên At, chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua một điểm cố định.

**Giải**




a) Thuận: Gọi $\alpha$ là mặt phẳng (At; C), ta có: $K \in \alpha$ và $\widehat{AKC} = 90^o$.

Vậy K ở trên đường tròn (L) đường kính AC nằm trong mặt phẳng $\alpha$.

Giới hạn: Ứng với mỗi điểm S trên At, ta xác định điểm K trên (L) là giao điểm của (L) và CS.

Khi S ở tại A thì K ở tại A. Khi S chạy xa ra vô tận trên At thì K tiến tới điểm C nhưng không trùng với C trên nửa đường tròn $(L_1)$ của (L).

Nửa đường tròn $(L_1)$ và At ở cùng một phía đối với đường thẳng AC.

Đảo lại: Gọi K là điểm tuỳ ý trên $(L_1)$ và khác với C. CK cắt At tại S. Ta có $AK \perp CS$. Vậy K là hình chiếu của A trên SC.

Vậy tập hợp các điểm K là nửa đường tròn $(L_1)$ đường kính AC nằm trong mặt phẳng (C, At) và nằm về phía nửa đường thẳng At, trừ điểm C.

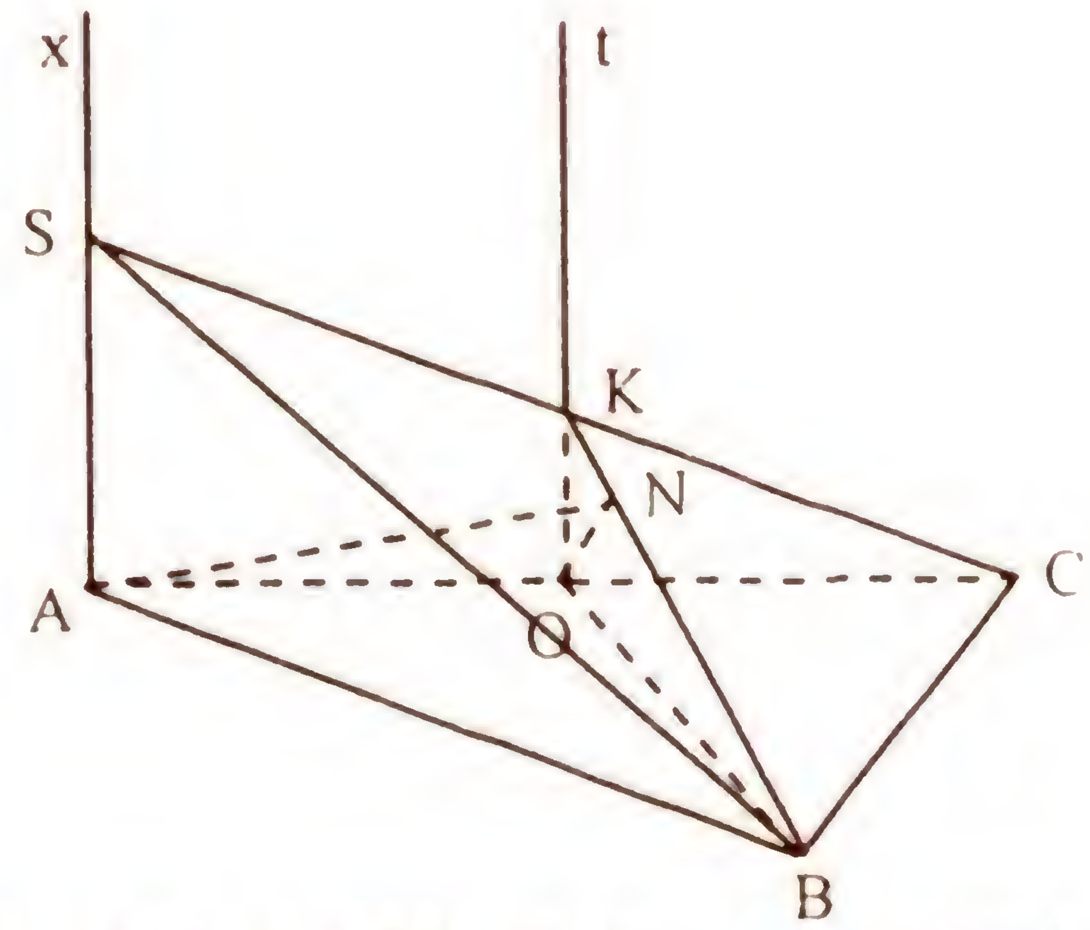
Tương tự, tập hợp các điểm H là nửa đường tròn đường kính AB nằm trong mặt phẳng (B; At) và nằm về phía nửa đường thẳng At, trừ điểm B.

b) Ta có: $BC \perp AC$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$.
mà $AK \perp SC$ nên $AK \perp (SBC)$
Do đó: $AK \perp SB$ mà $AH \perp SB$ nên $SB \perp (AHK)$. Do đó: $SB \perp HK$.

c) Gọi I là giao điểm của BC và HK.
Ta có: $AI \subset (AHK) \Rightarrow AI \perp SB$, ta có: $AI \subset (ABC) \Rightarrow AI \perp SA$.
Suy ra: $AI \perp (SAB) \Rightarrow AI \perp AB$.
Trong mặt phẳng (ABC), đường thẳng AI vuông góc với AB tại A nên AI cố định. Vì đường thẳng BC cũng cố định nên I là điểm cố định. Vậy đường thẳng HK qua I cố định khi S di động trên At.

**Ví dụ 10**: Cho tam giác đều ABC. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy một điểm S di động. Gọi K là trung điểm của SC.
a) Chứng minh rằng khi S di động, đường thẳng BK luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.
b) Tìm tập hợp các hình chiếu của điểm A trên BK khi điểm S di động trên tia Ax.

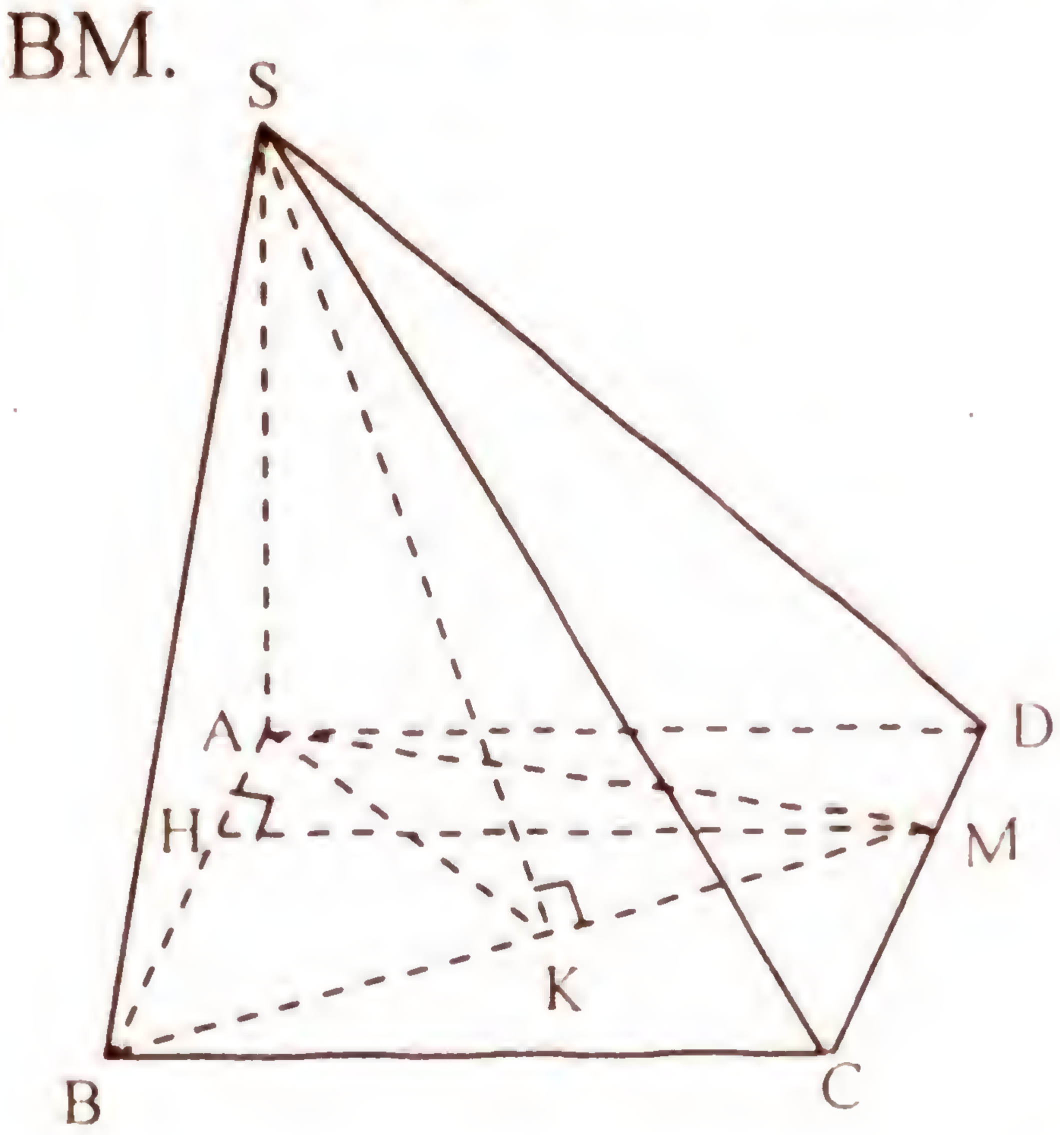
**Giải**




a) Gọi O là trung điểm của AC
Ta có OK // AS. Vậy K ở trên đường thẳng Ot // Ax, Ot cố định. Vậy BK nằm trong mặt phẳng cố định (B, Ot)

b) Ta có: $AO \perp OB$, $AO \perp Ot$
$\Rightarrow AO \perp (B, Ot)$
Gọi N là hình chiếu của A trên BK. Vì $AN \perp BK$ nên theo định lí ba đường vuông góc ta có: $ON \perp BK$. Do đó $\widehat{ONB} = 1v$.
Ta suy ra tập hợp các điểm N là nửa đường tròn đường kính OB, trừ điểm B nằm trong mặt phẳng (B, Ot).

**Ví dụ 11**: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD) và SA = a. Gọi M là điểm di động trên đoạn CD, ta đặt CM = x. Gọi K là hình chiếu của S trên BM.
a) Tính độ dài đoạn SK theo a và x.
b) Tìm tập hợp các điểm K thoả các tính chất nêu ở trên.




**Giải**

a) Ta có: $S_{AMB} = \dfrac{1}{2}AB.MH = \dfrac{1}{2}a^2$

$$\Rightarrow AK = \frac{2S_{AMB}}{BM} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

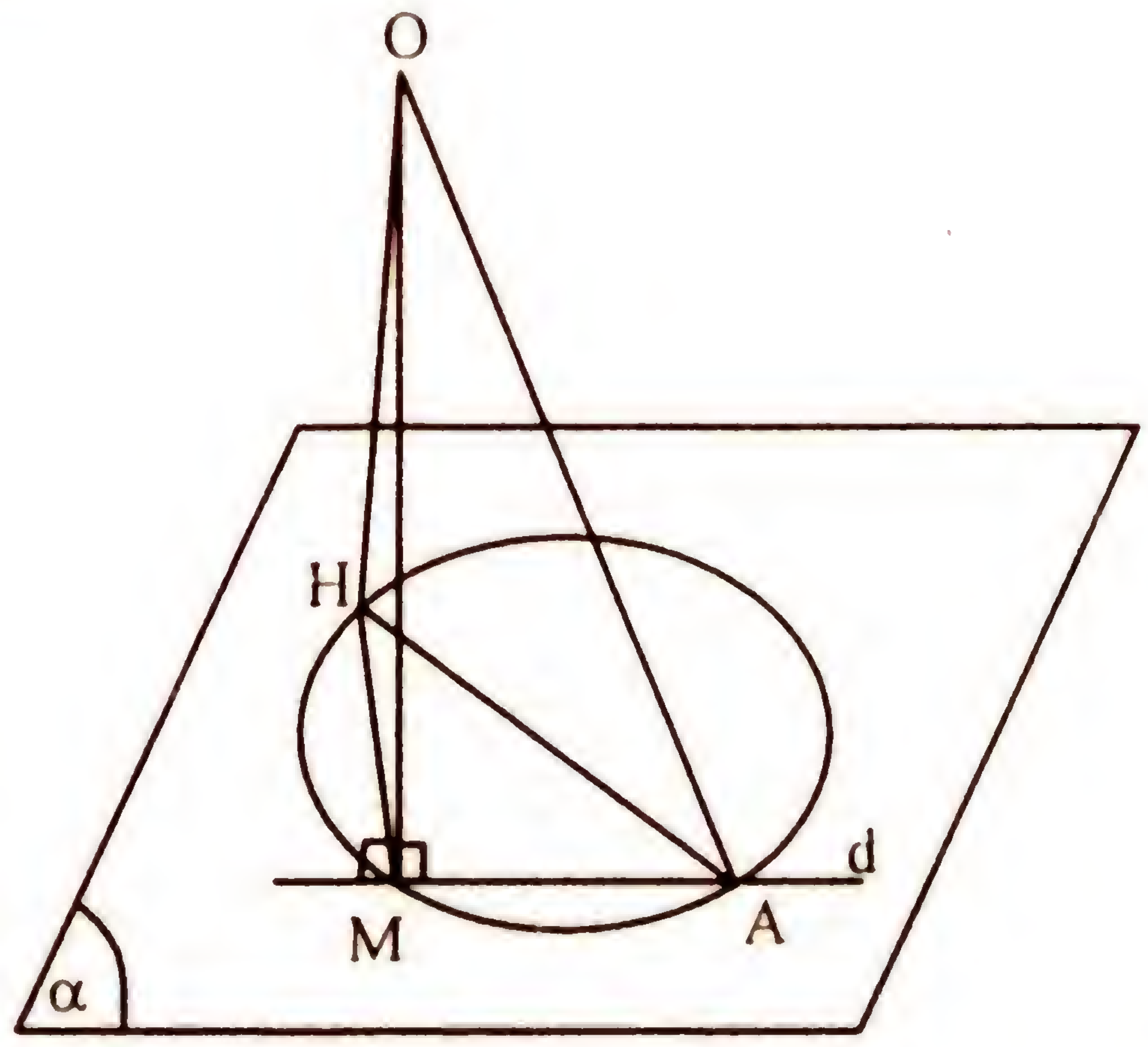
$$SK^2 = SA^2 + AK^2 \Rightarrow SK = a\sqrt{\frac{2a^2 + x^2}{a^2 + x^2}}.$$

b) $\widehat{AKB} = 90^o$, do đó K ở trên đường tròn đường kính AB trong mặt phẳng (ABCD). Mặt khác vì M di động trên đoạn CD nên điểm K luôn luôn nằm trong góc $\widehat{CBD}$. Do đó điểm K ở trên cung OB với O là tâm của hình vuông ABCD.
Đảo lại, ta chứng minh mọi điểm K thuộc cung OB đều thoả điều kiện của bài toán. Vậy tập hợp các điểm K cần tìm là cung OB của đường tròn đường kính AB trên mp(ABCD).

**Ví dụ 12**: Cho mặt phẳng $(\alpha)$ và một điểm O ngoài $(\alpha)$. A là một điểm cố định thuộc $(\alpha)$ sao cho OA không vuông góc với $(\alpha)$, d là một đường thẳng di động trong $(\alpha)$ nhưng luôn luôn qua A. Gọi M là hình chiếu của O trên d.

a) Tìm tập hợp các điểm M thoả các tính chất nêu trên.
b) Tìm vị trí của d để độ dài OM là lớn nhất.

**Giải**



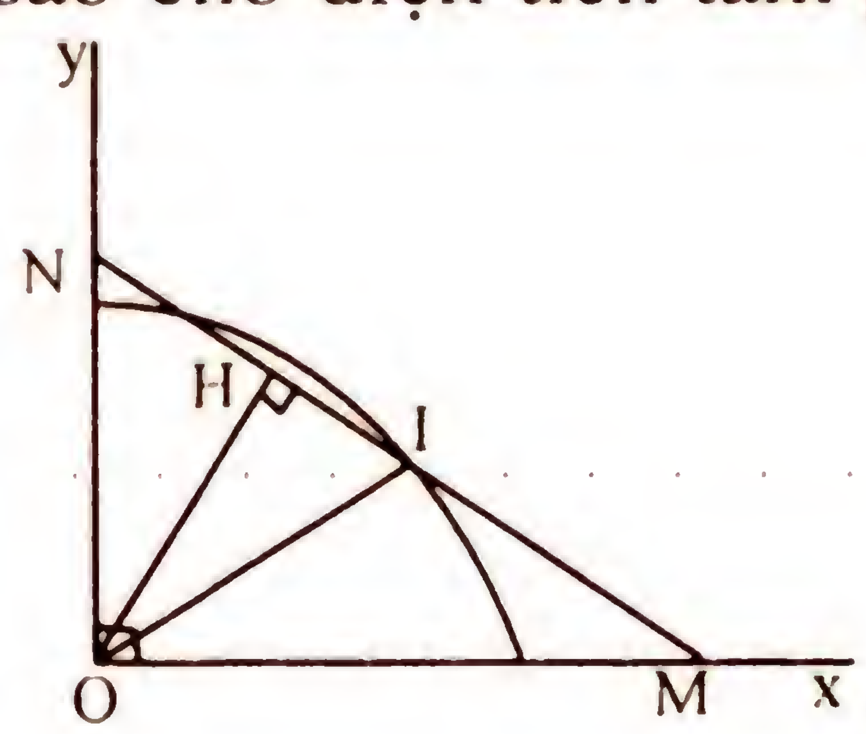

a) Gọi H là hình chiếu của O trên $(\alpha)$. Vì $OM \perp d$ nên $HM \perp d$ (định lí ba đường vuông góc).
Vậy $\widehat{HMA} = 1v$. Do đó M ở trên đường tròn (C) đường kính AH.
Đảo lại, lấy M tuỳ ý trên (C), M khác với A và H. Khi đó: $HM \perp MA$ hay $HM \perp d$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $OM \perp d$.
Kết luận vẫn đúng khi M ở tại A hay H.
Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C) đường kính AH trên mp $(\alpha)$.

b) OM lớn nhất khi và chỉ khi HM lớn nhất.
HM lớn nhất khi và chỉ khi M ở tại A. Khi đó d là tiếp tuyến với (C) tại A, tức là $d \perp AH$.

**Ví dụ 13**: Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên các tia Ox và Oy, lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho MN = a, với a là một độ dài cho trước.

a) Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.
b) Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O, lấy một điểm A cố định. Hãy xác định vị trí của M và N sao cho diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

**Giải**




a) $OI = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{a}{2}$ và I thuộc góc vuông $\widehat{xOy}$ nên:

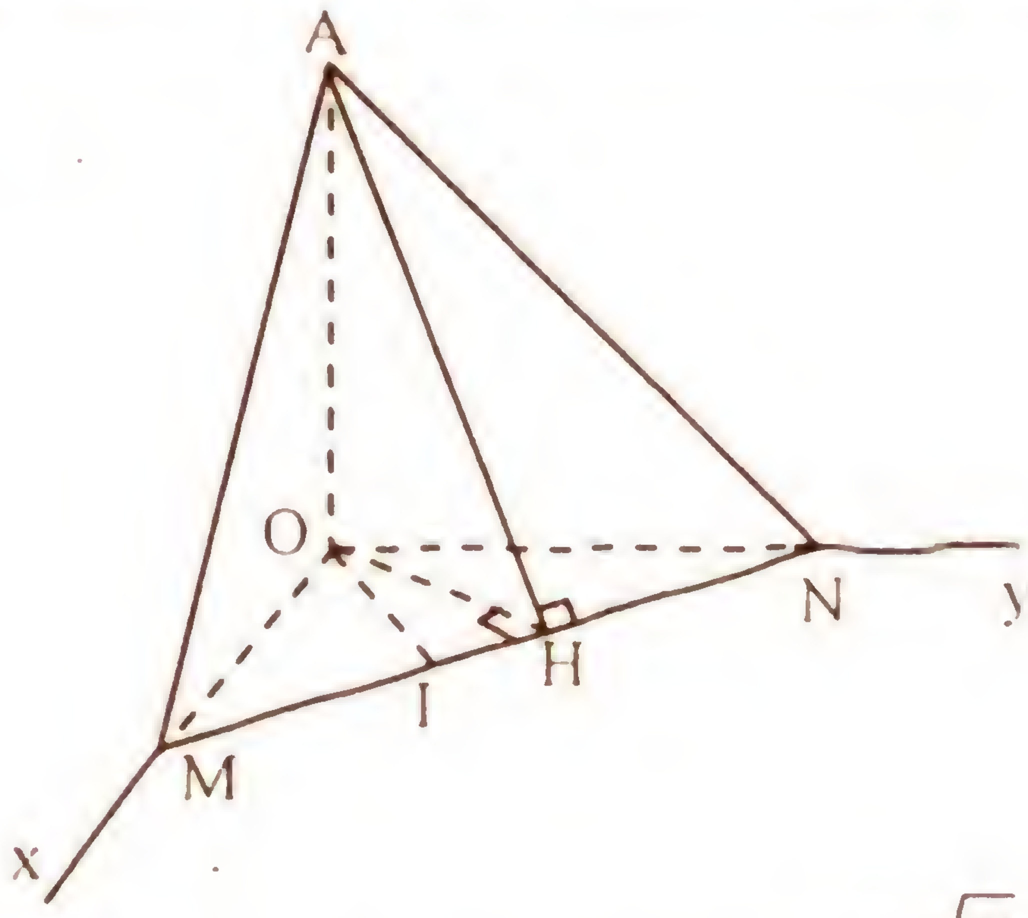
Tập hợp các điểm I là phần của đường tròn

tâm O bán kính $\frac{a}{2}$ nằm trong góc $\widehat{xOy}$.

b) Dựng $AH \perp MN$ thì theo định lí ba đường vuông góc $OH \perp MN$.

Ta có: $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{1}{2}a.AH$.

Diện tích tam giác AMN lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi OH lớn nhất.




Trong tam giác vuông OHI ta luôn luôn có:

$$OH \le OI \Rightarrow OH \le \frac{a}{2}$$

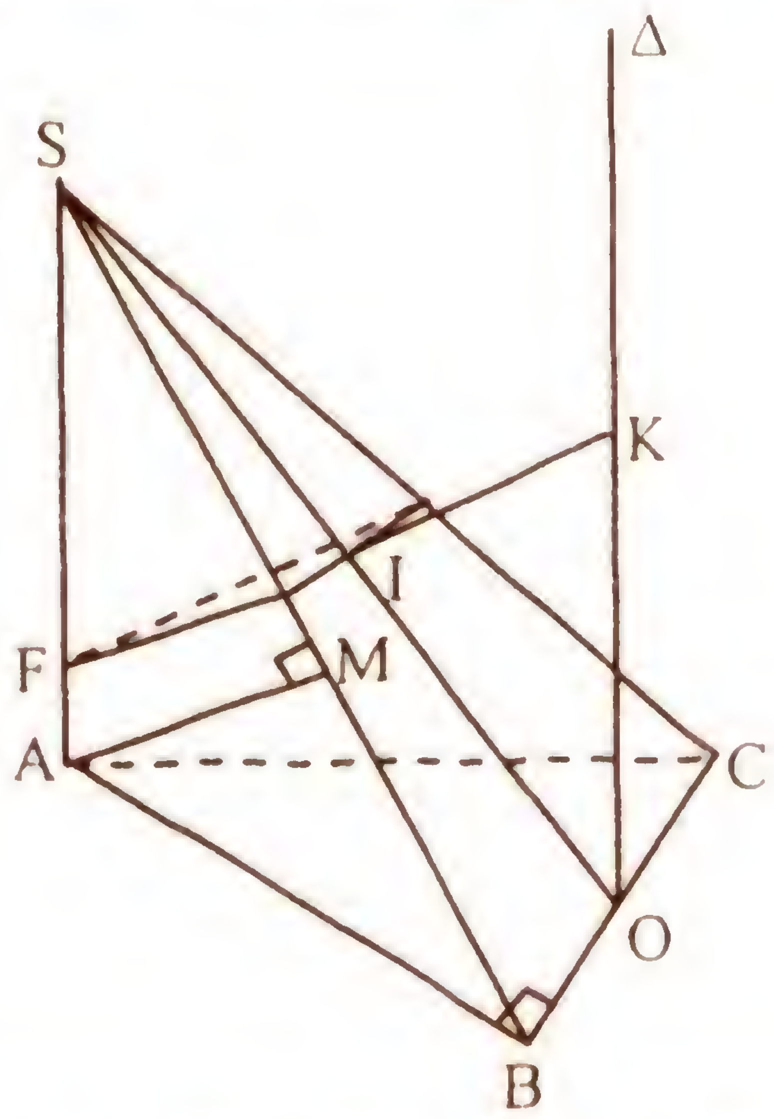
Giá trị lớn nhất của OH là $\frac{a}{2}$ giá trị này đạt được khi và chỉ khi H trùng với I, khi đó OMN là tam giác vuông cân.

Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi: $OM = ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

**<u>Ví dụ 14</u>**: Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a, SA vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi ($\alpha$) là mặt trung trực của SB, O là trung điểm của BC, $\Delta$ là đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng ABC.

a) Dựng giao điểm của $\Delta$ và mặt phẳng ($\alpha$).

b) Tính OK.




**Giải**

a) Trước hết ta xác định mặt phẳng ($\alpha$).

Gọi M là trung điểm của đoạn SB.

Dựng đường cao AH của tam giác SAB rồi dựng MF // HA, F $\in$ SA, ta được: $MF \perp SB$.

Mặt khác ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Dựng MN // BC, N $\in$ SC, thì: $MN \perp SB$. Suy ra ($\alpha$) là mặt phẳng (MNF).

Vì $\Delta \perp (ABC)$ nên $\Delta$ // AS.

Gọi $\beta$ là mặt phẳng (SA, $\Delta$). Ta tìm giao tuyến của $\beta$ và $\alpha$. Ta có: F là điểm chung thứ nhất của $\beta$ và $\alpha$.

Trong (SBC) gọi I là giao điểm của MN và SO thì I là điểm chung thứ hai của $\beta$ và $\alpha$. Do đó: $\beta \cap \alpha = FI$.

Đường thẳng FI cắt $\Delta$ tại K thì K chính là giao điểm cần dựng của $\Delta$ và $\alpha$.

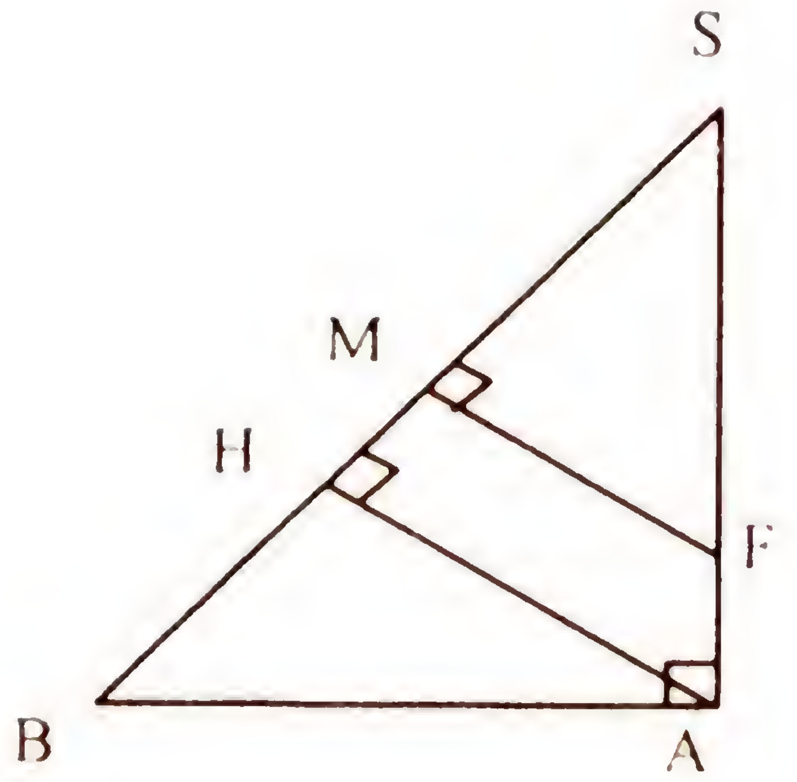
b) Vì I là trung điểm của SO nên OK = SF

Hai tam giác vuông SMF và SAB đồng dạng nên ta có:

$$\frac{SF}{SB} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow SF = \frac{SB.SM}{SA}$$

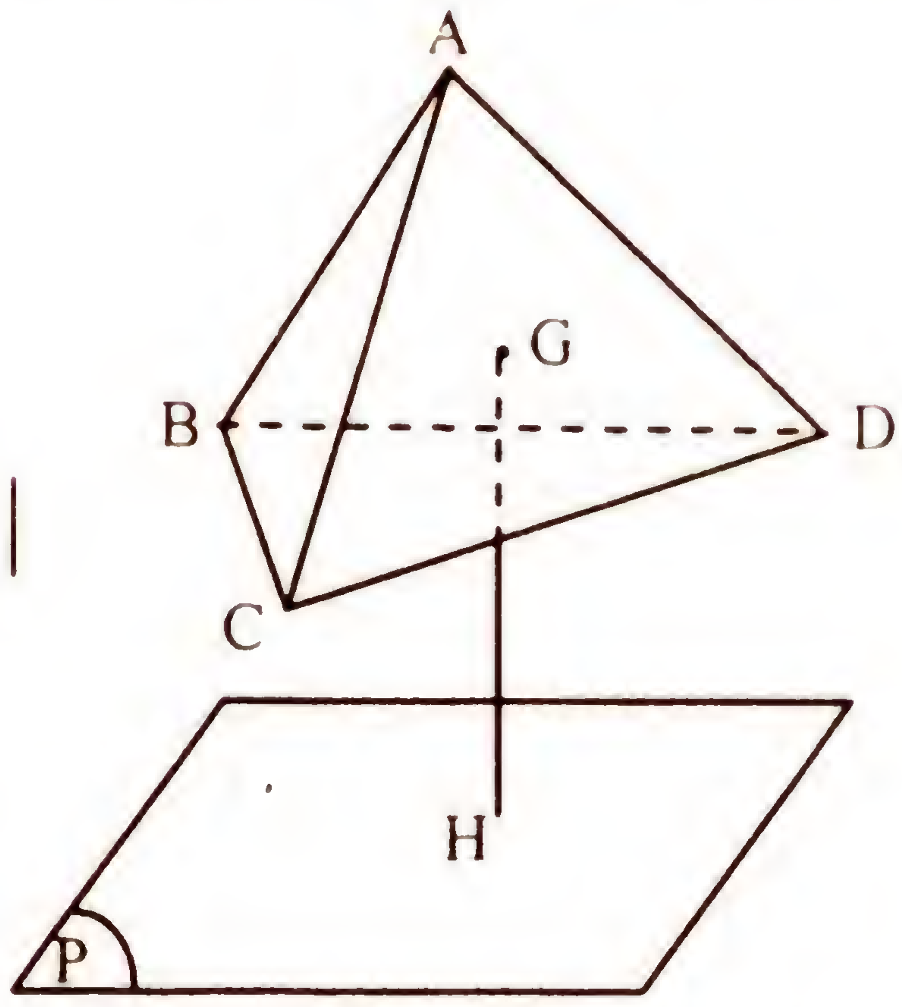
với $SB = a\sqrt{3}$, $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = a\sqrt{2}$.

Ta có $SF = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Vậy $OK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.




**Ví dụ 15**: Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) để $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ bé nhất.

**Giải**




Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD.

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

Nên $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}|$

Do đó T bé nhất khi MG bé nhất, mà G cố định và M thuộc (P) nên MG bé nhất khi M là hình chiếu của trọng tâm G lên mặt phẳng (P).

**Ví dụ 16**: Cho tứ diện ABCD và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc d để $X = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 + 4MD^2$ bé nhất.

**Giải**

Gọi I là điểm sao cho: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{ID} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) + 4(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD} = 10\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

Do đó I cố định. Hạ $IH \perp d$ thì H cố định.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } X &= \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 + 4\overrightarrow{MD}^2 \\
&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\
&= 10MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2IC^2 + 4ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{ID}) \\
&= 10MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 4ID^2 \\
&\geq 10.HI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 4ID^2\text{: không đổi.}
\end{aligned}$$

Vậy X bé nhất khi M là hình chiếu H của I lên d.

**Ví dụ 17**: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là nửa lục giác đều AB = BC = CD = a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tìm trên cạnh bên SB một điểm $M \neq B$ sao cho $\widehat{AMD} = 90^o$.

b) Mặt phẳng (AMD) cắt hình chóp theo một thiết diện, tính diện tích thiết diện đó.

**Giải**

Ta dùng vectơ với hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$.

a) Đặt $\overrightarrow{SM} = \alpha.\overrightarrow{SB} = \alpha(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) = \alpha(\vec{a} - \vec{c})$

Với $0 \le \alpha < 1$ vì $M \not\equiv B$. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SM} = -\vec{c} - \alpha(\vec{a} - \vec{c}) = -\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}.$$

Ta có: $\widehat{AMD} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = 0$

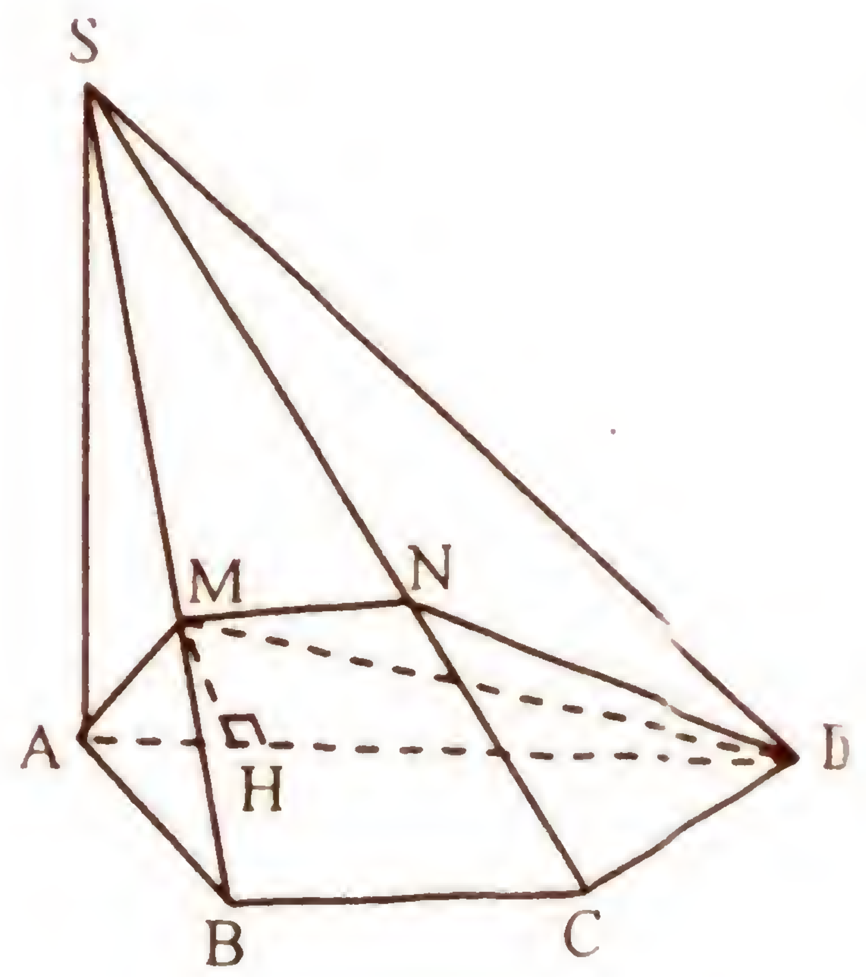
$$\Leftrightarrow [-\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}][-\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\vec{a}^2 - \alpha(\vec{a}.\vec{b}) + (\alpha - 1)^2\vec{c}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2a^2 - \alpha(a^2) + (\alpha - 1)^2.3a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + (\alpha^2 - 2\alpha + 1)3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 7\alpha + 3 = 0, \text{ chọn } \alpha = \frac{3}{4}.$$




Do đó $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$

M thuộc đoạn SB sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{3}{4}$.

b) Thiết diện là hình thang AMND có $AD = 2a$.

$$\frac{MN}{BC} = \frac{SM}{SB} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{3}{4}a. \text{ Hạ } MH \perp AD.$$

Đặt $\overrightarrow{AH} = \beta\overrightarrow{AD}$ thì $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} = \beta\vec{b} - \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow [\beta\vec{b} - \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}]\vec{b} = 0$

$$\Leftrightarrow \beta\vec{b}^2 - \alpha\vec{a}.\vec{b} + (\alpha - 1)\vec{c}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \beta(4a^2) - \alpha(a^2) + 0 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \beta(4a^2) - \frac{3}{4}a^2 = 0 \Leftrightarrow 4\beta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{16}.$$

Do đó $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{16}\overrightarrow{AD}$. Ta có $\overrightarrow{MH} = \frac{3}{16}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}$

$$\text{Nên } MH^2 = \left(\frac{3}{16}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{256}(3\vec{b} - 12\vec{a} - 4\vec{c})^2$$

$$= \frac{1}{256}\left(9\vec{b}^2 + 144\vec{a}^2 + 16\vec{c}^2 - 72\vec{a}.\vec{b} - 0 + 0\right)$$

$$= \frac{1}{256}(36a^2 + 144a^2 + 48a^2 - 72a^2) = \frac{156a^2}{256}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{a}{16}\sqrt{156} = \frac{a}{8}\sqrt{39}$$

Diện tích $S_{AMND} = \frac{1}{2}(AD + MN).MH = \frac{1}{2}(2a + \frac{3}{4}a)\frac{a}{8}\sqrt{39} = \frac{11a^2}{64}\sqrt{39}$.

**Ví dụ 18:** Cho hình chóp S.ABCD đáy là nửa lục giác đều ABCD có AB = BC = CD = a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M và I là hai điểm sao cho $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $4\overrightarrow{IS} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Mặ phẳng (AMI) cắt SC tại N.

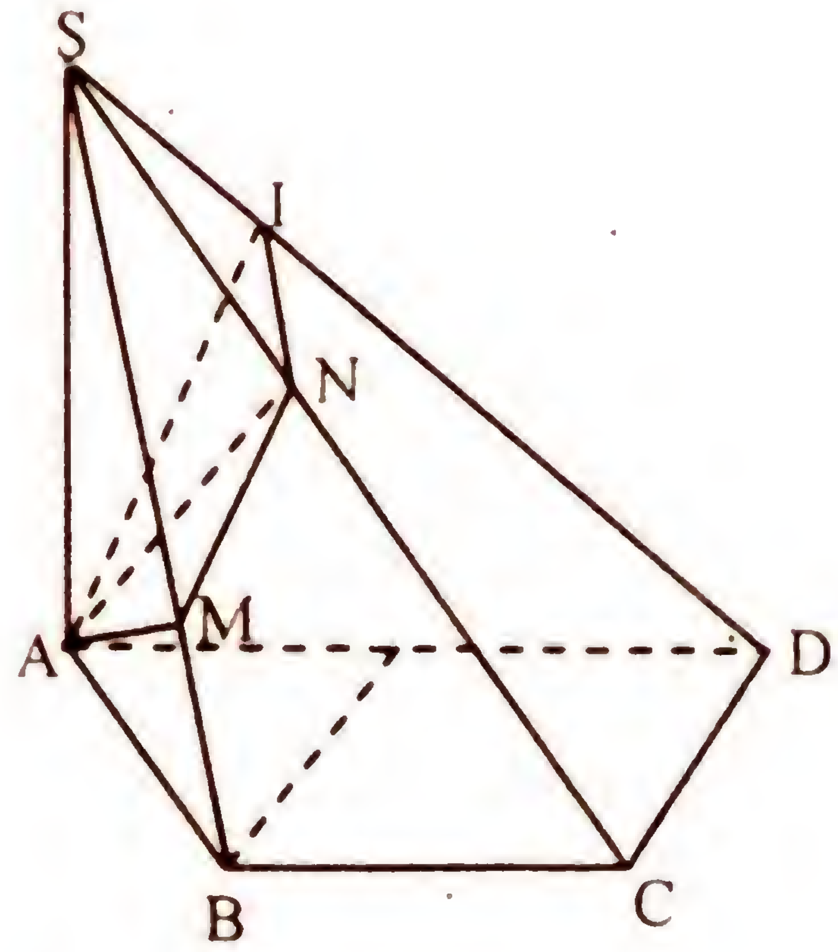
a) Chứng minh N là trung điểm SC.

b) Chứng minh SD vuông góc với mặt phẳng (AMI).

c) Chứng minh $\widehat{ANI} = 90^\circ$ ; $\widehat{AMI} = 90^\circ$

d) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMI) và hình chóp S.ABCD.

**Giải**




Chọn hệ vectơ cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$

thì $\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 60^\circ = a.2a.\dfrac{1}{2} = a^2$

$\vec{a}.\vec{c} = 0;\ \vec{b}.\vec{c} = 0$

a) Ta có $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BS} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{4}(\vec{c} - \vec{a})$

$$\overrightarrow{SI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{SD} = \frac{3}{7}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}) = \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SI} = \vec{c} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}$$

Vì N thuộc SC nên có số $\alpha$ sao cho $\overrightarrow{SN} = \alpha\overrightarrow{SC} = \alpha(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS})$.

$$\overrightarrow{SN} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AS}) = \alpha(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \vec{c})$$

Vì $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AI}$ đồng phẳng nên có số x, y sao cho $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AI}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SN} = \vec{c} + \alpha(\vec{a} + \dfrac{\vec{b}}{2} - \vec{c}) = \alpha\vec{a} + \dfrac{\alpha}{2}\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AI}$

$$\Leftrightarrow \alpha\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c} = x(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}) + y(\frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \alpha\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c} = \frac{3}{4}x\vec{a} + \frac{3}{7}y\vec{b} + (\frac{1}{4}x + \frac{4}{7}y)\vec{c}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{4}x \\ \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{7}y \\ 1 - \alpha = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{4}{7}y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{7}{12} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \dfrac{7}{12}\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$

Nên $\overrightarrow{SN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ do đó N là trung điểm của SC.

b) Ta có $\overrightarrow{SD} = \vec{b} - \vec{c}$ nên: $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{AI} = (\vec{b} - \vec{c})(\dfrac{3}{7}\vec{b} + \dfrac{4}{7}\vec{c})$

$$= \frac{3}{7}\vec{b}^2 + \frac{4}{7}\vec{b}.\vec{c} - \frac{3}{7}\vec{b}\vec{c} - \frac{4}{7}\vec{c}^2 = 0$$

Do đó $SD \perp AI$, và $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{AM} = (\vec{b} - \vec{c})(\dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{c})$

$$= \frac{3}{4}\vec{a}.\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}.\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{a}.\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{c}^2 = 0$$

Do đó $SD \perp AM$. Vậy $SD \perp mp(AMI)$

c) Ta có $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AN} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{5}{28}\vec{b} + \dfrac{1}{14}\vec{c}$

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NI} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} + \frac{1}{14}\vec{c}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{5}{56}\vec{a}.\vec{b} + 0 - \frac{1}{8}\vec{a}.\vec{b} + \frac{5}{112}\vec{b}^2 + 0 - 0 + 0 + \frac{1}{28}\vec{c}^2 = 0$$

$\Rightarrow AN \perp NI$ và $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = -\dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{3}{7}\vec{b} + \dfrac{9}{28}\vec{c}$

Tương tự $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MI} = 0 \Rightarrow AM \perp MI$.

d) $AM^2 = \left(\dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{c}\right)^2 = \dfrac{9}{16}\vec{a}^2 + 0 + \dfrac{1}{16}\vec{c}^2 = \dfrac{12a^2}{16} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$AN^2 = \left(\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\vec{a}^2 + \dfrac{1}{16}\vec{b}^2 + \dfrac{1}{4}\vec{c}^2 + \dfrac{1}{4}\vec{a}\vec{b} + 0 + 0 = \dfrac{6}{4}a^2$

$\Rightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$IN^2 = (\overrightarrow{NI})^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{5}{28}\vec{b} + \dfrac{1}{14}\vec{c}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(-\vec{a} + \dfrac{5}{14}\vec{b} + \dfrac{1}{7}\vec{c}\right)^2$

$= \frac{1}{4}\left[\vec{a}^2 + \frac{25}{196}\vec{b}^2 + \frac{1}{49}\vec{c}^2 - \frac{5}{7}\vec{a}\vec{b} - \frac{2}{7}\vec{a}\vec{c} + \frac{5}{49}\vec{b}\vec{c}\right] = \frac{1}{4}.\frac{42a^2}{49}$

$\Rightarrow NI = \frac{a\sqrt{42}}{14}$

$S_{ANI} = \frac{1}{2}AN.\ NI = \frac{6a^2\sqrt{7}}{56} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28}$

Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$= \frac{1}{16}(6\vec{a}^2 + 3\vec{a}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}^2) = \frac{15a^2}{16}$

nên $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{AM.AN} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin(AM; AN) = \frac{\sqrt{14}}{8}$

$S_{MAN} = \frac{1}{2}AM.\ AN.\sin(AM; AN) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{32}$

Vậy $S_{AMNI} = S_{ANI} + S_{MAN} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{28} + \frac{3a^2\sqrt{7}}{32} = \frac{45a^2\sqrt{7}}{224}$.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

**1.** Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng $\alpha$. Các mệnh đề Đ, S?

a) Nếu $a // \alpha$ và $b \perp \alpha$ thì $a \perp b$

b) Nếu $a // \alpha$ và $b \perp a$ thì $b \perp \alpha$

c) Nếu $a // \alpha$ và $b // a$ thì $b // \alpha$

d) Nếu $a \perp \alpha$ và $b \perp \alpha$ thì $a // b$

**ĐS:** a) Đ b) S c) S d) S

**2.** Chứng minh nếu có một điểm cách đều bốn đỉnh của một tứ giác thì tứ giác đó có đường tròn ngoại tiếp.

**HD:** dùng hình chiếu các đoạn xiên bằng nhau

**3.** Cho tứ diện ABCD có AB = 5a, BC = 3a, CD = 4a đôi một vuông góc.

a) Tính đoạn AD　　　　b) Tìm điểm O cách đều A, B, C, D.

**ĐS:** b) O là trung điểm của AD

**4.** Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tìm điểm O cách đều 4 đỉnh A, B, C, D và tính đoạn OA.

**HD:** O là trọng tâm tứ diện

**5.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O.

Biết rằng SA = SC, SB = SD. Chứng minh: $AC \perp SD$

**6.** Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).Gọi AH là đường cao của tam giác SAB và AK là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh $HK \perp SC$.

**HD:** Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

**7.** Tứ diện OABC có các cạnh OA = a, OB = b, OC= c đôi một vuông góc với nhau. Hạ $OH \perp (ABC)$. Tính đoạn OH.

**HD:** dùng hệ thức $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

**8.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' . Tính góc giữa :

a) hai đường thẳng AC và B'D'

b) hai đường thẳng AB' và BC'

c) hai đường thẳng BD' và AC

d) hai đường thẳng AC' và CD'.

**ĐS:** a) $90^0$ b) $60^0$ c) $90^0$

**9.** Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh AB = c và nằm trong một mặt phẳng (P), cạnh AC = b và tạo với mặt phẳng (P) góc $\alpha$ .

Tính sin của góc tạo bởi cạnh BC với mp(P).

**HD:** Xác định hình chiếu của A lên mp(P).

**10.** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Đường chéo AC' hợp với 3 mặt chung đỉnh góc $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ và 3 cạnh chung đỉnh góc x, y, z.

a) Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

b) Chứng minh $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$

**11.** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O và có SB = SD.

a) Chứng minh (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD

b) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Chứng minh SH = SK, OH = OK và HK song song với BD.

**HD:** a) mặt phẳng trung trực là mặt phẳng vuông góc với đoạn đó tại trung điểm

**12.** Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại O, lấy điểm S sao cho SO = b. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'

a) Chứng minh B'D' // BD. Từ đó suy ra cách dựng B' và D'

b) Xác định và tính diện tích của thiết diện AB'C'D'.

**HD:** thiết diện có 2 đường chéo vuông góc

**13.** Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = a, SA vuông góc với (ABC), SA = b. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB.

Xác định và tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P).

**14.** Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$ cho trước.

**HD:** dùng công thức hiệu bình phương

**15.** Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 .$$

**16.** Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$$

**ĐS:** mặt phẳng đi qua trọng tâm tứ diện và vuông góc với AD.

**17.** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA vuông góc với (ABCD) và SA = a.

a) Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh AI vuông góc với (SCD)

b) M là điểm di động trên đoạn SD. Tìm tập hợp các hình chiếu của O trên CM.

**18.** Cho tứ diện ABCD các các cạnh thỏa mãn:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Chứng minh có ít nhất 1 mặt là tam giác nhọn.

**19.** Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 - MD^2$ nhỏ nhất.

**ĐS:** M là hình chiếu của điểm I là điểm sao cho $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ lên mặt phẳng (P).

**20.** Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M thuộc (ABC) sao cho:

$|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.

**ĐS:** M là hình chiếu của điểm I là điểm sao cho

$4\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - 6\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ lên mặt phẳng (ABC).

# §4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

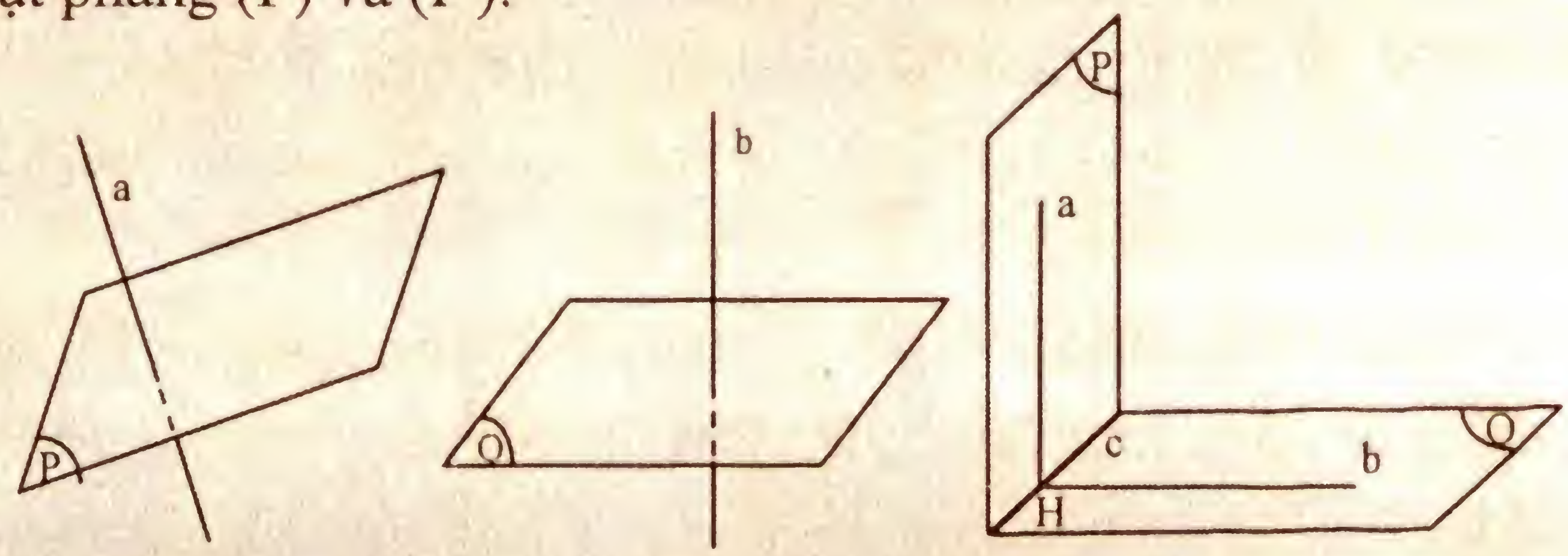
## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc của chúng là $0^o$.

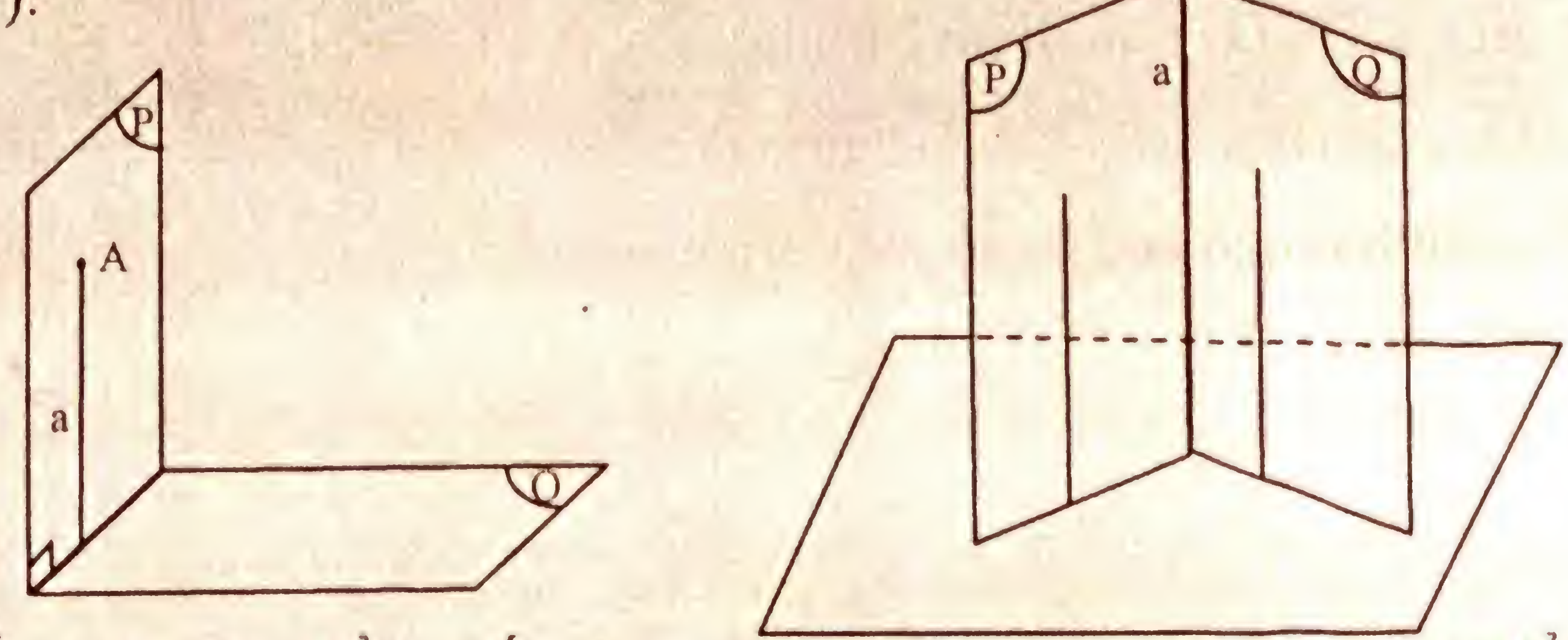
Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ nếu mặt phẳng (R) vuông góc với Δ, lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến p và q thì góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng p, q.

- Diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mặt phẳng (P') thì S' = S.cosφ, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

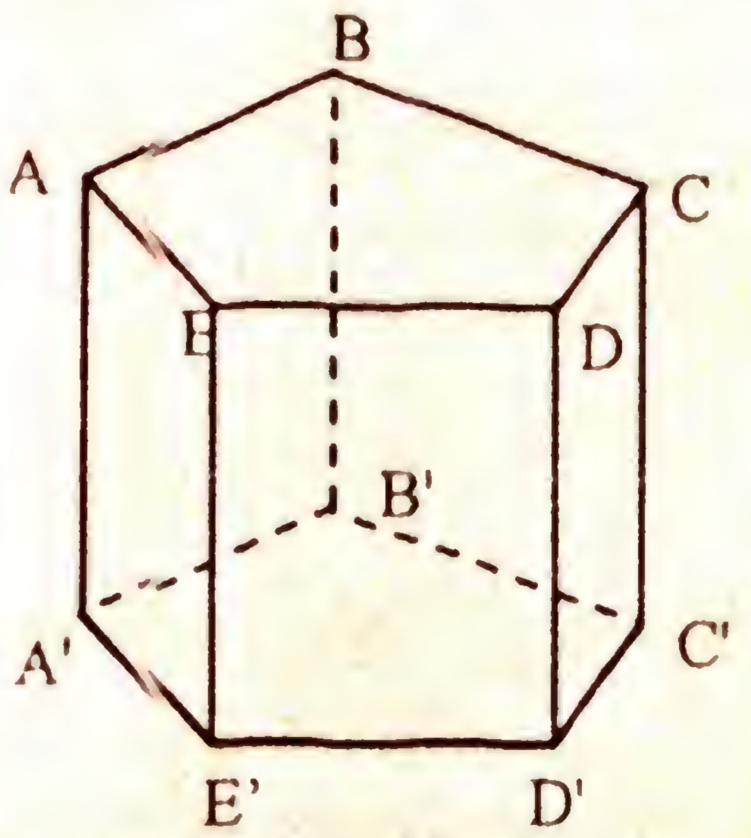


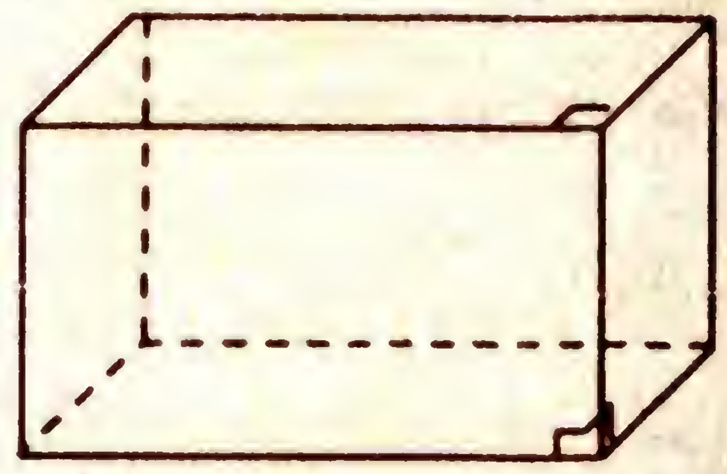

- Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90^o$.
- Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

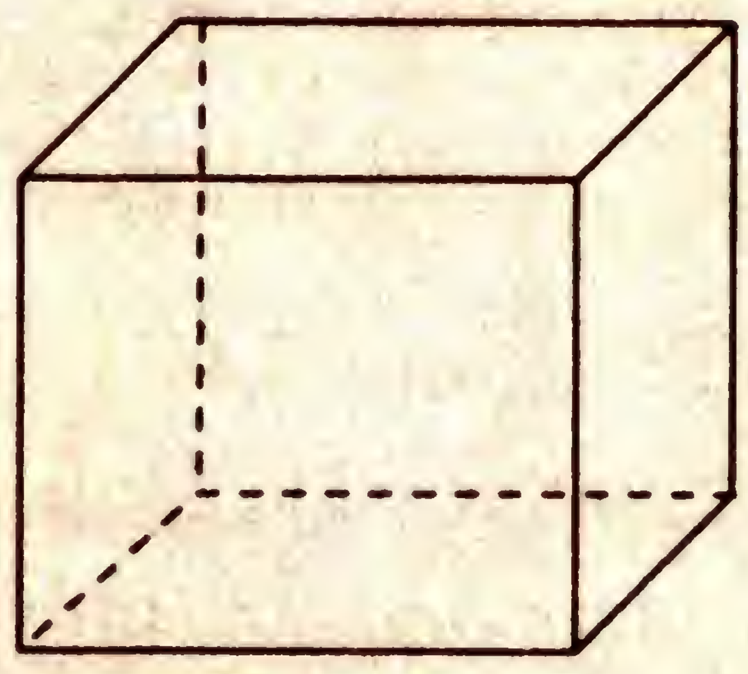



- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

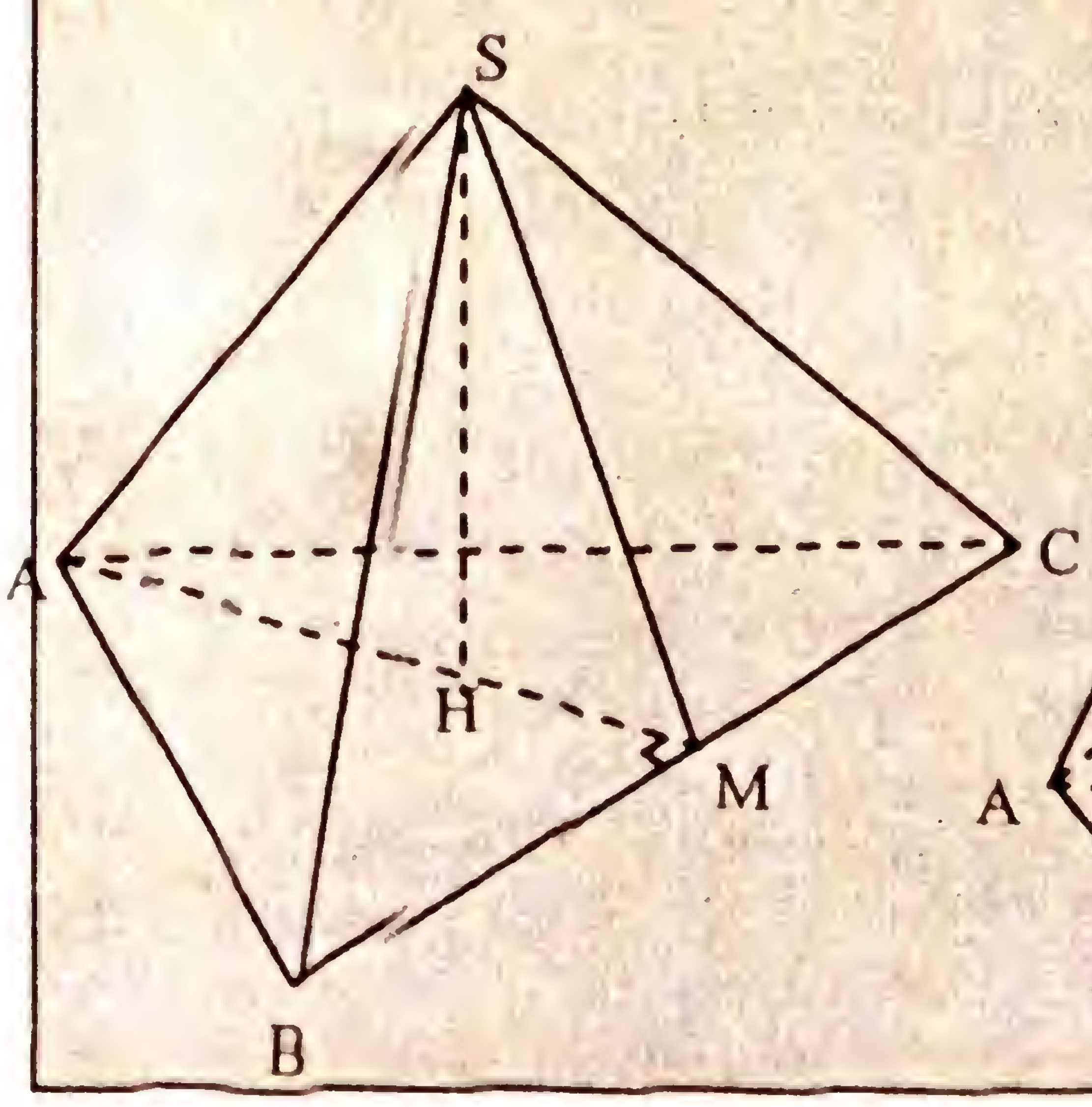
- Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).
- Hình lăng trụ đứng: hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đều: hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
- Hình hộp đứng: hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp chữ nhật: hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương: hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

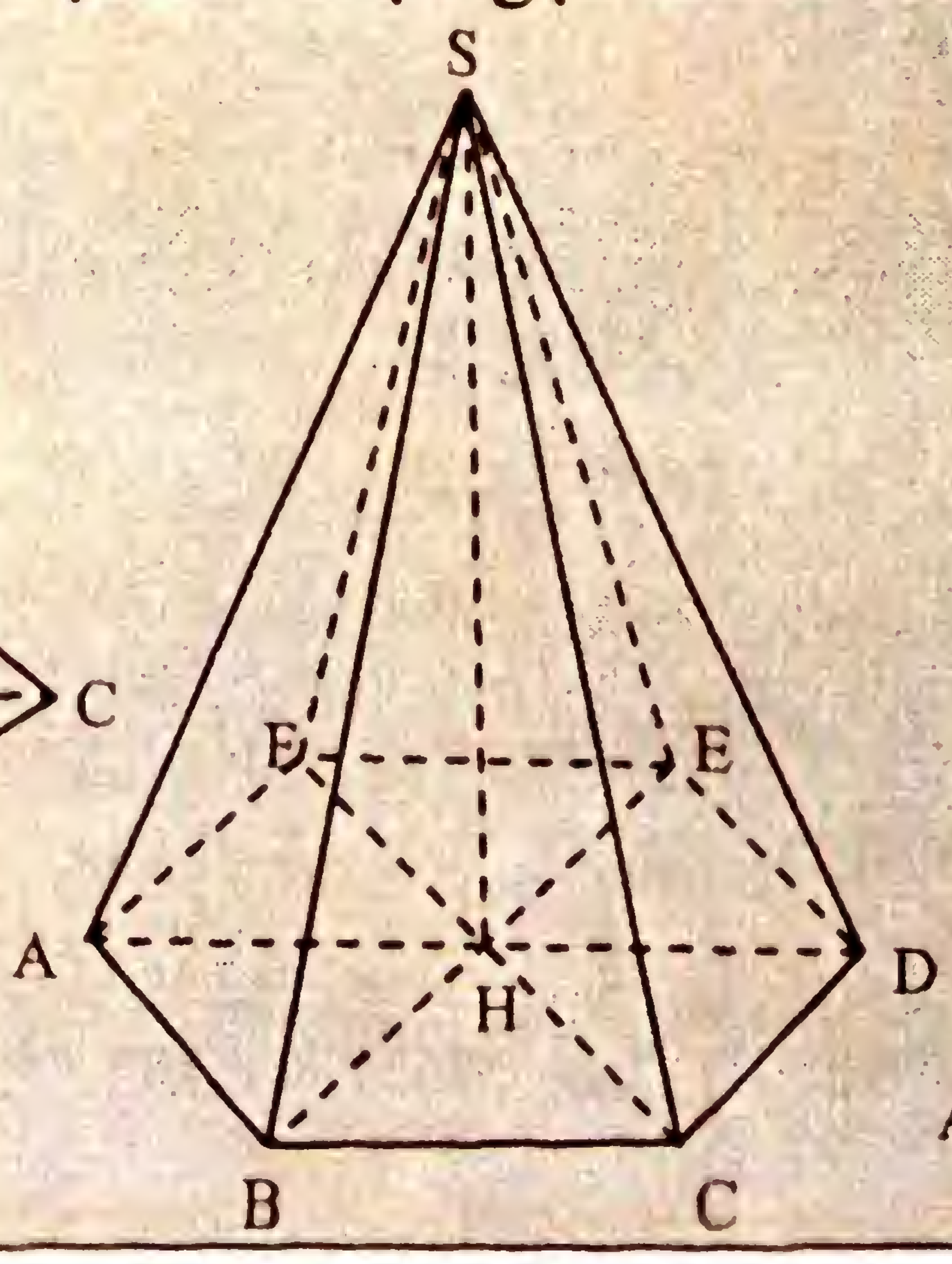


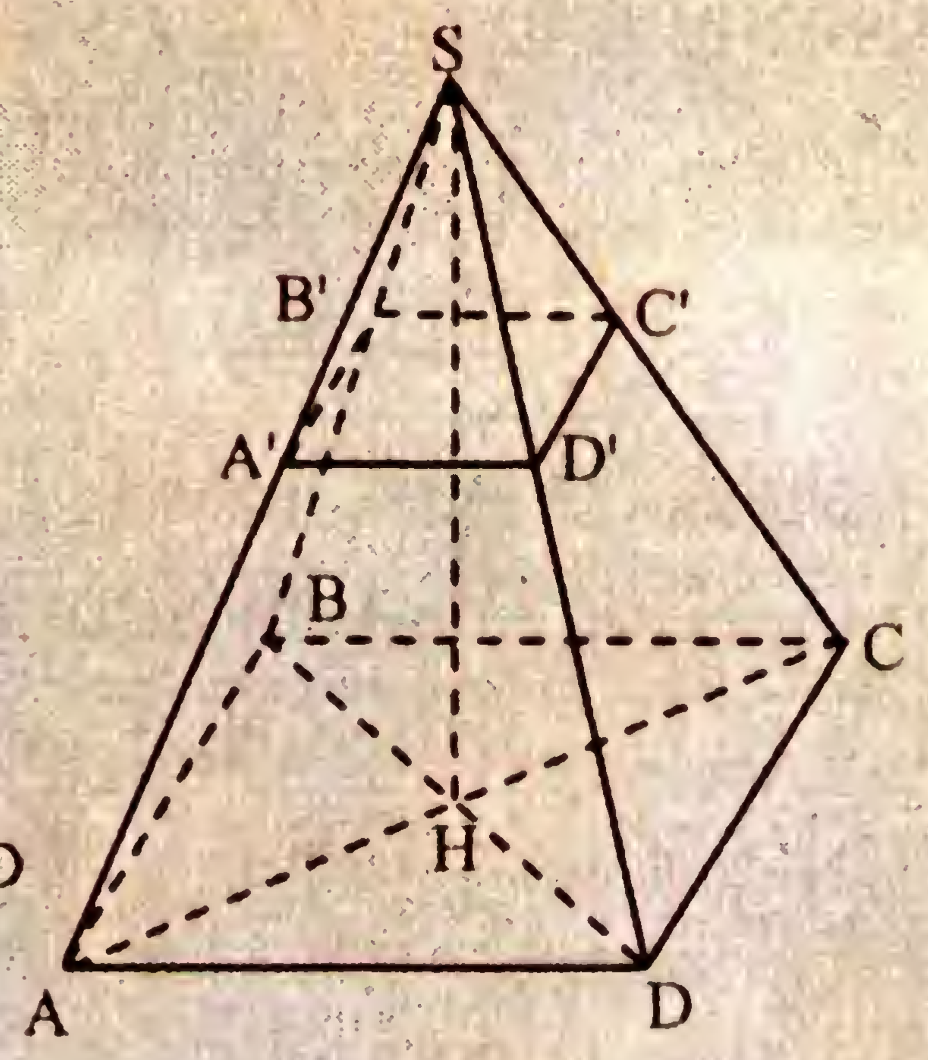





- Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- Khi cắt chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là hình chóp cụt đều.




## B. PHÂN DẠNG TOÁN

### DẠNG 1: CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

- Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng $90^o$.

Chú ý: - Việc chứng minh 2 mặt phẳng vuông góc đưa về chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và việc chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng lại đưa về chứng minh đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng.

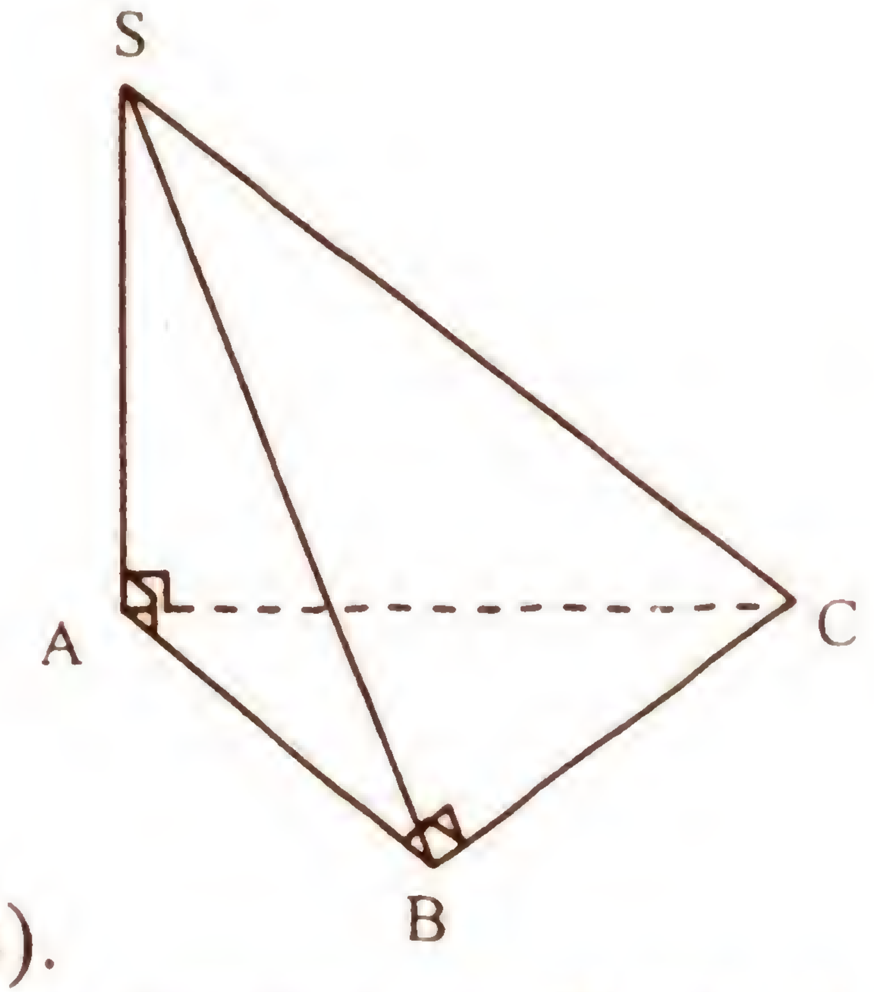
- Vấn đề chứng minh hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng là nền tảng cơ bản trong vận dụng giải toán. Đặc biệt, nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

**<u>Ví dụ 1:</u>** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông tại B, SA $\perp$ mp(ABC). Chứng minh

a) mp(SAB) $\perp$ mp(ABC), mp(SAC) $\perp$ mp(ABC).

b) mp(SBC) $\perp$ mp(SAB).

**Giải**




a) Vì SA $\perp$ mp(ABC)
và SA $\subset$ mp(SAB), mp(SAC)
nên mp(SAB) $\perp$ mp(ABC),
mp(SAC) $\perp$ mp(ABC)

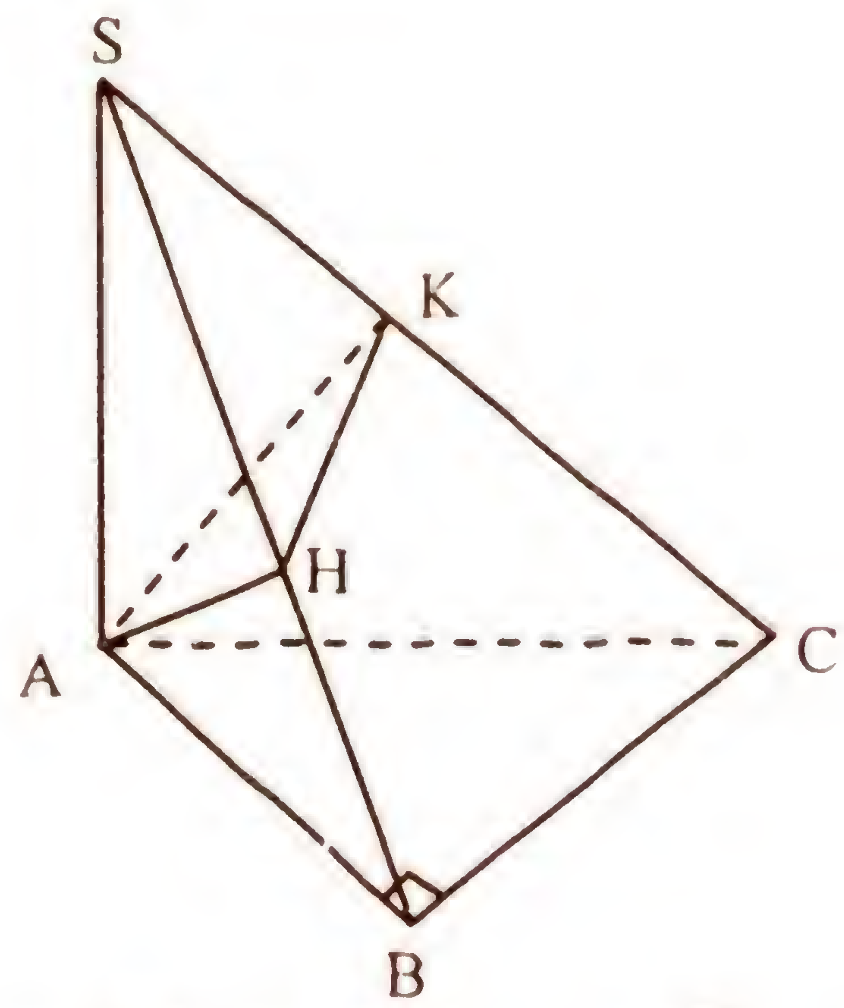
b) Ta có BC $\perp$ AB và có SA $\perp$ (ABC)
nên BC $\perp$ SA, do đó BC $\perp$ (SAB)
Mà BC $\subset$ (SBC) nên mp(SBC) $\perp$ mp(SAB).

**<u>Ví dụ 2</u>**: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông tại B và 2 mặt bên (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh SA $\perp$ (ABC).

b) Hạ AH $\perp$ SB, AK $\perp$ SC. Chứng minh (AHK) $\perp$ (SBC).

**Giải**



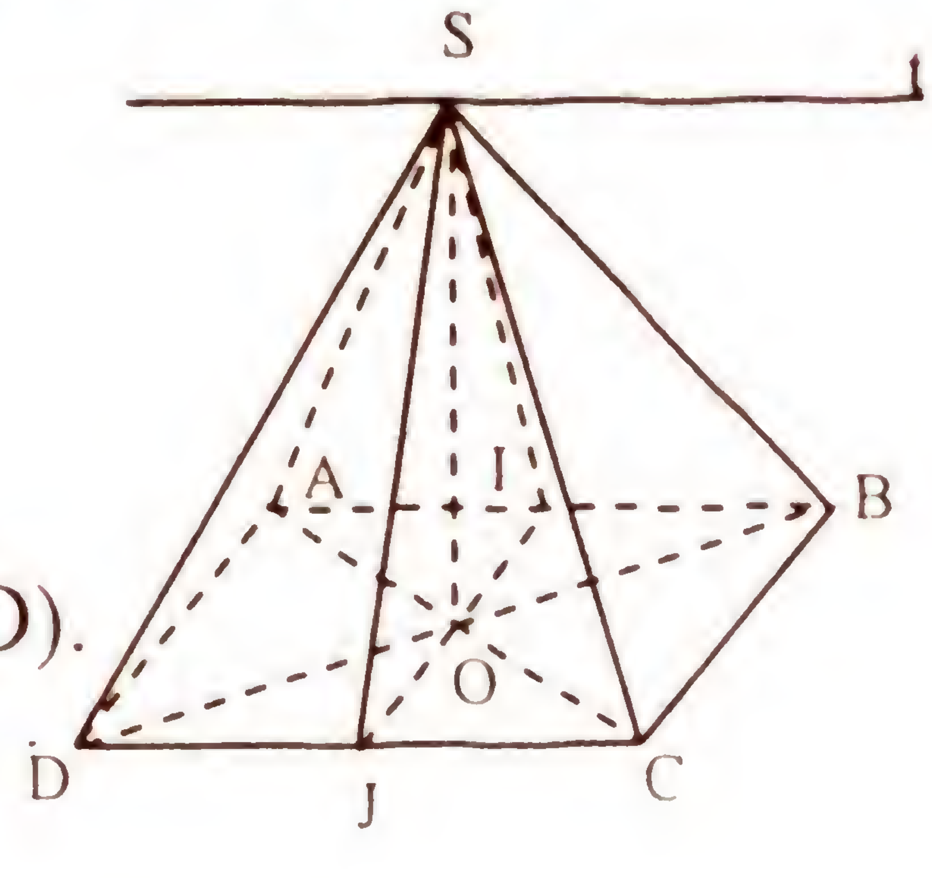

a) Ta có (SAB), (SAC) $\perp$ (ABC) nên giao tuyến SA $\perp$ (ABC).

b) Ta có AB $\perp$ BC nên đường xiên SB $\perp$ BC do đó BC $\perp$ (SAB)
$\Rightarrow$ (SBC) $\perp$ (SAB).
Vì AH vuông góc với giao tuyến SB nên AH $\perp$ (SBC)
Mà AH $\subset$ (AHK) nên (AHK) $\perp$ (SBC).

**<u>Ví dụ 3</u>**: Cho hình chóp S.ABCD có SA = SB = SC = SD = $a\sqrt{3}$ và đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Chứng minh:

a) mp(SAC) $\perp$ mp(SBD). b) mp(SAB) $\perp$ mp(SCD).

**Giải**




a) Hạ SO $\perp$ (ABCD)
vì SA = SB = SC = SD
nên OA = OB = OC = OD
do đó O là tâm của hình vuông đáy
Ta có: AC $\perp$ BD, AC $\perp$ SO $\Rightarrow$ AC $\perp$ (SBD).
Vậy (SAC) $\perp$ (SBD).

b) Vì AB // CD nên giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAB), (SCD) là St // AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có SI $\perp$ AB, SJ $\perp$ CD $\Rightarrow$ SI, SJ $\perp$ St nên góc giữa 2 mặt phẳng (SAB), (SCD) là góc giữa 2 đường thẳng SI, SJ.

Ta có IJ = BC = 2a, $SI^2 = SB^2 - IB^2 = 2a^2 = SJ^2$

$\Rightarrow SI^2 + SJ^2 = 4a^2 = IJ^2$ nên tam giác SIJ vuông tại S.

Vậy góc giữa 2 mặt phẳng (SAB), (SCD) bằng $90^o$ nên (SAB) vuông góc với (SCD).

**Ví dụ 4:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' tâm O. Chứng minh:

a) (AA'; CC') $\perp$ (BB', DD') b) (OAB) $\perp$ (OCD)

c) (ACC'A') $\perp$ (A'BD).

**Giải**

a) Vì ABCD là hình vuông nên AC $\perp$ BD mà AC $\perp$ BB' nên AC $\perp$ (BB', DD')

Do đó (AA'; CC') $\perp$ (BB', DD').

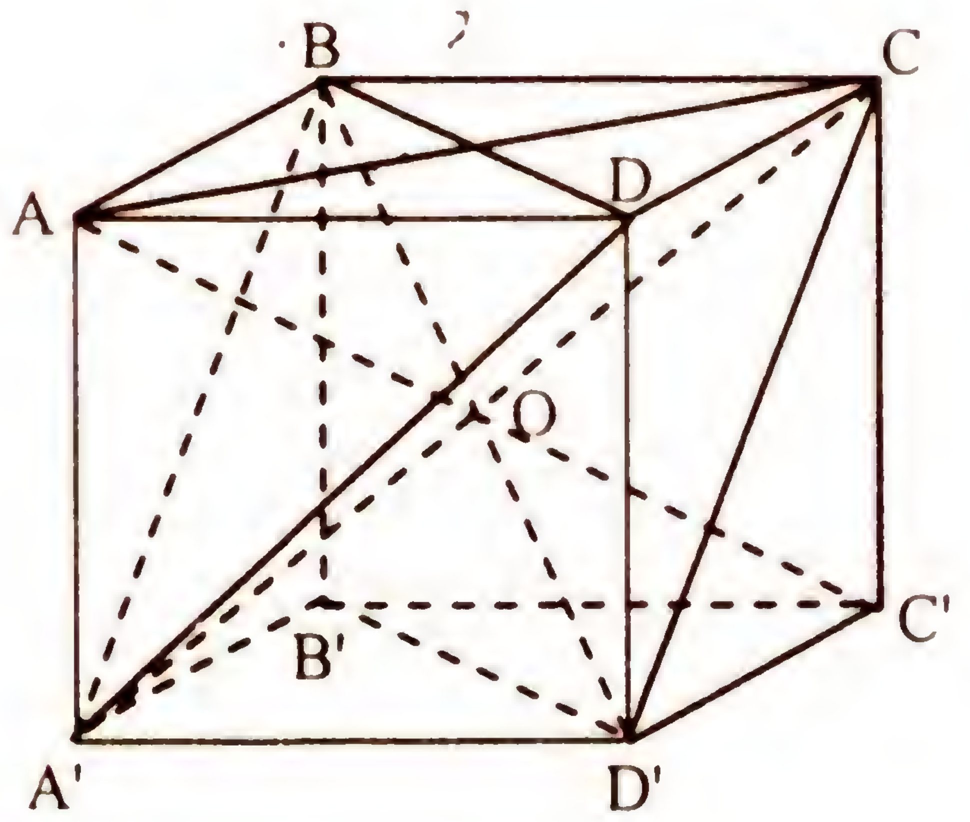
b) Ta có mp(OAB) $\equiv$ mp(AB; C'D'),

mp(OCD) $\equiv$ mp(A'B'; CD).

Vì BC' $\perp$ B'C, BC' $\perp$ CD

$\Rightarrow$ BC' $\perp$ (A'B'; CD).

Do đó (AB; C'D') $\perp$ (A'B'; CD) $\Rightarrow$ đpcm.




c) Ta có AB = AD = AA' và

$C'B = C'D = C'A' = AB\sqrt{2}$

nên A, C' thuộc trục của tam giác A'BD.

Do đó AC' $\perp$ (A'BD) $\Rightarrow$ (ACC'A') $\perp$ (A'BD).

**Ví dụ 5**: Tứ diện SABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) (SAC) $\perp$ (BHK) b) (SBC) $\perp$ (BHK).

**Giải**

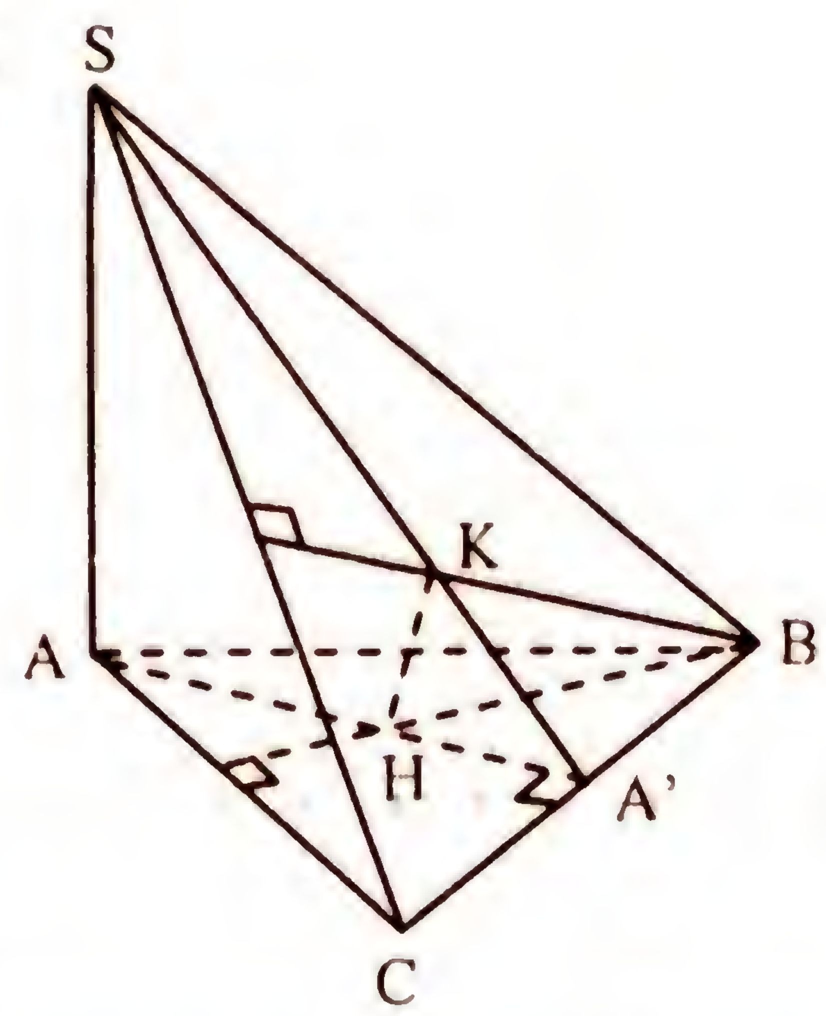
a) Để ý ba đường thẳng AH, SK và BC đồng quy tại A'.

Vì K là trực tâm của tam giác SBC nên BK $\perp$ SC.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC và SA $\perp$ (ABC) nên BH $\perp$ AC, BH $\perp$ SA.

Suy ra BH $\perp$ (SAC) nên BH $\perp$ SC.

Do đó SC $\perp$ (BHK) nên ta có (SAC) $\perp$ (BHK).




b) Ta có BC $\perp$ (SAA'), do đó BC $\perp$ HK.

Và SC $\perp$ (BHK), do đó SC $\perp$ HK nên HK $\perp$ (SBC).

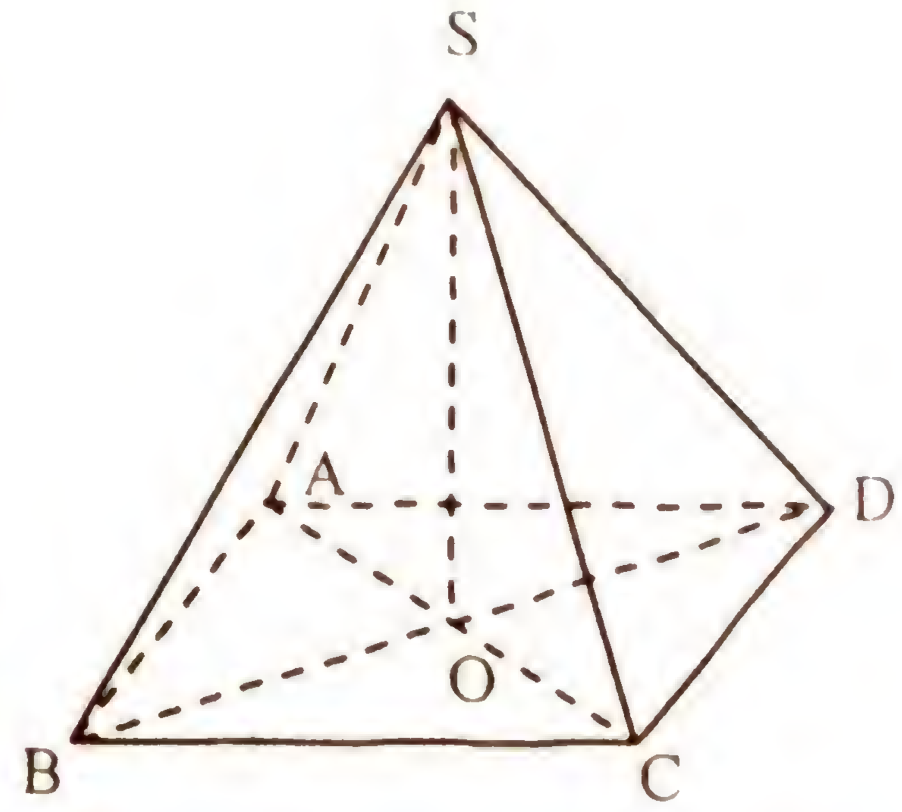
Vì mặt phẳng (BHK) chứa HK nên (BHK) $\perp$ (SBC).

**Ví dụ 6:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a và có SA = SB = SC = a. Chứng minh:

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b) Tam giác SBD là tam giác vuông tại S.

**Giải**

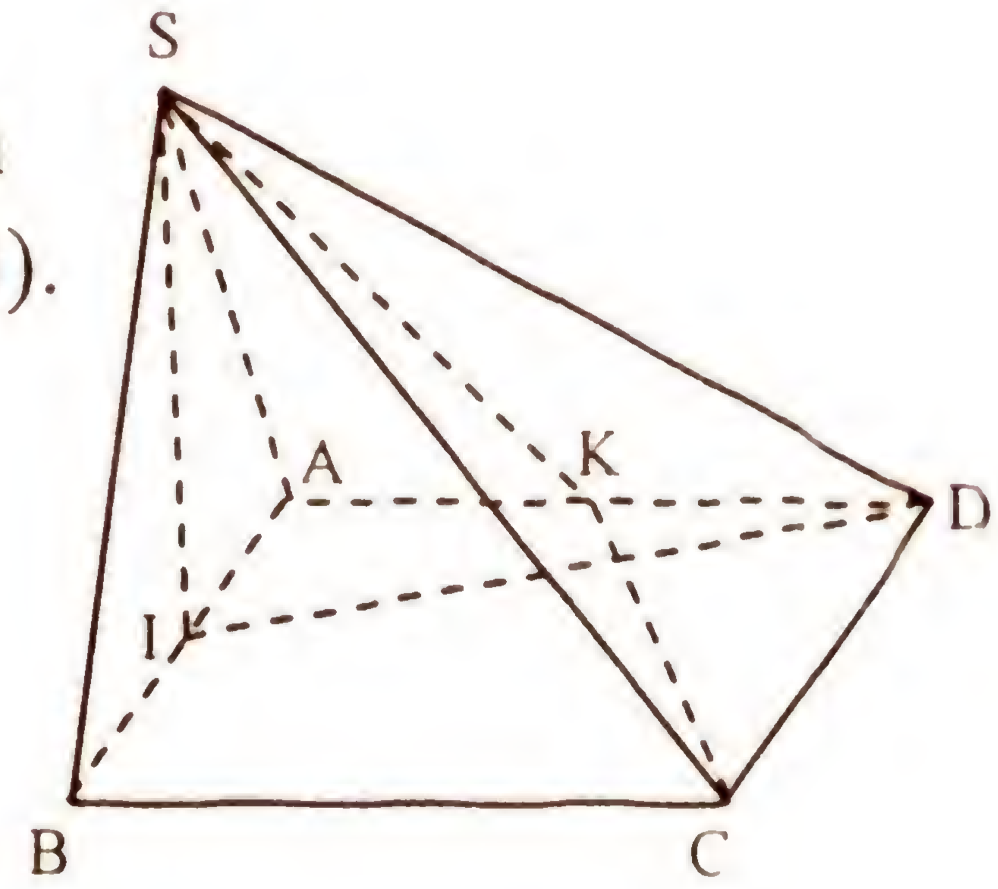



a) Gọi O là tâm của hình thoi.
Ta có AC ⊥ BD.
Vì SA = SC nên SO ⊥ AC.
Do đó AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) nên mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b) Ba tam giác SAC, BAC, DAC bằng nhau (c.c.c) nên ta suy ra OS = OB = OD
$\Rightarrow SO = \dfrac{BD}{2}$ nên tam giác SBD vuông tại S.

**Ví dụ 7:** Cho hình vuông ABCD và tam giác cân SAB nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau.
a) Chứng minh mp(SAD) ⊥ mp(SAB).
b) Gọi I là trung điểm AB, K là trung điểm AD. Chứng minh rằng mp(SCK) ⊥ mp(SID).

**Giải**

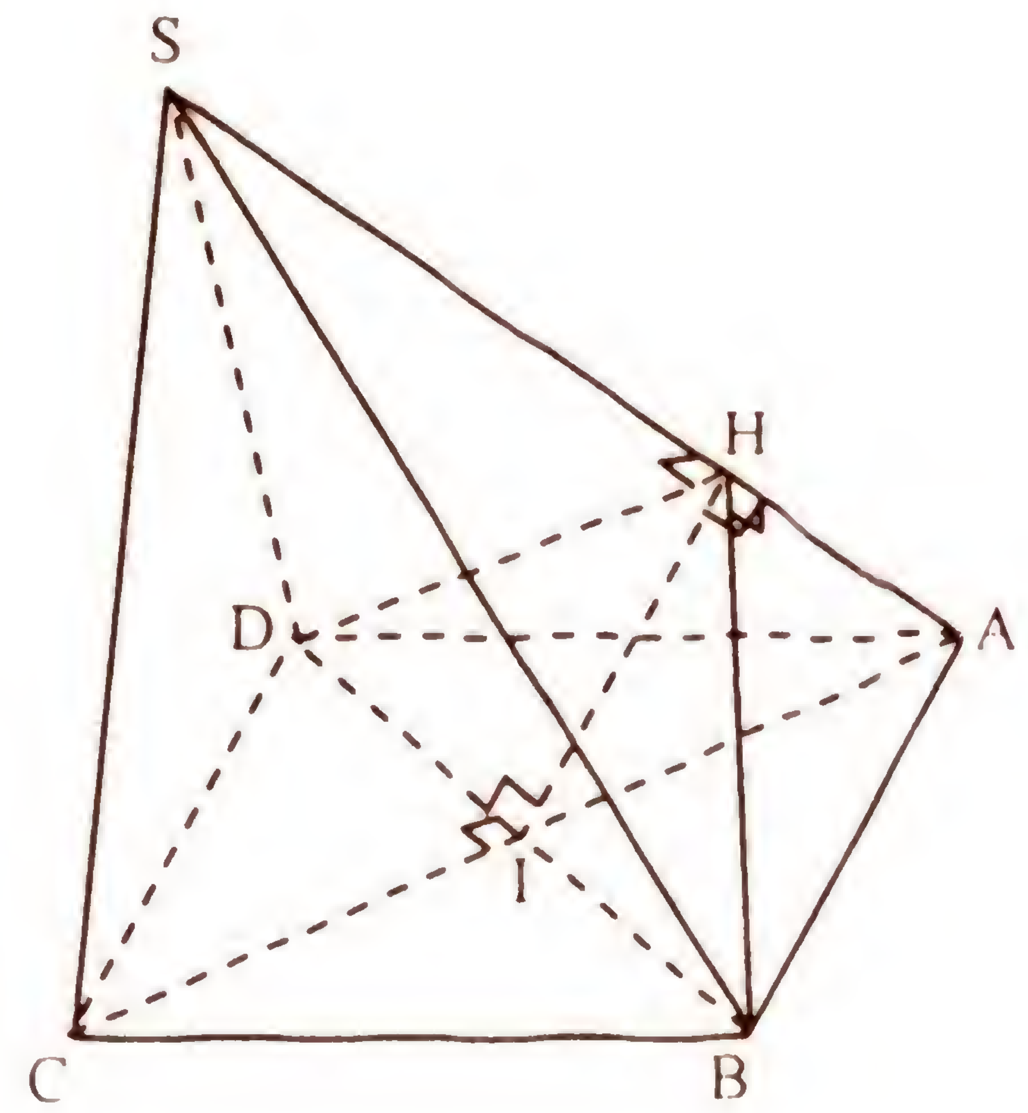



a) Vì mp(ABCD) ⊥ mp(SAB) và AD ⊥ AB nên AD ⊥ mp(SAB), do đó mp(SAD) ⊥ mp(SAB).

b) Ta có 2 tam giác vuông ADI và CDK bằng nhau (c.g.c) nên góc $\widehat{ADI} = \widehat{DCK}$
Mà AD ⊥ CD nên DI ⊥ CK.
Vì I trung điểm của AB nên
SI ⊥ AB ⇒ SI ⊥ (ABCD) ⇒ SI ⊥ CK.
Vậy KC ⊥ mp(SID) và do đó mp(SCK) ⊥ mp(SID).

**Ví dụ 8:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm I, có cạnh bằng a và đường chéo BD = a. Cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với nhau.

**Giải**




Vì ABCD là hình thoi nên BD ⊥ AC
mà BD ⊥ SC ⇒ BD ⊥ (SAC)
⇒ BD ⊥ SA.
Trong mặt phẳng (SAC) hạ IH ⊥ SA thì SA ⊥ (BDH).
Do đó BH ⊥ SA và DH ⊥ SA nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc giữa hai đường thẳng HB, HD.
Hai tam giác vuông AHI và ACS có góc nhọn A chung nên đồng dạng.

Do đó $\frac{IH}{AI} = \frac{SC}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI.SC}{AS}$

Vì BD = a nên ABD là tam giác đều, do đó: $AC = 2AI = a\sqrt{3}$.

$$SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$$

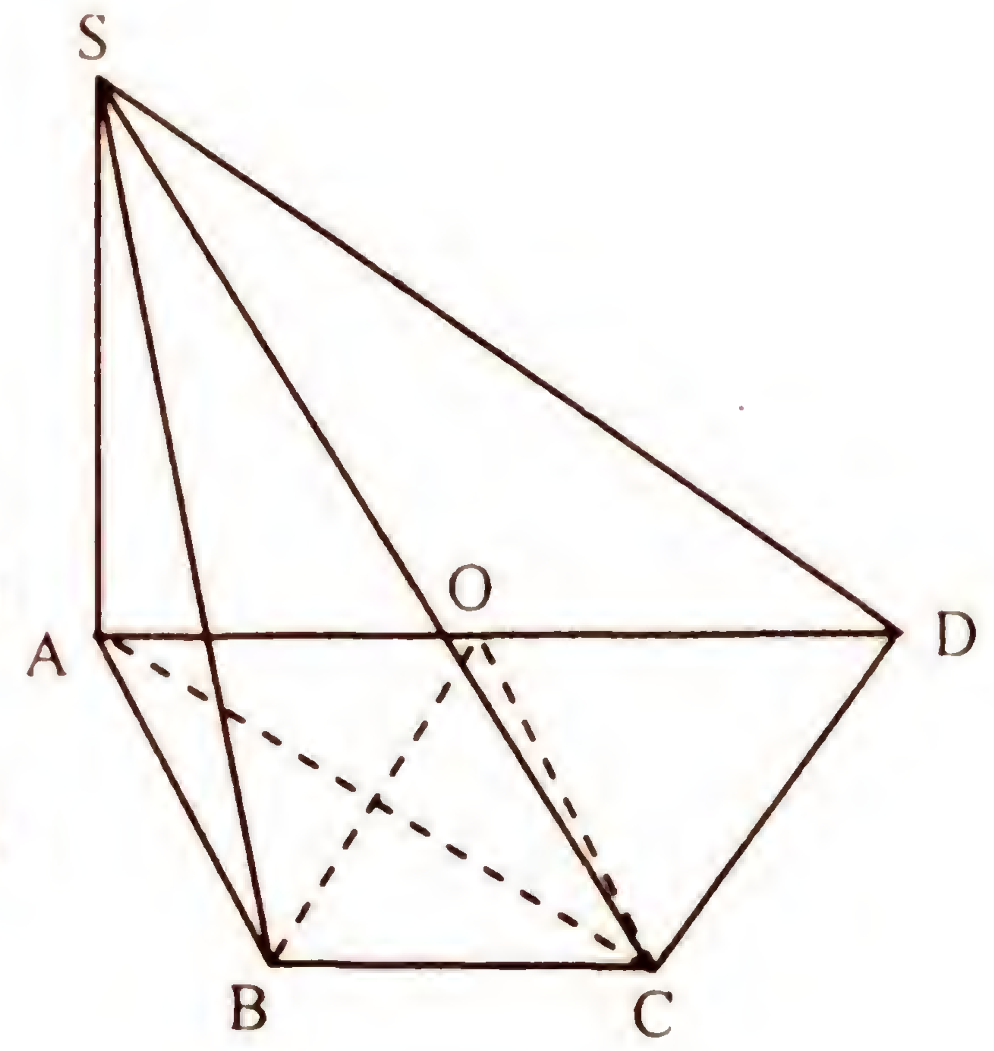
Nên tam giác BHD vuông tại H.

Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với nhau.

**Ví dụ 9**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, B và có AD = 2AB = 2BC, SA vuông góc với đáy. Chứng minh:

a) $(SBC) \perp (SAB)$     b) $(SCD) \perp (SAC)$.

**Giải**




a) Ta có $BC \perp BA \Rightarrow BC \perp SB$
nên $BC \perp (SAB)$
Do đó $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi O là trung điểm AD thì OA = AB = BC và OA // BC, ta có góc A, B vuông nên OABC là hình vuông.
Do đó $OB \perp AC$ mà OBCD hình bình hành nên OB // CD, do đó $CD \perp AC$.
Mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAC)$.
Vậy $(SCD) \perp (SAC)$.

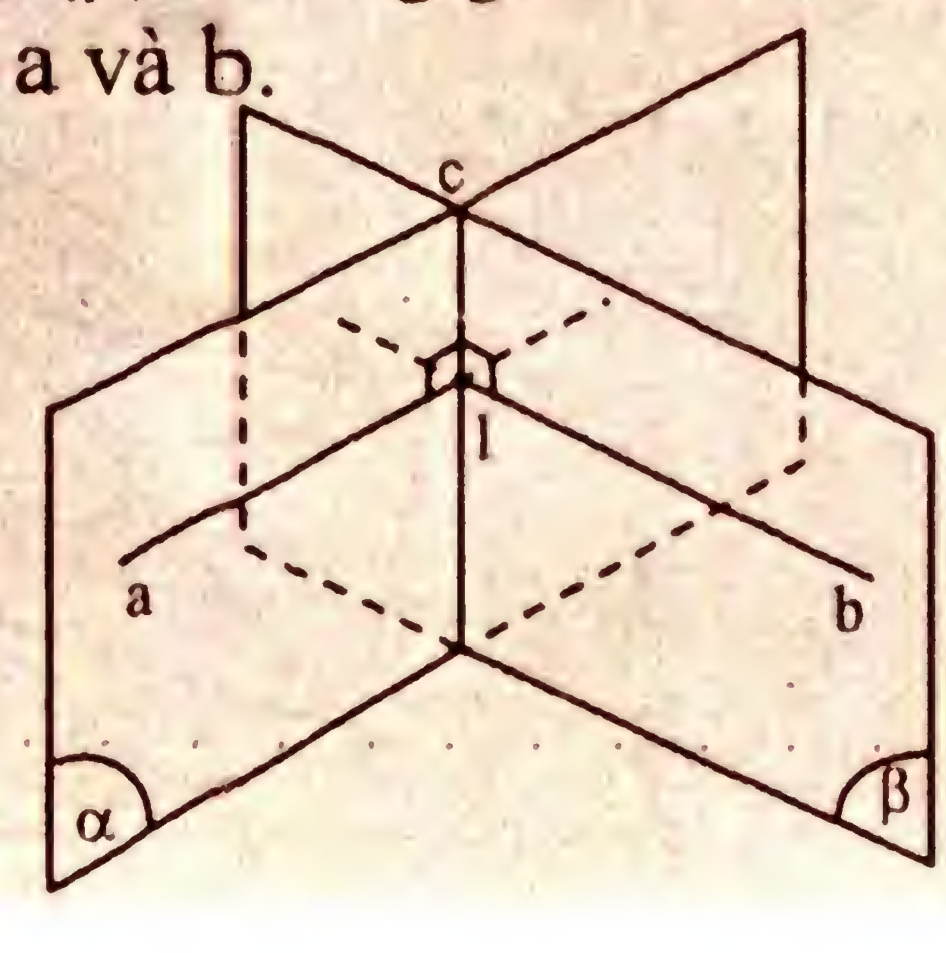
## DẠNG 2: GÓC GIỮA 2 MẶT PHẲNG

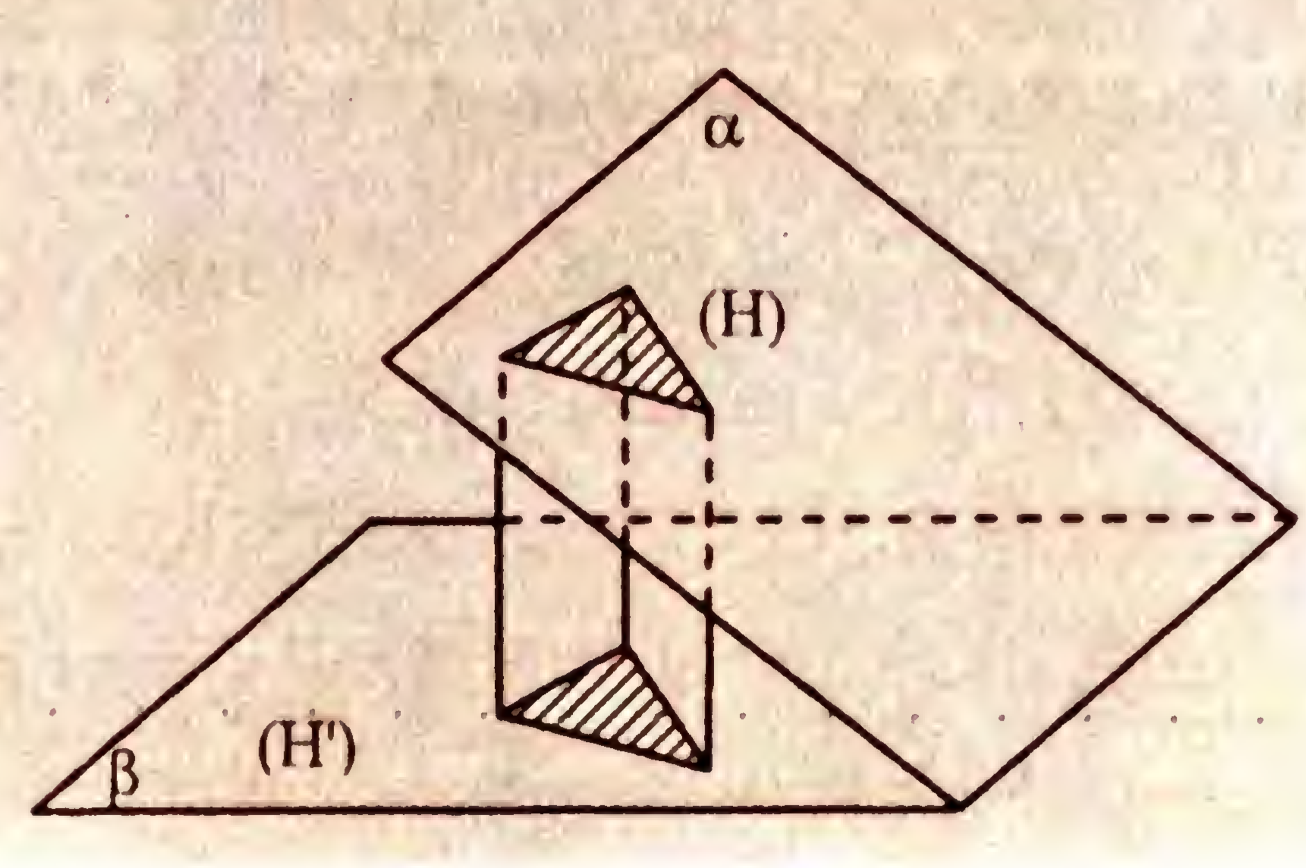
- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa hai mặt phẳng đó bằng $0^o$.

- Xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau:

Cho hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến c. Từ một điểm I bất kì trên c ta dựng đường thẳng a trong $(\alpha)$ vuông góc với c và dựng đường thẳng b trong $(\beta)$ vuông góc với c. Khi đó góc giữa $(\alpha)$ và $(\beta)$ là góc giữa hai đường thẳng a và b.



- Nếu $\varphi$ là góc giữa 2 mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$. Hình (H) có diện tích S trên (P), hình chiếu lên $(\beta)$ là (H') có diện tích S' thì $S' = S.\cos\varphi$ hay $S = \dfrac{S'}{\cos\varphi}$

Chú ý: - Góc giữa 2 đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa 2 mặt phẳng đều có số đo từ $0^o$ đến $90^o$.

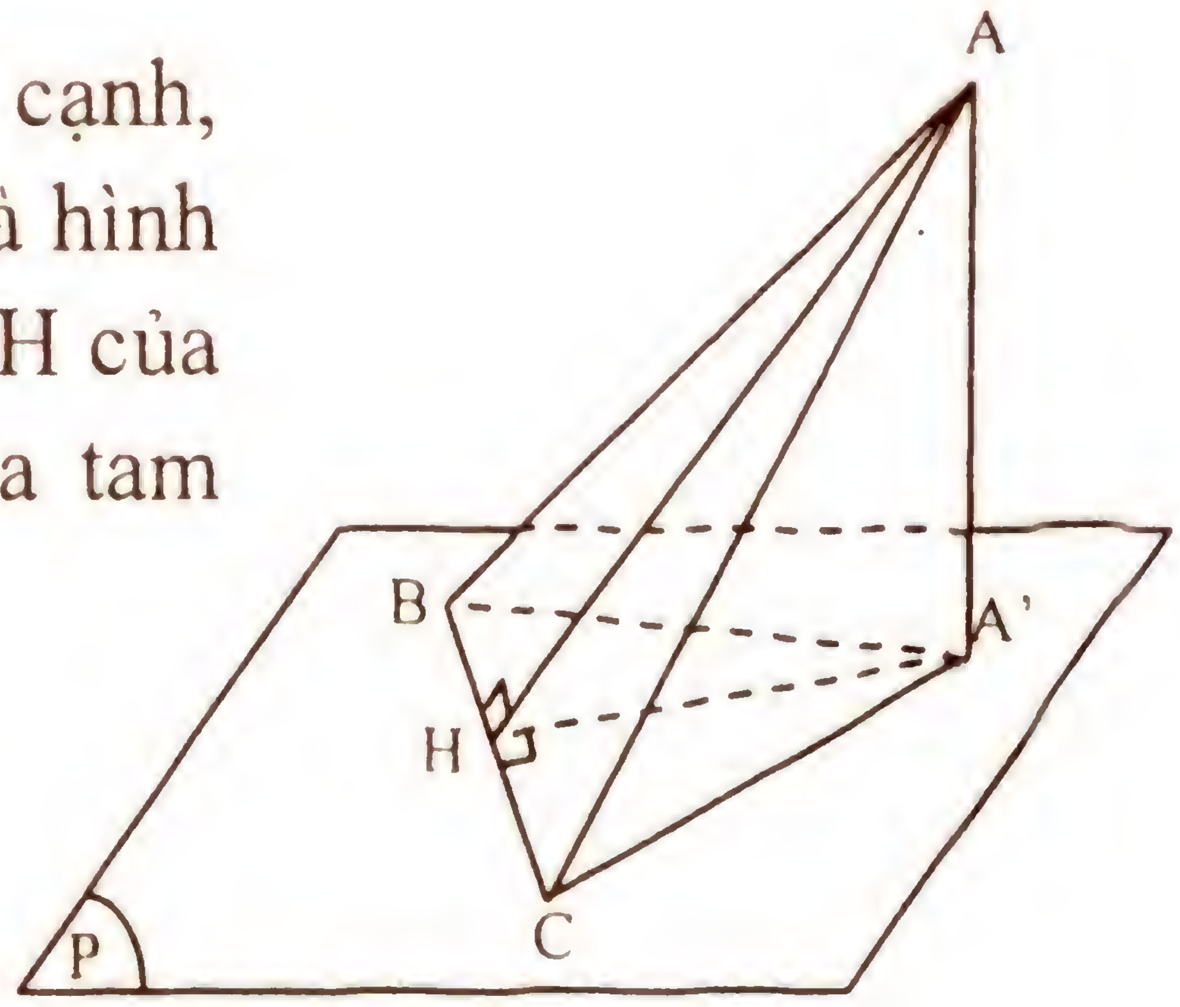
- Có khi ta không cần xác định cụ thể góc $\varphi$ của 2 mặt phẳng là góc của 2 đường thẳng, nếu biết được diện tích S và diện tích chiếu S' thì góc $\varphi$ xác định bởi $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$.

**Ví dụ 1**: Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mp(P) và mp(ABC) là $\varphi < 90^o$; hình chiếu của tam giác ABC trên mp(P) là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng: $S_{A'B'C'} = S_{ABC} . \cos\varphi$.

**Giải**

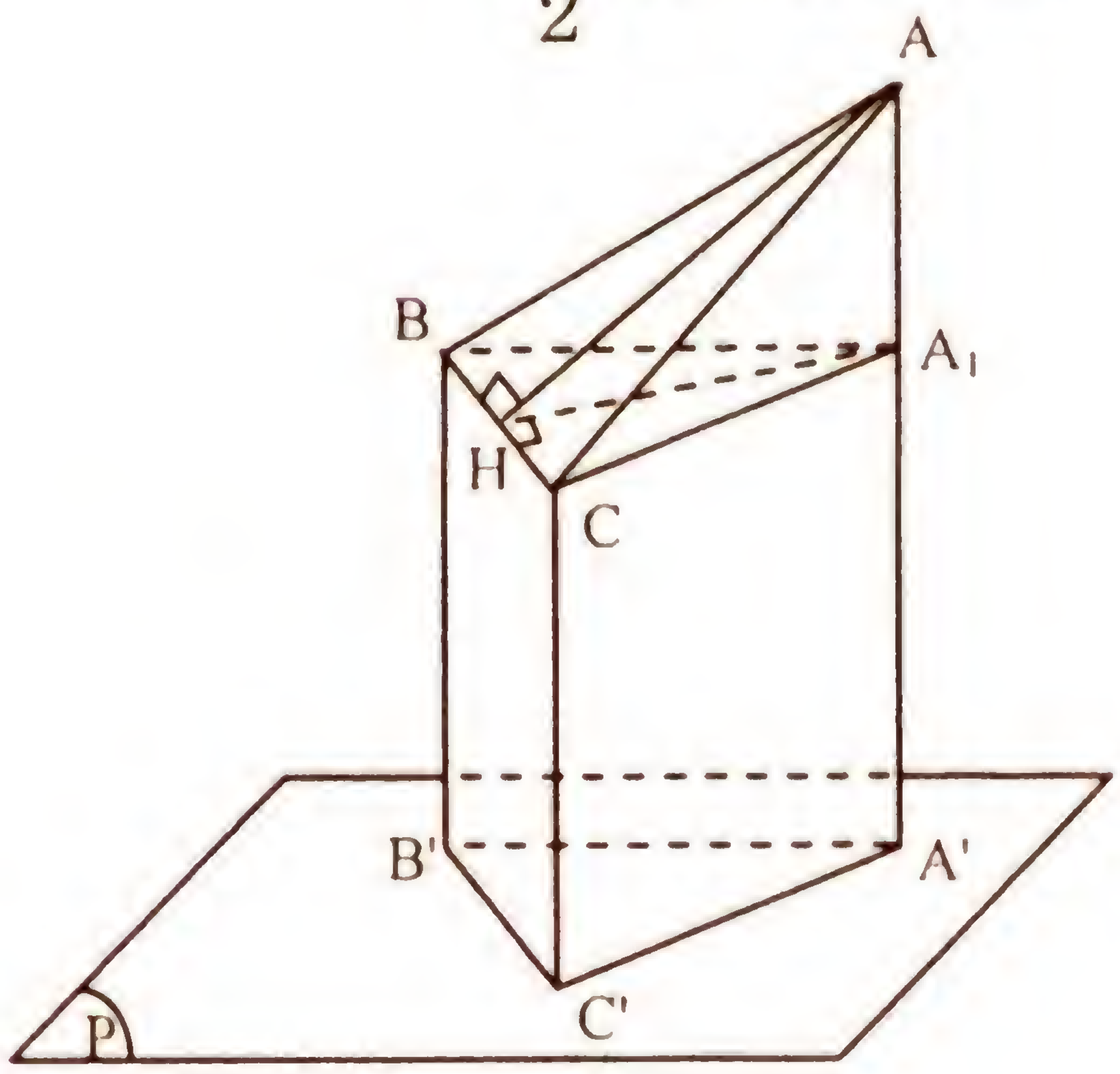
Ta xét 3 trường hợp:

- Xét trường hợp tam giác ABC có một cạnh, chẳng hạn BC nằm trong mp(P). Gọi A' là hình chiếu của A trên mp(P). Hạ đường cao A'H của tam giác A'BC thì AH là đường cao của tam giác ABC và $\widehat{AHA'} = \varphi$.



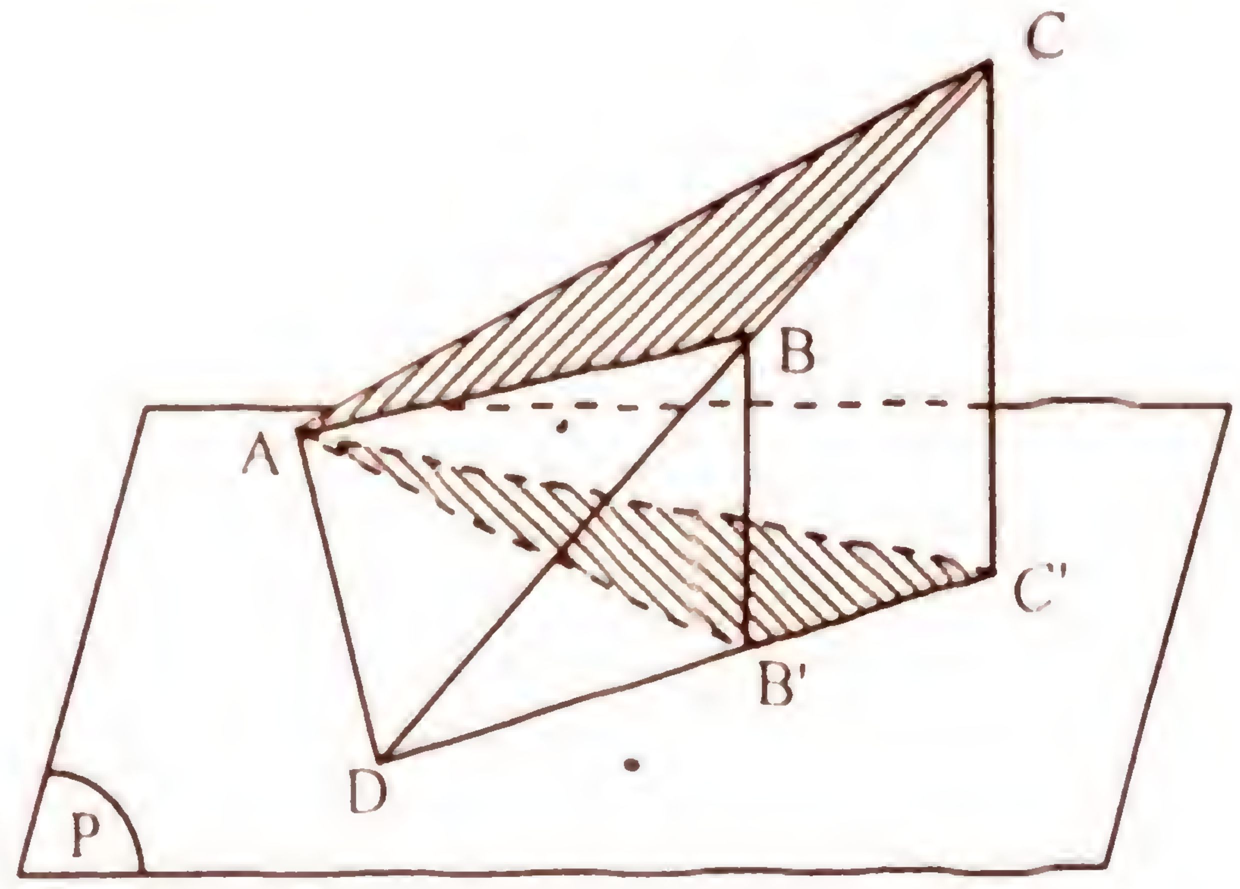

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2}BC.A'H$$

$$= \frac{1}{2}BC.AH.\cos\varphi = S_{ABC}.\cos\varphi.$$




- Xét trường hợp cạnh BC của tam giác ABC song song với mp(P), mp(Q) chứa BC và song song với mp(P), gọi giao điểm của AA' với mp(Q) là $A_1$. Khi đó $\Delta A_1BC = \Delta A'B'C'$; góc giữa mp(ABC) và mp(P) bằng $\varphi$.

Do đó: $S_{A'B'C'} = S_{A_1BC} = S_{ABC}.\cos\varphi$.




- Xét trường hợp tam giác ABC không có cạnh nào song song hay nằm trong mp(P). Giả sử mp(P) đi qua điểm A sao cho các đỉnh B, C ở về cùng một phía

đối với mp(P). Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC và mp(P); B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C trên (P) thì B'C' đi qua D.

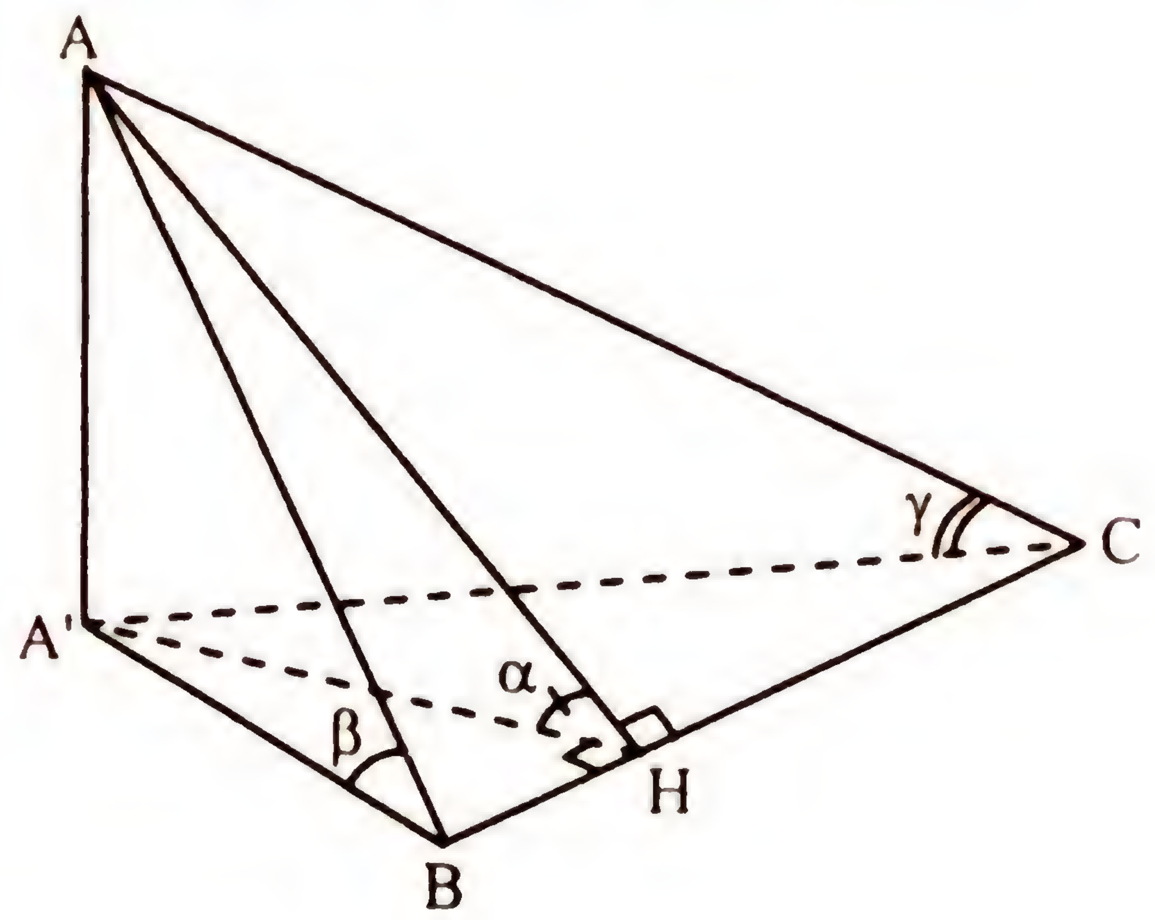
Theo chứng minh trên thì $S_{ADC'} = S_{ADC}.\cos\varphi$ và $S_{ADB'} = S_{ADB}.\cos\varphi$ nên $S_{AB'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$.

**Ví dụ 2**: Tam giác ABC vuông có cạnh huyền BC nằm trong mp (p), cạnh AB và AC lần lượt tạo với mp(P) các góc β và γ. Gọi α là góc tạo bởi mp(P) và mp(ABC). Chứng minh rằng $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

**Giải**

Hạ AA' vuông góc với mp(P) thì $\widehat{ABA'}$, $\widehat{ACA'}$ lần lượt là góc giữa AB, AC với mp(P), theo giả thiết $\widehat{ABA'} = \beta$, $\widehat{ACA'} = \gamma$.

Hạ đường cao AH của tam giác vuông ABC thì $A'H \perp BC$ nên $\widehat{AHA'} = \alpha$ là góc giữa mp(ABC) và mp(P).




Ta có: $\sin\beta = \dfrac{AA'}{AB}$, $\sin\gamma = \dfrac{AA'}{AC}$,

$\sin\alpha = \dfrac{AA'}{AH}$.

Trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AA'^2}{AH^2} = \frac{AA'^2}{AB^2} + \frac{AA'^2}{AC^2} \Rightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

**Ví dụ 3**: Tứ diện OABC có cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và có OA = a, OB = b, OC = c. Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

b) Tính diện tích tam giác HAB, HBC và HCA.

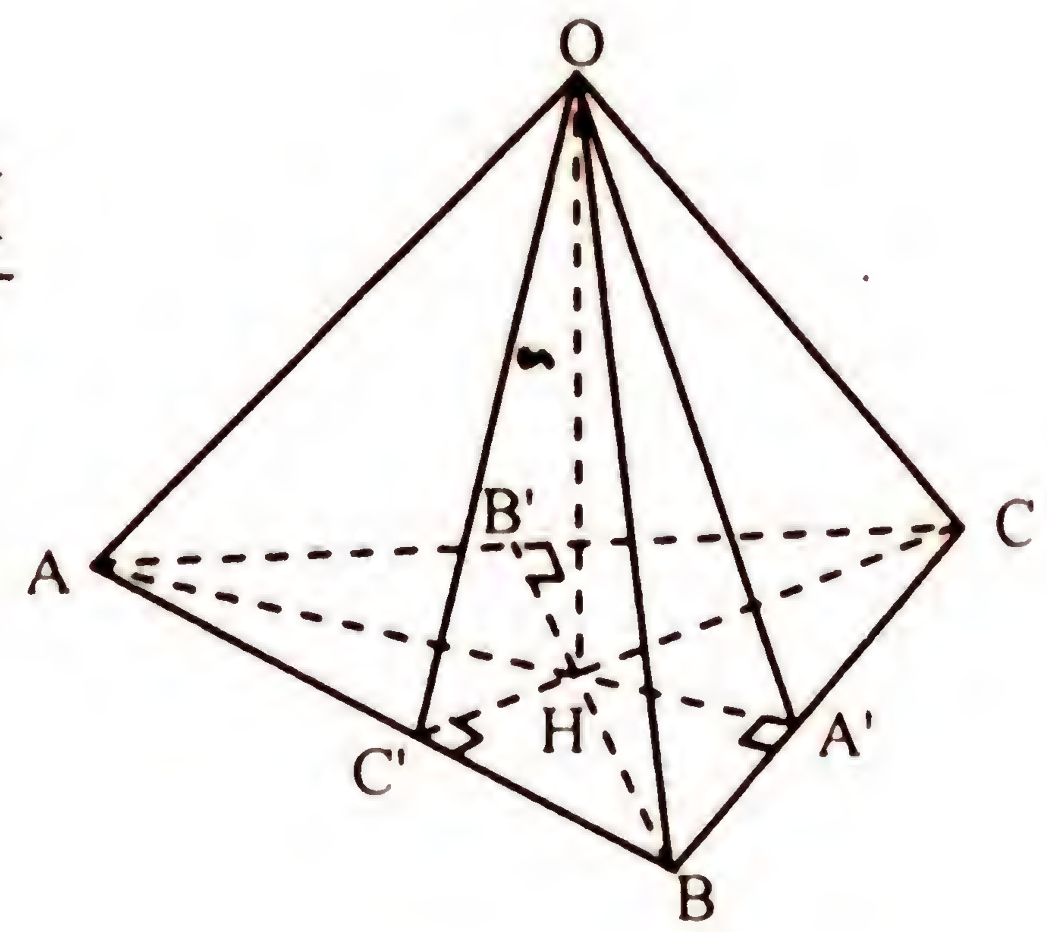
**Giải**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh O xuống mặt phẳng (ABC) thì H là trực tâm của tam giác ABC với 3 đường cao AA', BB', CC'.

a) Ta có $\alpha = \widehat{OA'A}$, $\beta = \widehat{OB'B}$

$\gamma = \widehat{OC'C}$ nên $\cos\alpha = \cos\widehat{OA'A}$

$= \sin\widehat{OAA'} = \dfrac{OH}{a}$




Tương tự $\cos\beta = \dfrac{OH}{b}$, $\cos\gamma = \dfrac{OH}{c}$.

Từ hệ thức $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

$$\Rightarrow \frac{OH^2}{a^2} + \frac{OH^2}{b^2} + \frac{OH^2}{c^2} = 1$$

Vậy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

b) Ta có: $OH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ và $S_{HBC} = S_{OBC}.\cos\alpha$

nên: $S_{HBC} = \dfrac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. Tương tự:

$$S_{HAB} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} ; S_{HAC} = \frac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

**Ví dụ 4**: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ và x, y, z là 3 góc tạo bởi đường chéo AC' với 3 cạnh chung đỉnh A và 3 mặt chung đỉnh A. Chứng minh:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ b) $\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = 1$

**Giải**

Gọi 3 kích thước AA' = a, AB = b, AD = c
và đường chéo d = AC' thì $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

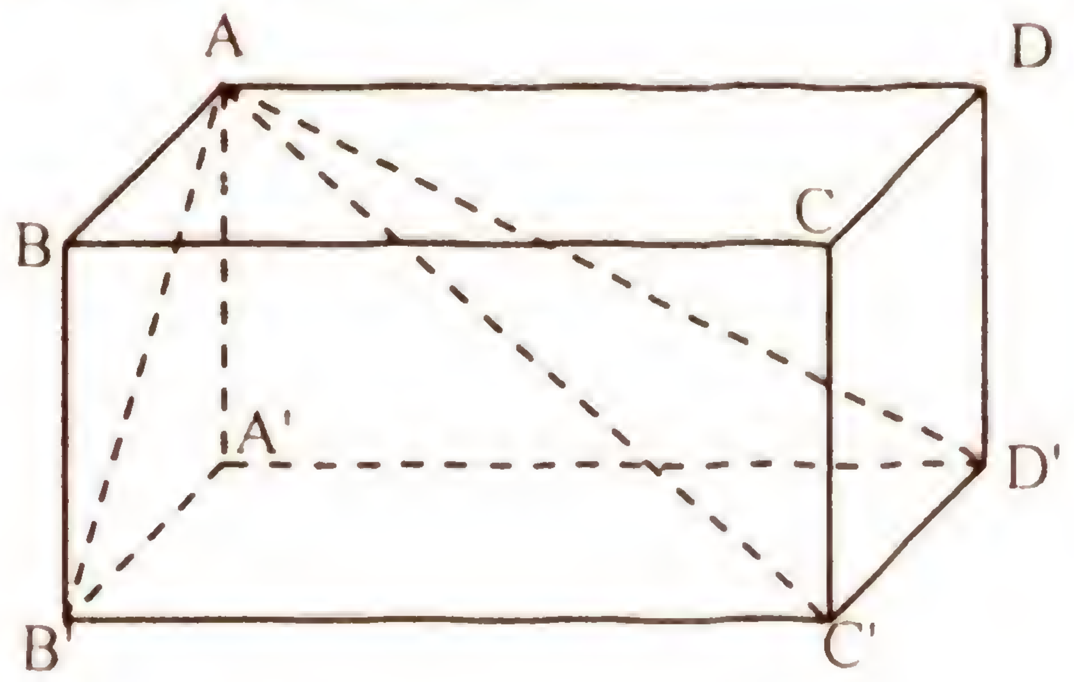
a) Ta có AA', AB, AD là 3 cạnh chung đỉnh A.
Xét 3 tam giác vuông AC'A', AC'B, AC'D:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \left(\frac{A'C'}{d}\right)^2 + \left(\frac{BC'}{d}\right)^2 + \left(\frac{DC'}{d}\right)^2$$

$$= \frac{1}{d^2}(A'C'^2 + BC'^2 + DC'^2)$$

$$= \frac{1}{d^2}(b^2 + c^2 + c^2 + a^2 + a^2 + b^2)$$

$$= \frac{1}{d^2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2) = 2.$$




b) Hình chiếu của AC' lên 3 mặt chung đỉnh A lần lượt là AB', AD' và AC.
Xét 3 tam giác vuông AB'C', AD'C', ACC'.

$$\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = \left(\frac{B'C'}{d}\right)^2 + \left(\frac{C'D'}{d}\right)^2 + \left(\frac{CC'}{d}\right)^2$$

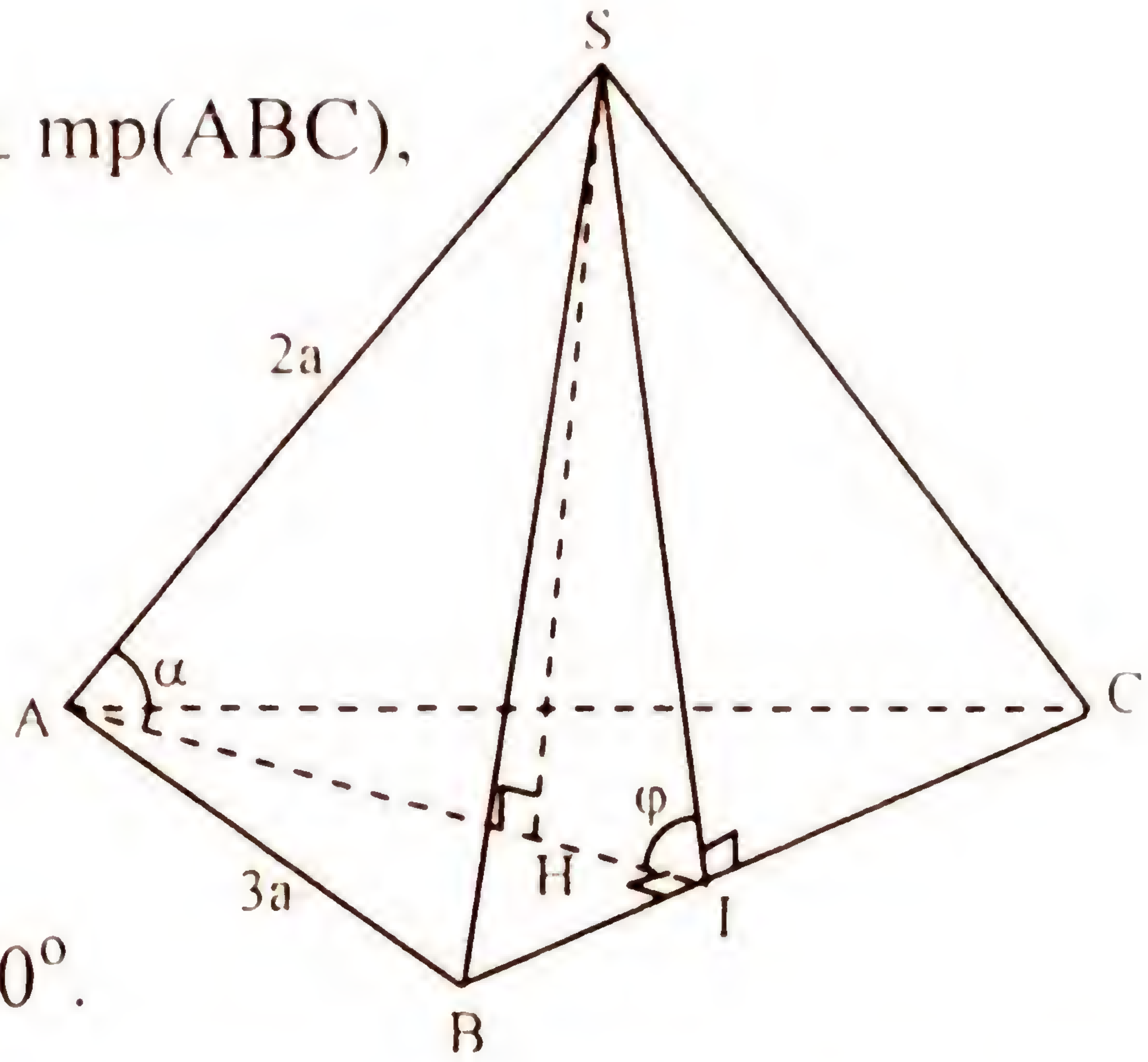
$$= \frac{1}{d^2}(c^2 + b^2 + a^2) = 1.$$

**Ví dụ 5:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a.

a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc tạo bởi các mặt bên và mặt đáy.

**Giải**




a) Gọi H là trọng tâm của $\Delta ABC$ ta có $SH \perp mp(ABC)$.
Nếu $\alpha$ là góc giữa cạnh bên SA và mặt phẳng đáy (ABC) thì $\alpha = \widehat{SAH}$.
Ta có

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$$

nên $\cos\alpha = \frac{AH}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\alpha = 30^o$.

Vì S.ABC là hình chóp tam giác đều nên góc giữa SB, SC với đáy (ABC) cũng bằng $30^o$.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Nếu $\varphi$ là góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) thì $\varphi = \widehat{SIH}$. Ta có:

$$\tan\varphi = \frac{SH}{HI} = \frac{SA\sin\alpha}{\frac{1}{2}AH} = \frac{2a.\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vì hình chóp đều nên tang của góc tạo bởi mặt bên khác và mặt đáy cũng bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

**Ví dụ 6**: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đáy đều bằng a. Biết góc tạo thành bởi cạnh bên và mặt đáy là $60^o$ và hình chiếu H của đỉnh A lên mp(A'B'C') trùng với trung điểm của cạnh B'C'.
a) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng BC và AC'.
b) Tính tang của góc giữa (ABB'A') và đáy.

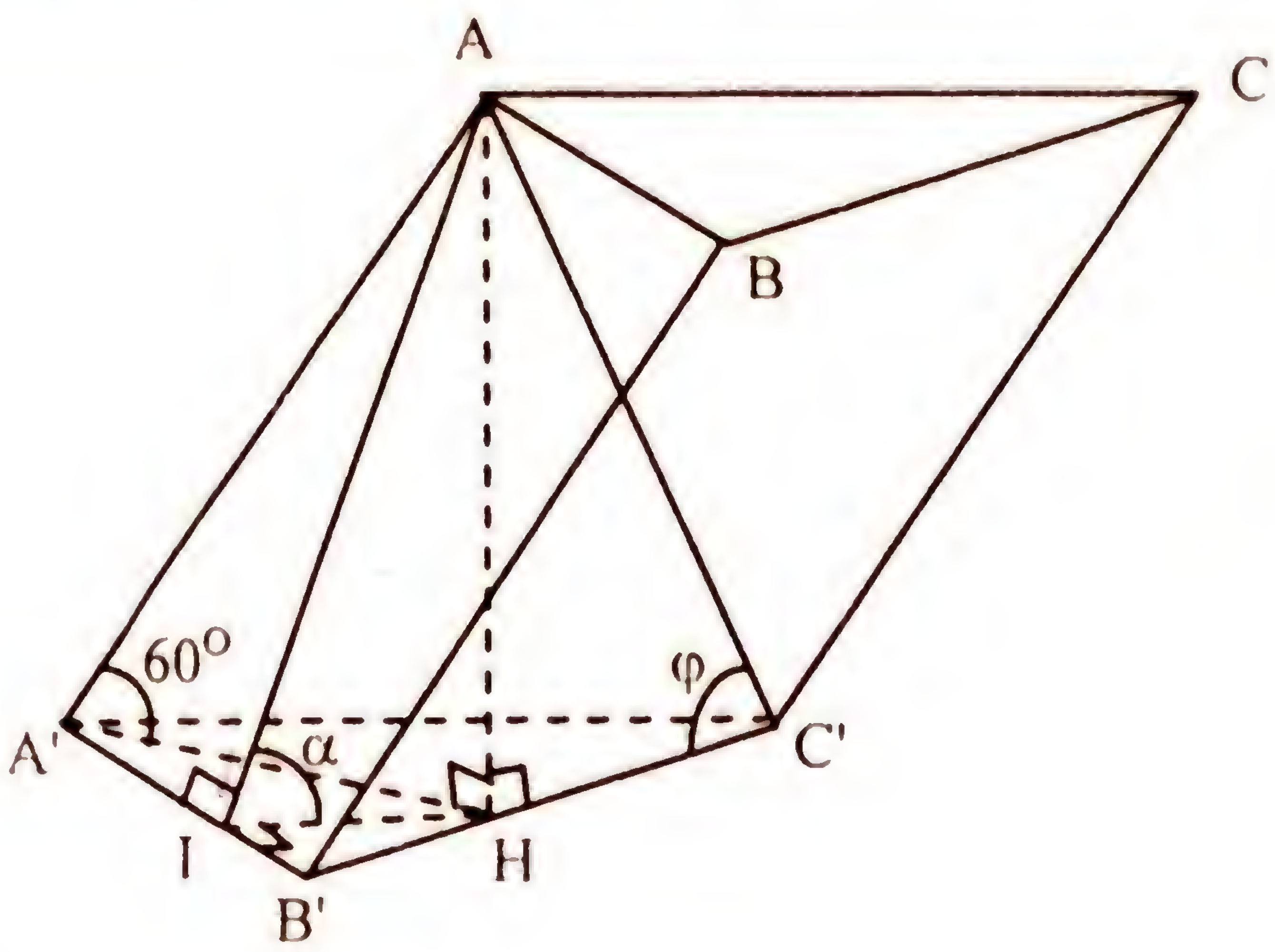
**Giải**

a) Theo giả thiết tam giác AA'H vuông tại H và có $\widehat{AA'H} = 60^o$.

Từ đó suy ra: $AH = \frac{3a}{2}$.

Đặt $\varphi = (AC', BC)$
Vì BC /// B'C'
nên $\varphi = (AC', B'C') = \widehat{AC'H}$.

Suy ra $\tan\varphi = \frac{AH}{C'H} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}} = 3$.




b) Vẽ $HI \perp A'B'$ ta suy ra $AI \perp A'B'$.
Vậy $\alpha = \widehat{AIH}$ chính là góc giữa (ABB'A') và đáy.

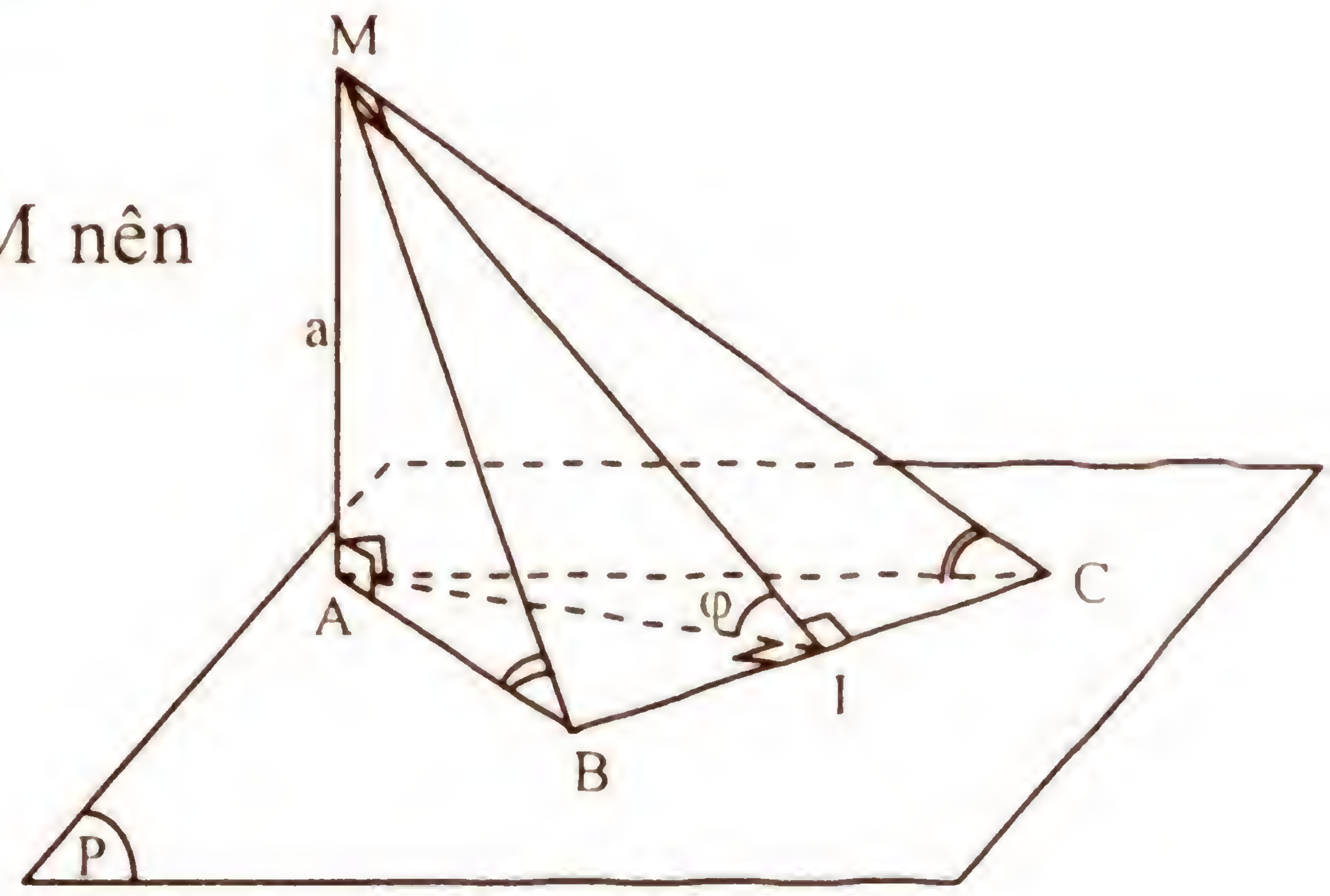
Ta có: $\tan\alpha = \dfrac{AH}{IH} = \dfrac{\dfrac{3a}{2}}{B'H\sin 60^\circ} = \dfrac{\dfrac{3a}{2}}{\dfrac{a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$.

**<u>Ví dụ 7</u>**: Từ một điểm nằm ngoài mp(P), hạ đường vuông góc MA và hai đường xiên MB, MC tới mp(P). Biết MA = a, MB, MC đều tạo với mp(P) các góc $30^\circ$ và $MB \perp MC$.

a) Tính đoạn BC.

b) Tính cosin góc φ tạo bởi (MBC) và (ABC).

**Giải**




a) Ta có $MB = MC = \dfrac{MA}{\sin 30^\circ} = 2a$

Vì tam giác BMC vuông cân tại M nên $BC = MB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,a$.

b) Gọi I là trung điểm BC ta có $IM \perp BC$ và $AI \perp BC$.

Ta có $\varphi = \widehat{MIA}$, khi đó:

$$\sin\varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

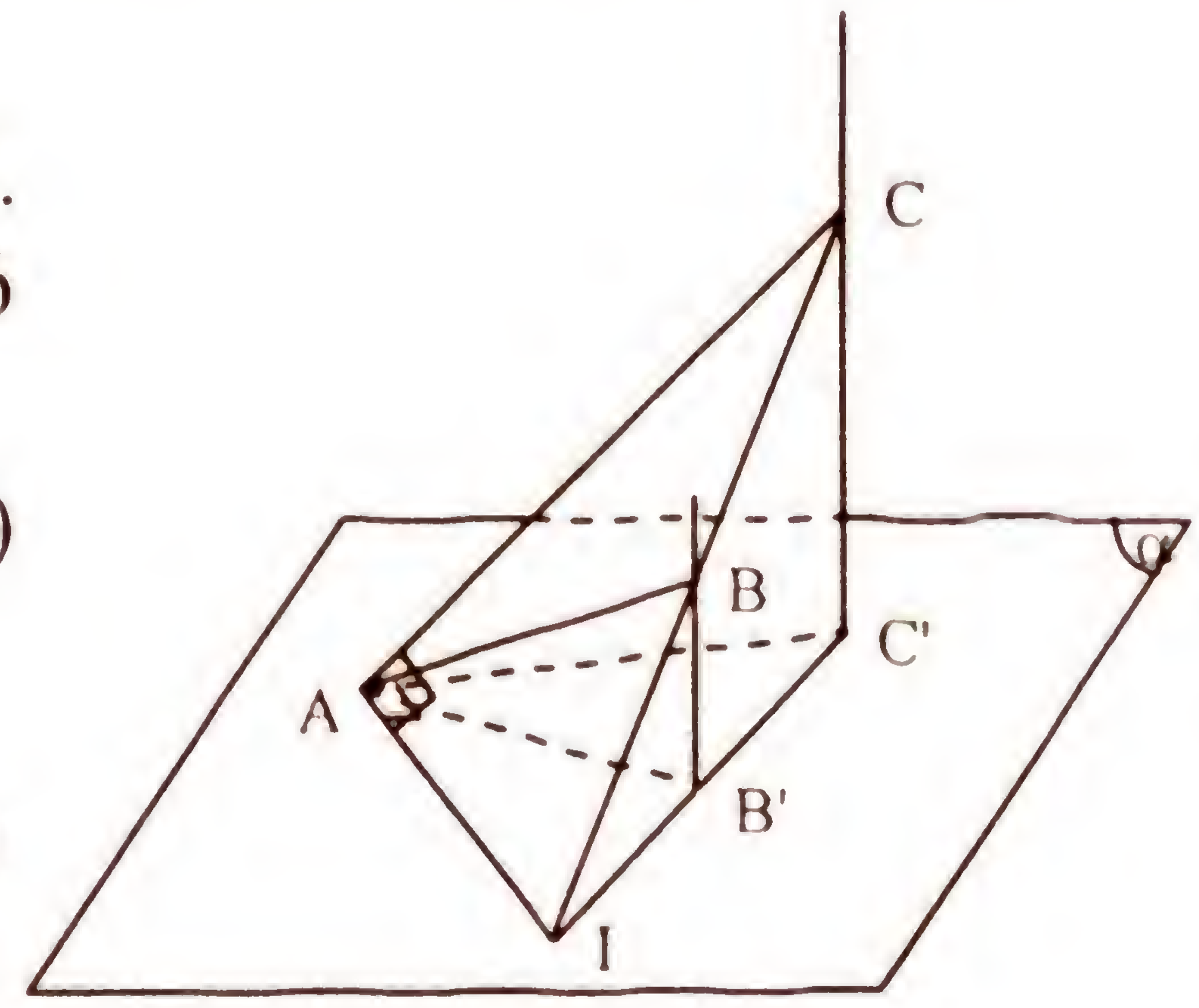
Vậy $\varphi = 45^\circ$.

**<u>Ví dụ 8</u>**: Tam giác ABC có đỉnh A nằm trong mặt phẳng (α), hai đỉnh B và C có hình chiếu trên (α) lần lượt là B' và C' sao cho AB'C' là tam giác đều cạnh a. Giả sử CC' = a, $BB' = \dfrac{a}{2}$.

a) Gọi I là giao điểm của BC và B'C'. Chứng minh IA vuông góc với AC.

b) Tính diện tích của tam giác ABC rồi suy ra giá trị của góc φ giữa mặt phẳng (α) với (ABC).

**Giải**




a) Vì CC' = 2BB' nên B' là trung điểm của IC'.

Tam giác AIC' có: B'A = B'C' = B'I nên đó là tam giác vuông, hay $IA \perp AC'$.

Vì AC' là hình chiếu của AC trên mp(α) nên $IA \perp AC$.

b) $S_{AB'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (vì AB'C' là tam giác đều cạnh a).

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}S_{IAC} = \dfrac{1}{4}IA.AC$ mà $AC = a\sqrt{2}$, $IA = a\sqrt{3}$ nên:

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}.a\sqrt{3}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Ta có: $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^o.$

**Ví dụ 9**: Tam giác đều ABC cạnh a có hai đỉnh B và C nằm trong mặt phẳng ($\alpha$), đỉnh A cách mặt phẳng ($\alpha$) một đoạn bằng $\frac{a}{2}$

a) Tính $\sin\varphi$ với $\varphi$ là góc giữa ($\alpha$) và (ABC).

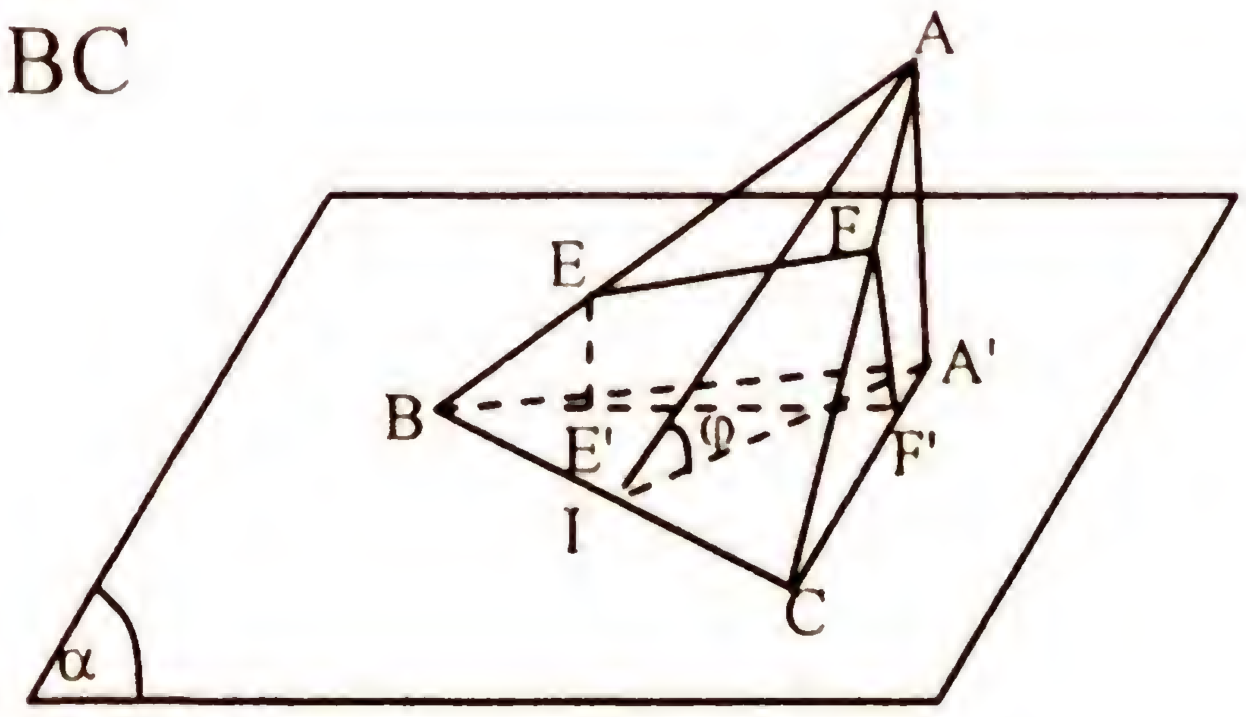
b) Gọi E và F là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Tính diện tích hình chiếu của tam giác AEF trên ($\alpha$).

**Giải**

a) Gọi A' là hình chiếu của A trên ($\alpha$) và I là trung điểm của BC. Vì tam giác ABC đều nên $BC \perp IA$ và do đó $BC \perp IA'$.

Như vậy $\varphi = \widehat{AIA'}$.




Ta có: $\sin\varphi = \dfrac{AA'}{IA} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $S_{AEF} = \frac{1}{2}AE.AF.\sin A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$ và $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$S_{A'E'F'} = S_{AEF}.\cos\varphi = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}.\dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{18}.$

**Ví dụ 10**: Cho tam giác ABC vuông tại B, AB = 2a, BC = a. Trên hai tia Ax và Cy vuông góc với mp(ABC) và ở cùng phía đối với (ABC), lần lượt lấy hai điểm A' và C' sao cho AA' = 2a, CC' = x.

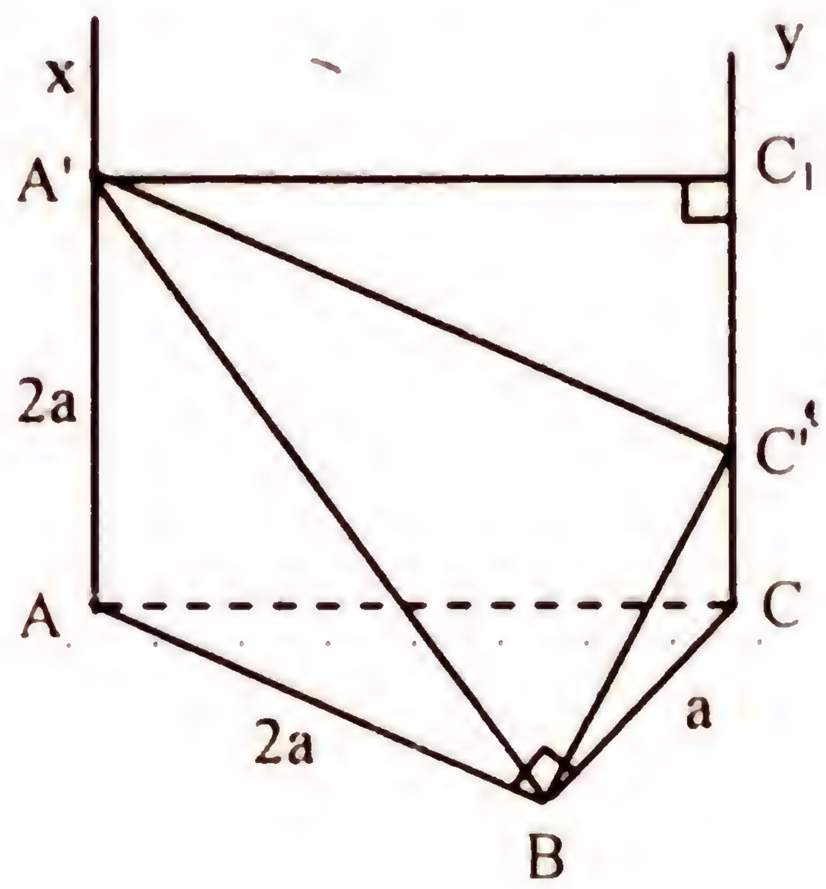
a) Xác định x sao cho $\widehat{A'BC'} = 90^o$.

b) Xác định x sao cho $\widehat{BA'C} = 90^o$.

c) Cho x = 4a. Tính $\cos\varphi$ với $\varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'BC').

**Giải**

a) Trên Cy ta lấy điểm $C_1$ sao cho $CC_1 = 2a$.




$A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 8a^2$

$BC'^2 = BC^2 + CC'^2 = a^2 + x^2$

$A'C'^2 = A'C_1^2 + C_1C'^2$

$= 5a^2 + (2a - x)^2 = x^2 - 4ax + 9a^2$

$\widehat{A'BC'} = 90^o \Leftrightarrow A'C'^2 = A'B^2 + BC'^2.$

$\Leftrightarrow x^2 - 4ax + 9a^2 = 8a^2 + a^2 + x^2 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\widehat{BA'C} = 90^o \Leftrightarrow BC'^2 = A'B^2 + A'C'^2$

$\Leftrightarrow a^2 + x^2 = 8a^2 + x^2 - 4ax + 9a^2 \Leftrightarrow 4ax = 16a^2 \Leftrightarrow x = 4a$

c) $x = 4a$, khi đó $A'C_1^2 + C_1C'^2 = 5a^2 + 4a^2 = 9a^2 \Rightarrow A'C' = 3a$

$$S_{A'BC'} = \frac{1}{2}.A'B.A'C' = \frac{1}{2}.2a\sqrt{2}.3a = 3a^2\sqrt{2}.$$

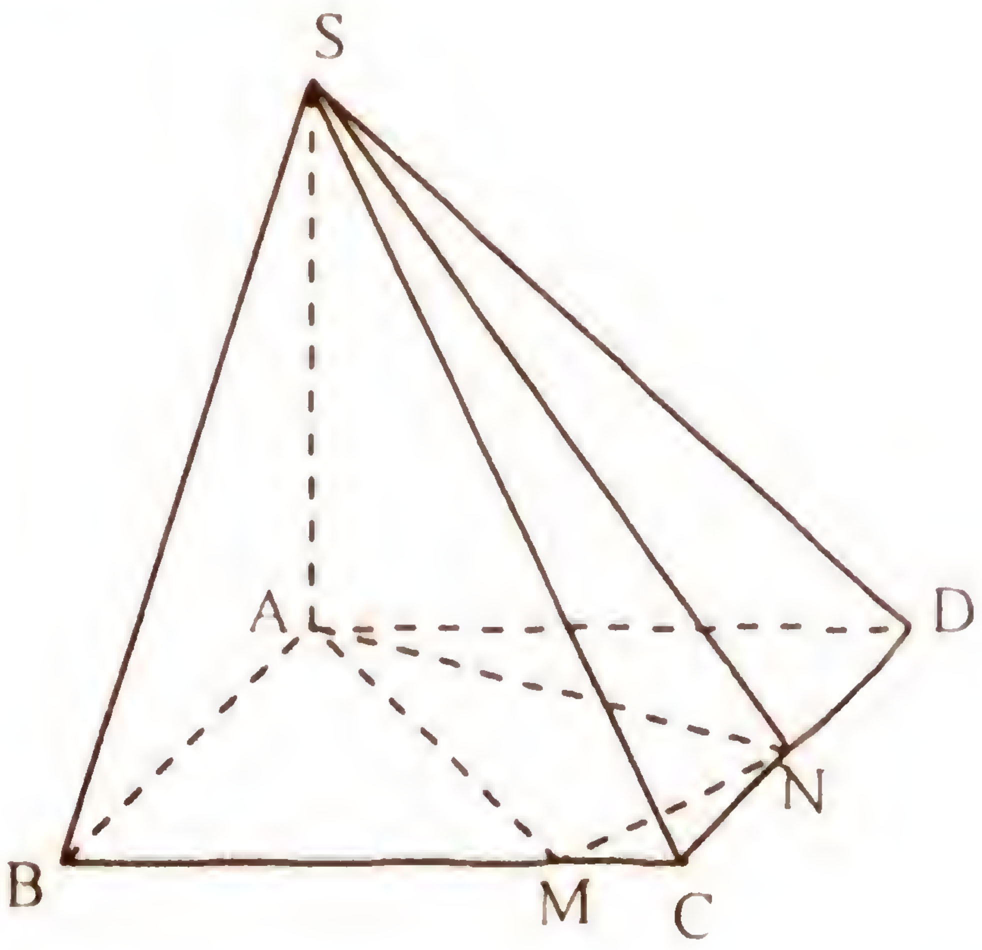
$$\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{A'BC'}} = \frac{a^2}{3a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

<u>**Ví dụ 11**</u>: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt CM = x, CN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để:

a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc $45^o$.

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

**Giải**




a) Ta có AM, AN cùng vuông góc với SA nên góc nhọn $\widehat{MAN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN). Hai mặt phẳng đó tạo với nhau góc $45^o$ khi và chỉ khi $\widehat{MAN} = 45^o$, $N \in CD$.

$\Leftrightarrow \widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^o$.

$\Leftrightarrow 1 = \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$

Dùng công thức cộng và có $\tan\widehat{BAM} = \dfrac{a-x}{a}$, $\tan\widehat{DAN} = \dfrac{a-y}{a}$ thì điều kiện cần tìm là $2a^2 + xy = 2a(x + y)$

Cách khác: Dùng định lý côsin cho tam giác AMN.

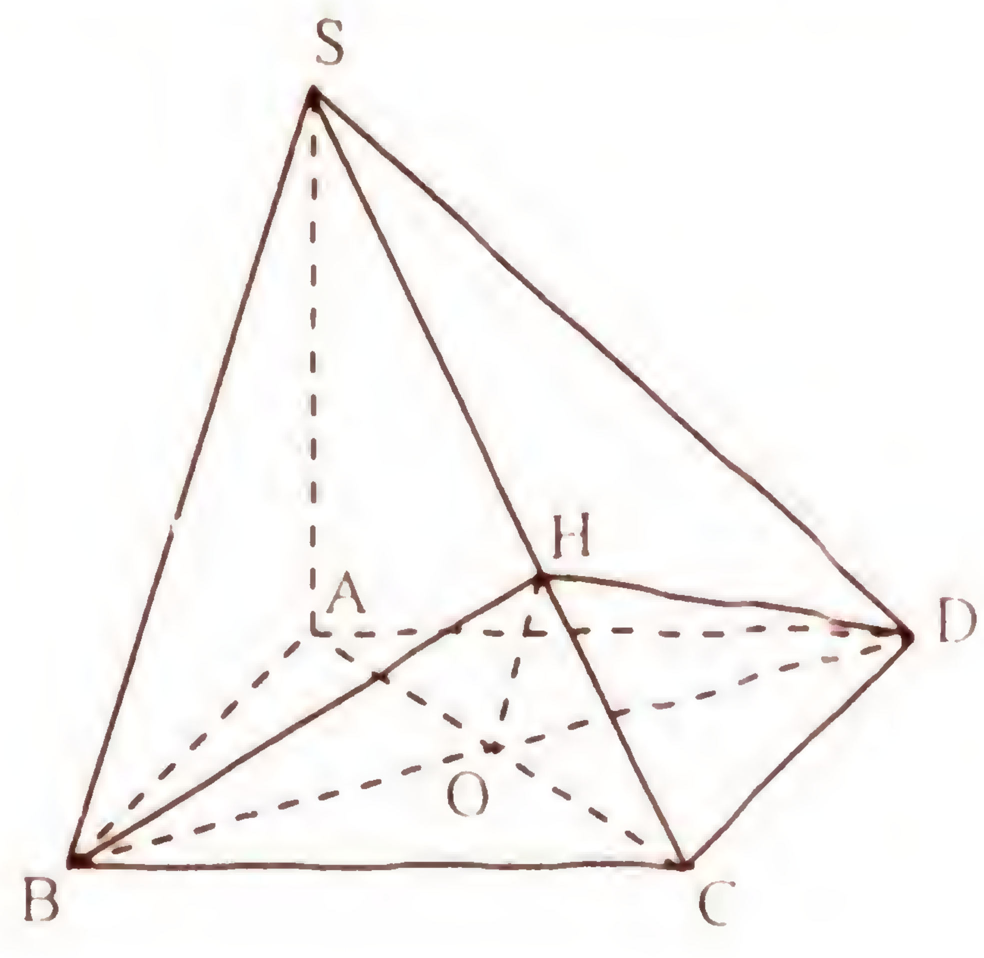
b) Vì SA ⊥ MN, (SAM) ⊥ (ABCD) nên:

(SAM) ⊥ (SMN) khi và chỉ khi $\widehat{AMN} = 90^o$

$\Leftrightarrow a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a-y)^2 \Leftrightarrow ay = x(a-x)$.

<u>**Ví dụ 12:**</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và SA ⊥ (ABCD), SA = x. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc $60^o$.

**Giải**




Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (SAC), hạ OH vuông góc với SC, thì mp(BHD) vuông góc với SC. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) bằng góc giữa hai đường thẳng BH và DH.

Ta có OH ⊥ BD, OH < OC nên OH < OB = OD, do đó tam giác cân BHD có gốc H tù.

Khi mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc $60^0$ khi và chỉ khi: $\widehat{BHD} = 120^o \Leftrightarrow \widehat{BHO} = 60^o \Leftrightarrow BO = OH\sqrt{3}$

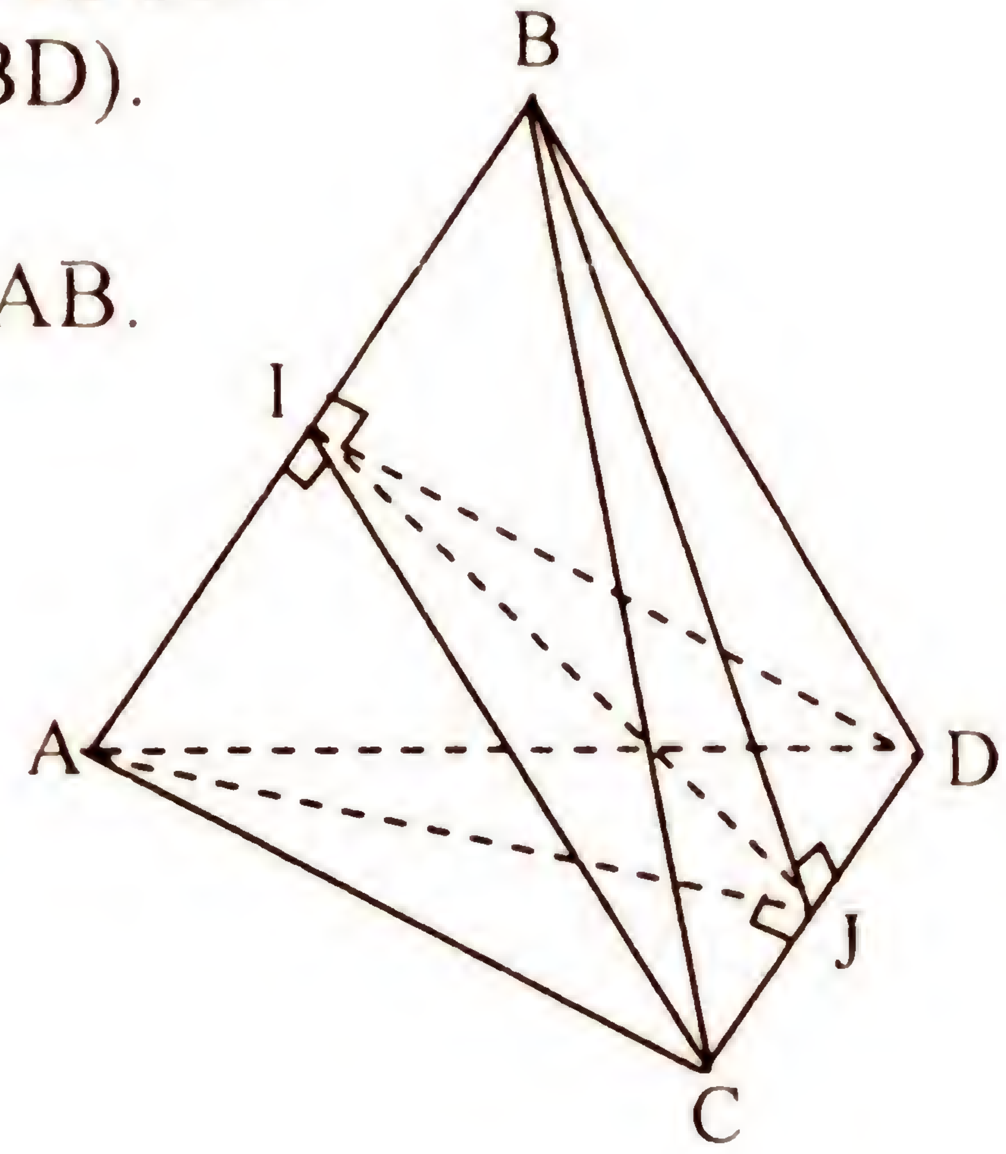
$\Leftrightarrow BO = \sqrt{3}.OC.\dfrac{SA}{SC} \Leftrightarrow SC = \sqrt{3}.SA.$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}.x \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a.$

**Ví dụ 13:** Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, AC = AD = BC = BD = a và CD = 2x. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

b) Xác định x sao cho (ABC) vuông góc với (ABD).




**Giải**

a) Tam giác ACB cân đỉnh C và IA = IB nên CI ⊥ AB.
Tương tự DI ⊥ AB nên AB ⊥(CID)
Do đó IJ ⊥ AB.
Tương tự CD ⊥ (AJB) nên IJ ⊥CD

b) Ta có góc giữa (ABC) và (ABD) là $\widehat{CID} = 2\widehat{CIJ}$
(BCD) ⊥ (ACD) và BJ ⊥ CD ⇒ BJ ⊥ (ACD).
Vậy BJ ⊥ AJ.
mà $AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > x)$

Do đó: $AB = \sqrt{2}.\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ nên $IJ = \sqrt{AJ^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{2}}$

Do đó: $(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow CIJ = 45^0$

$\Leftrightarrow IJ = \dfrac{CD}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{2}} = x \Leftrightarrow 3x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

## DẠNG 3: LĂNG TRỤ - HÌNH CHÓP

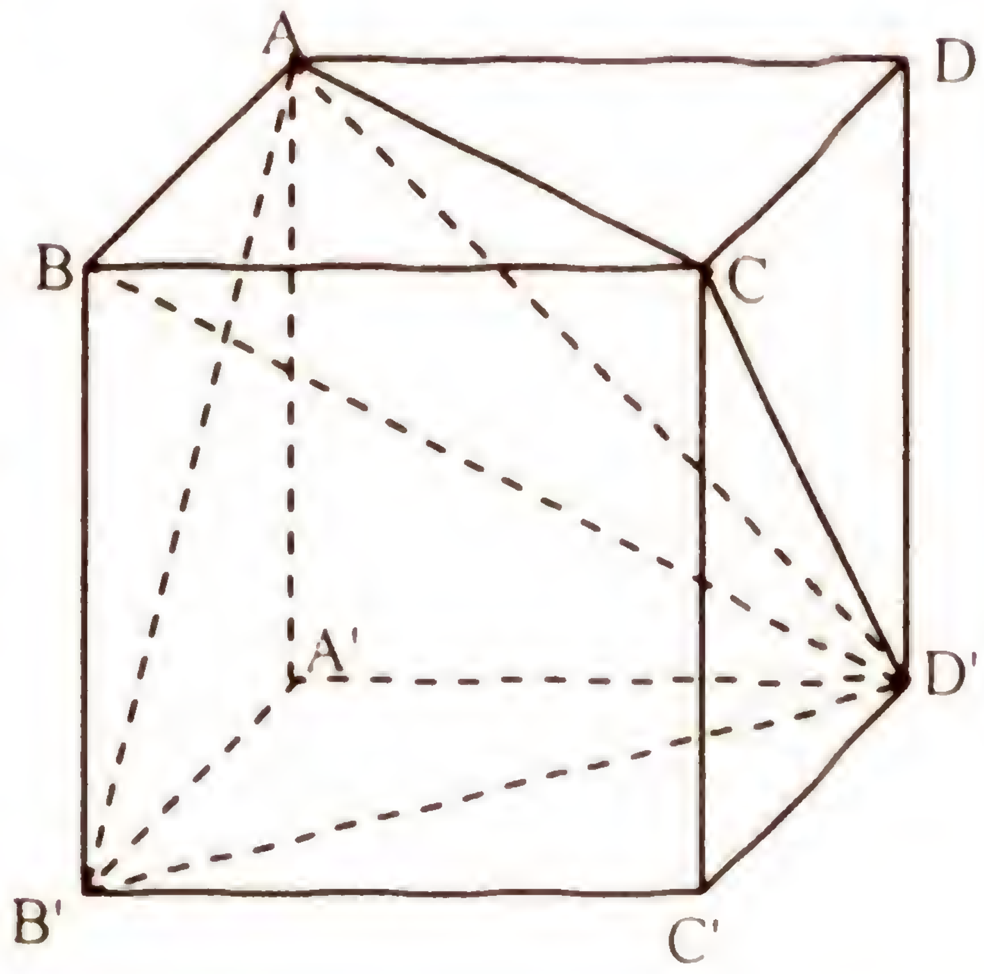
- Lăng trụ đứng khi các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Các mặt xung quanh là hình chữ nhật.
- Lăng trụ đều là lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều. Cần phân biệt với lăng trụ đáy đa giác đều, chỉ có đáy là tam giác đều.
- Hình hộp chữ nhật là lăng trụ đứng và đáy hình chữ nhật. Nếu a, b, c là 3 kích thước thì đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Nếu cạnh a thì đường chéo $d = a\sqrt{3}$ .
- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Hình chiếu của đỉnh lên mặt đáy là tâm của đáy. Chú ý vẽ ngược, xác định tâm của đáy rồi dựng đường vuông góc lên đỉnh.
- Hình chóp cụt đều được tạo ra khi cắt hình chóp đều bởi mặt phẳng song song với đáy.

**Ví dụ 1**: Hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau?

a) Tứ diện AB'CD'có các cạnh đối bằng nhau.

b) Tứ diện AB'CD' có các cạnh đối vuông góc.

c) Tứ diện AB'CD' là tứ diện đều.




**Giải**

a) Ta có B'D' = BD.

Vậy AC = B'D' ⇔ AC = BD, khi đó ABCD là hình chữ nhật. Tương tự ta cũng có ABB'A' và ADD'A' là những hình chữ nhật.

Vậy khi tứ diện AB'CD' có các cạnh đối diện bằng nhau thì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.

Ngược lại, khi ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật thì dễ thấy tứ diện AB'CD' có các cạnh đối diện bằng nhau.

b) Ta có BD // B'D'. Vậy AC $\perp$ B'D' ⇔ AC $\perp$ BD. Khi đó ABCD là hình thoi. Tương tự ta có ABB'A'và ADD'A' là những hình thoi. Vậy hình hộp ABCD. A'B'C'D' là hình hộp thoi (tức sáu mặt của hình hộp là hình thoi).

Ngược lại nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thoi thì ABCD là hình thoi nên AC $\in$ BD. Theo tính chất của hình hộp BD // B'D', do đó AC $\perp$ B'D'.

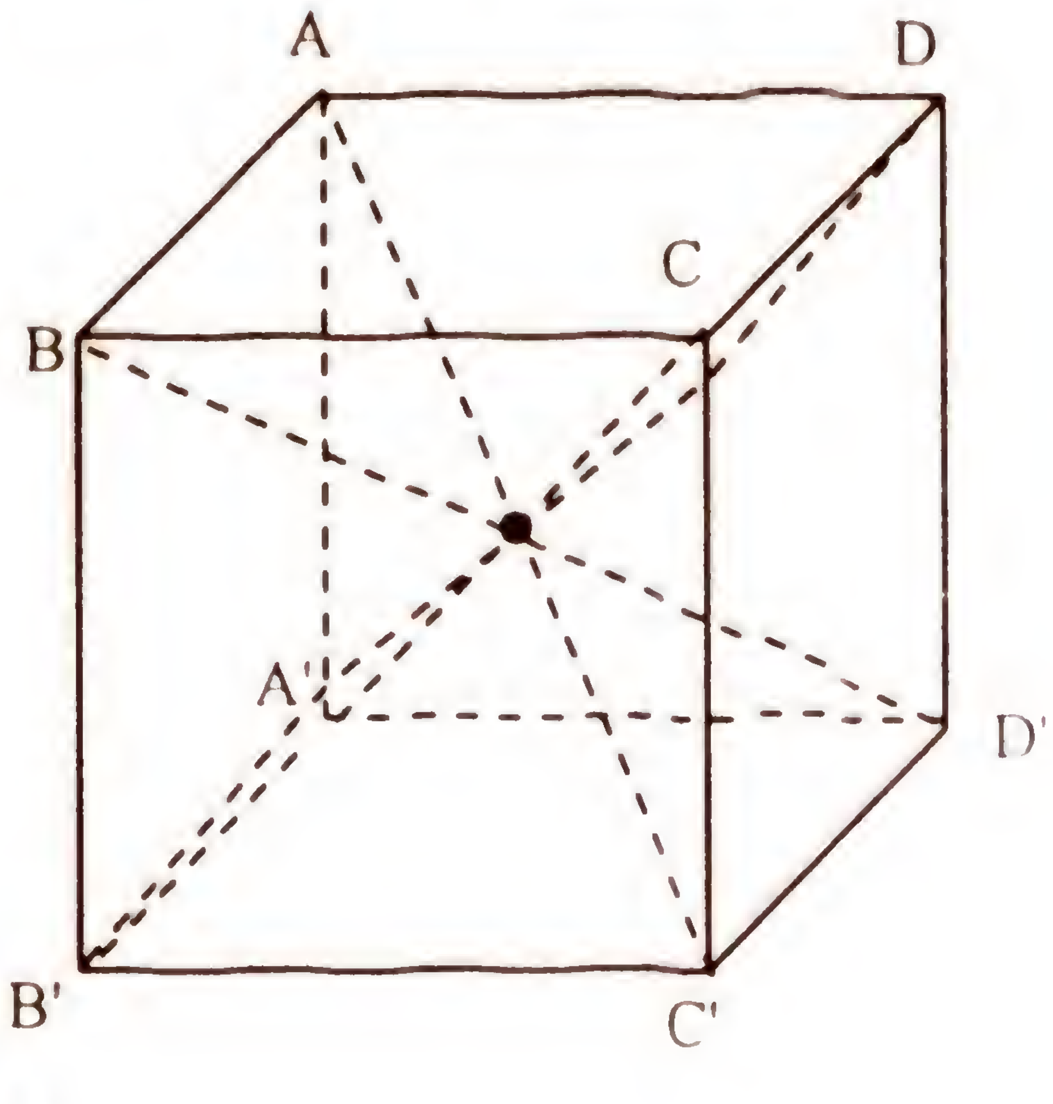
Tương tự AB' $\perp$ CD'; AD' $\perp$ CB'.

Do đó tứ diện AB'CD' có các cạnh đối diện vuông góc.

c) Khi AB'CD' là tứ diện đều thì các cạnh đối diện vừa bằng nhau vừa vuông góc; áp dụng kết quả của các câu a) và b) ta có: Khi AB'CD' là tứ diện đều thì hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương.

Ngược lại nếu ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương thì AB'CD' là tứ diện đều.

**Ví dụ 2**: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c. Nếu AC' = BD' = B'D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không? Vì sao?




**Giải**

Theo ví dụ 9 §3 Chương II ta có:

$$AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$

mà AC' = BD' = B'D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

nên A'C = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

tức là bốn đường chéo của hình hộp bằng nhau.

Do ACC'A' là hình bình hành và AC' = A'C nên ACC'A' là hình chữ nhật, tức là AA' $\perp$ AC.

Tương tự như trên ta có BB' $\perp$ BD, mà BB' // AA'.

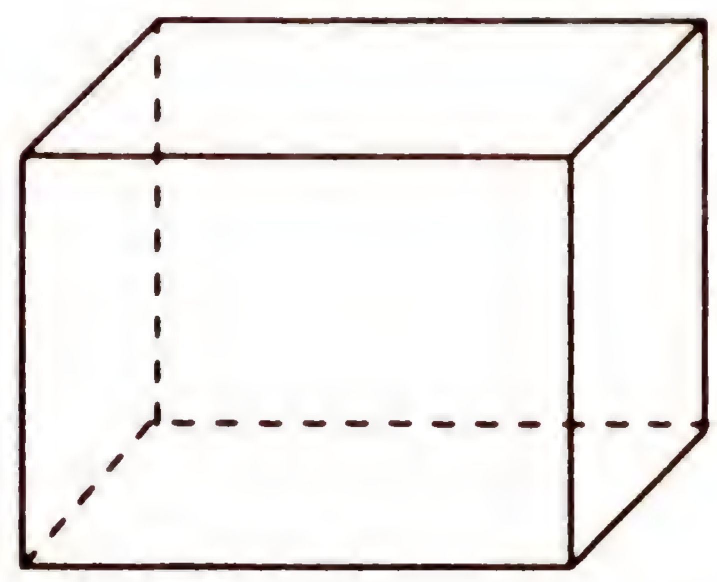
Vậy AA' $\perp$ mp(ABCD). Tương tự ta có AB $\perp$ (ADD'A).

Do đó ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.

**Ví dụ 3**: Chứng minh một hình hộp có:

a) 6 mặt là hình chữ nhật thì hình hộp là hình hộp chữ nhật.

b) 6 mặt là hình vuông thì hình hộp là hình lập phương.



**Giải**

a) Theo giả thiết thì 2 đáy là hình chữ nhật.
Vì hai mặt bên liên tiếp là hình chữ nhật nên giao tuyến là cạnh bên vuông góc với đáy, do đó hình hộp là hình hộp đứng. Vậy hình hộp đã cho là hình hộp chữ nhật.

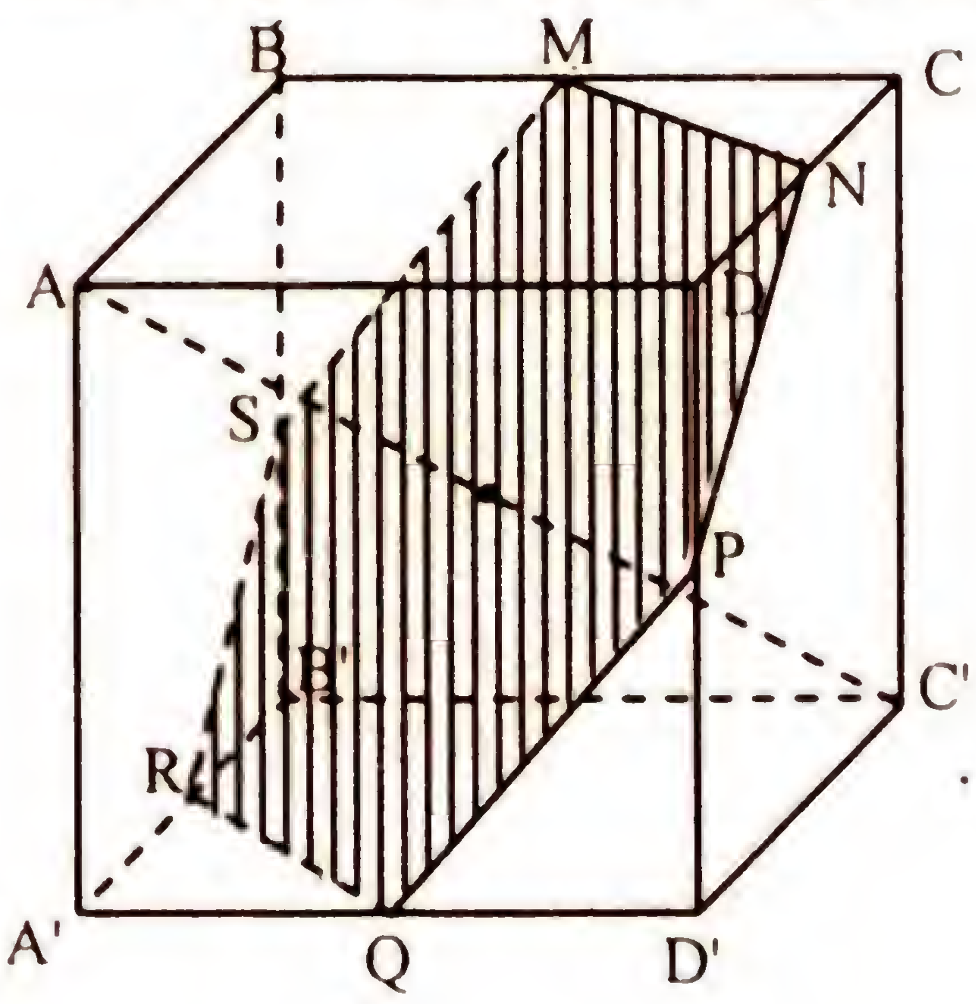
b) Vì hình vuông cũng là hình chữ nhật nên hình hộp cho là hình hộp chữ nhật, hơn nữa các cạnh hình vuông bằng nhau nên tất cả các cạnh hình hộp đều bằng nhau. Vậy hình hộp là hình lập phương.

**Ví dụ 4**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Chứng minh AC' vuông góc với hai mặt phẳng (A'BD) và (B'CD').

b) Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết diện đó.

**Giải**

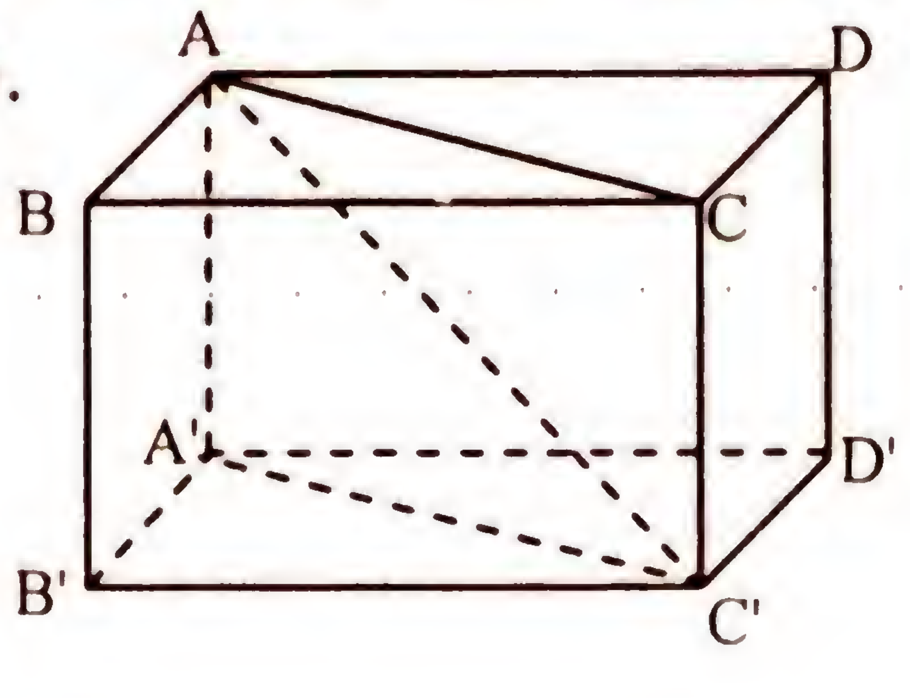



a) Ta có A và C' cách đều các đỉnh của tam giác A'BD, B'CD' nên thuộc trục của 2 tam giác đó.
Vậy AC' $\perp$ (A'BD), (B'CD').

b) Gọi M là trung điểm của BC thì MA = MC' (vì cùng bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$) nên M thuộc mặt phẳng trung trực ($\alpha$) của AC'.
Tương tự, ta chứng minh được N, P, Q, R, S cũng có tính chất đó (N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của CD, DD', D'A', A'B', B'B). Do đó thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mp($\alpha$) là MNPQRS. Thiết diện là lục giác đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên có diện tích: $S = 6.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

**Ví dụ 5:** Một hình hộp đứng có tất cả các cạnh bằng a, một đường chéo bằng $a\sqrt{2}$. Hãy tính diện tích đáy của hình hộp đó.

**Giải**




Tam giác vuông ACC' có CC' = a, AC' = $a\sqrt{2}$ nên AC = a.

Diện tích S của đáy bằng hai lần diện tích hình tam giác đều cạnh a.

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

**Ví dụ 6**: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C, CA = a, CB = b; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P). Thiết diện là hình gì?.

b) Tính diện tích thiết diện nói trên.

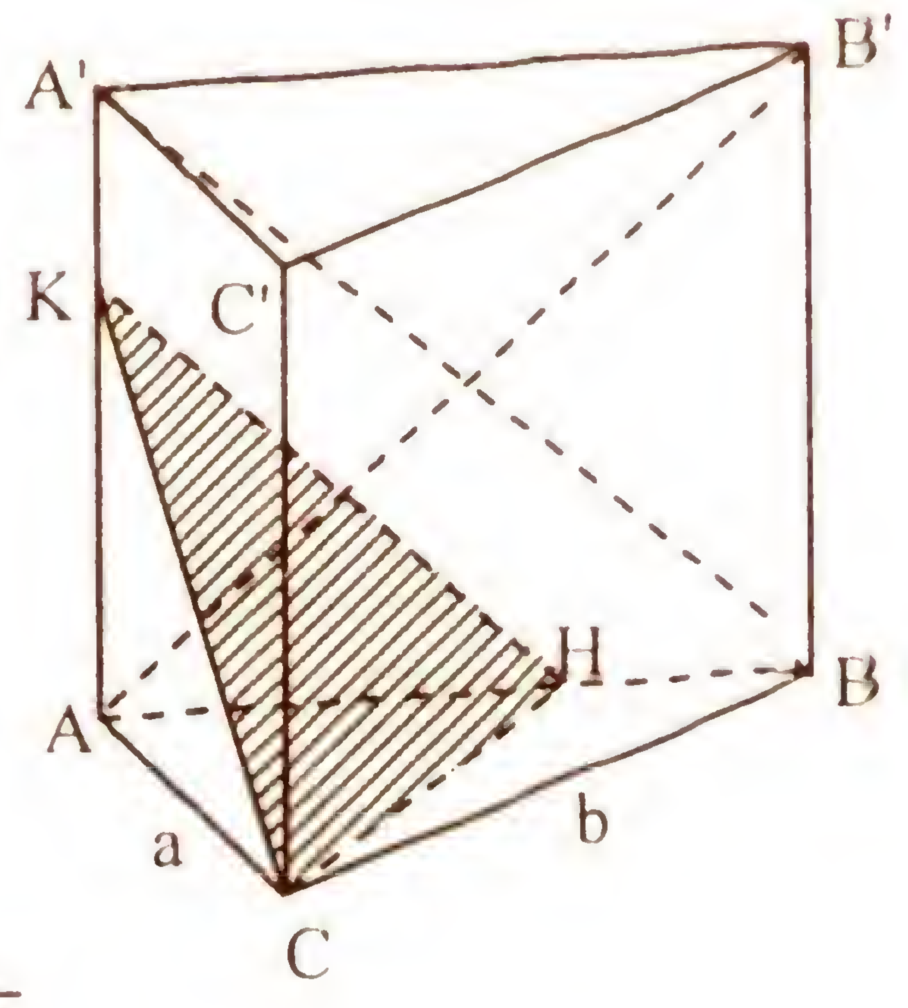
**Giải**

a) Kẻ đường cao CH của tam giác vuông ABC thì $CH \perp AB'$. Vì ABB'A' là hình vuông nên $AB' \perp A'B$. Vẽ HK // A'B thì $HK \perp AB'$ nên thiết diện là tam giác CHK.

Do $CH \perp AB$, $mp(ABB'A') \perp mp(ABC)$

nên $CH \perp (ABB'A')$, từ đó tam giác CHK vuông tại H.

b) $S_{CHK} = \dfrac{1}{2}CH.HK$.




Ta có: $CH.AB = CA.CB \Rightarrow CH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

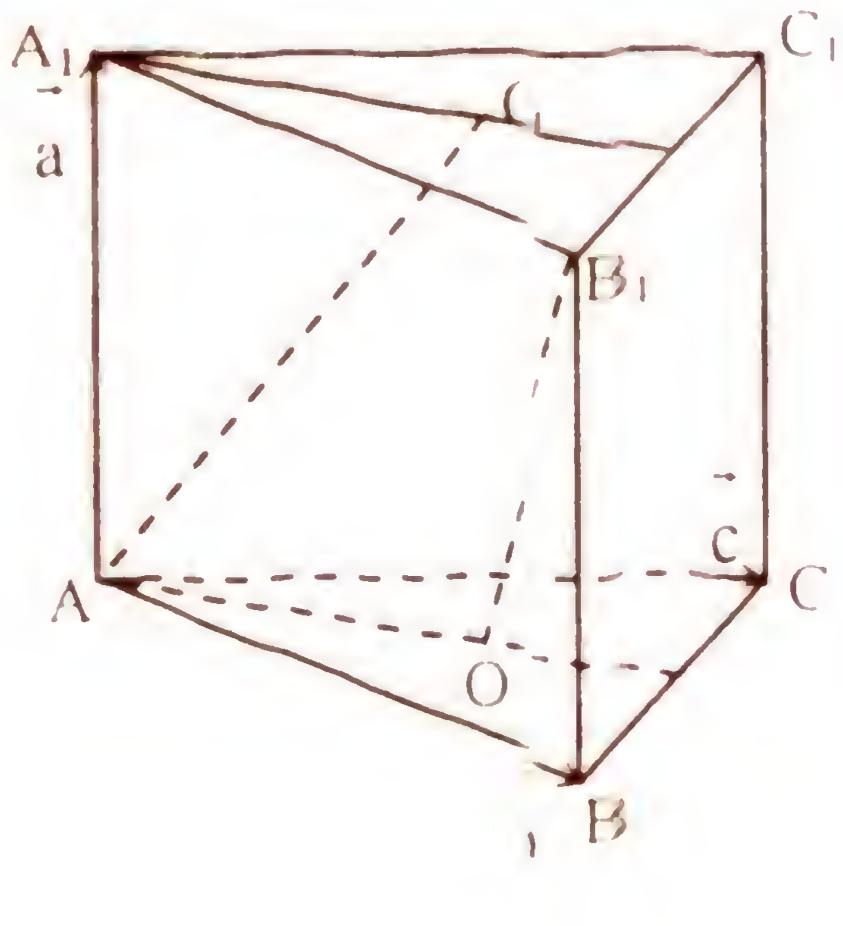
$AH.AB = a^2 \Rightarrow AH = \dfrac{a^2}{AB}$;

$\dfrac{HK}{A'B} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow HK = A'B.\dfrac{a^2}{AB^2}$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2}.a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Do đó : $S_{CHK} = \dfrac{a^3b\sqrt{2}}{2(a^2+b^2)}$.

**Ví dụ 7**: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ với cạnh đáy bằng a và cạnh bên $AA_1 = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa $AO_1$ và $OB_1$, ở đó O, $O_1$ lần lượt là tâm của hai tam giác đáy ABC và $A_1B_1C_1$.




**Giải**

Chọn hệ cơ sở $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$,

Gọi $\alpha$ là góc tạo bởi hai đường thẳng $AO_1$ và $OB_1$

$$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{OB_1})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AO_1}.\overrightarrow{OB_1}\right|}{AO_1.OB_1}$$

Vì lăng trụ tam giác đều nên :

$$AO_1^2 = OB_1^2 = AA_1^2 + A_1O_1^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{a^2}{3} = a^2$$

và $\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1})$

$$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CB_1})$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$$

Do đó : $\overrightarrow{AO_1}.\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{9}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$

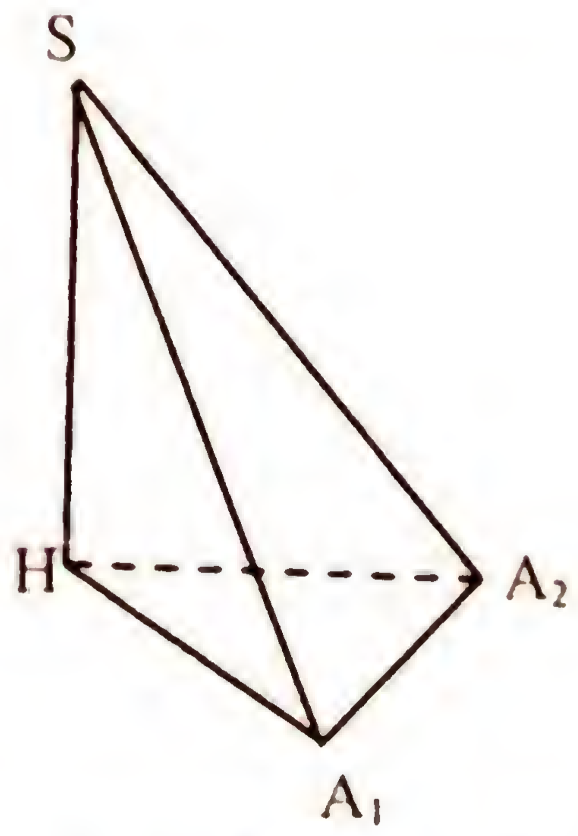
$$= \frac{1}{9}(9\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 - \vec{b}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} - \vec{c}^2) = \frac{5}{6}a^2.$$

Vậy $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

**Ví dụ 8:** Chứng minh một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy là đa giác đều và một điều kiện:

a) Đường cao hình chóp đi qua tâm của đáy.

b) Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.




**Giải**

Giả sử hình chóp là $S.A_1A_2...A_n$, hạ SH vuông góc với mp$(A_1A_2...A_n)$.

a) Ta có $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$

$\Leftrightarrow HA_1 = HA_2 = ... = HA_n$

Vì $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều nên điều đó xảy ra khi và chỉ khi H là tâm của đa giác đều đó. Vậy, một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và đường cao của nó đi qua tâm của đáy.

b) $\widehat{SA_kH}$ là góc giữa cạnh bên $SA_k$ với mặt đáy, với k = 1, 2, .., n

Ta có $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n \Leftrightarrow \widehat{SA_1H} = \widehat{SA_2H} = ... = \widehat{SA_nH}$.

Vậy, một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy những góc bằng nhau.

**Ví dụ 9**: Chứng minh:

a) Hình chóp tứ giác có 8 cạnh bằng nhau là hình chóp đều.

b) Hình chóp có đáy là đa giác đều và có ba cạnh bên bằng nhau thì đó là hình chóp đều.

**Giải**

a) Giả sử hình chóp S.ABCD có 8 cạnh bằng nhau. Đáy ABCD là một hình thoi. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: OA = OC; SA = SC $\Rightarrow$ SO $\perp$ AC.

$OB = OD$; $SB = SD \Rightarrow SO \perp BD$.

Do đó $SO \perp mp(ABCD)$ và vì $SA = SB = SC = SD$

Suy ra $OA = OB = OC = OD$ hay ABCD là hình vuông. Vậy hình chóp SABCD là hình chóp đều.

b) Giả sử hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác đều, có ba cạnh bên nào đó bằng nhau: $SA_i = SA_j = SA_k$. Khi đó nếu gọi H là hình chiếu của S lên đáy thì $HA_i = HA_j = HA_k$, vậy H phải trùng với tâm của đáy $A_1A_2...A_n$. Suy ra hình chóp đã cho là hình chóp đều.

**Ví dụ 10:** Chứng minh trong một hình chóp cụt đều thì các mặt xung quanh là các hình thang cân bằng nhau.

**Giải**

Giả sử hình chóp cụt đều $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ sinh từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$.

Do mỗi mặt bên của hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ là các tam giác cân bằng nhau mà mặt phẳng $(A'_1A'_2...A'_n)$ song song với mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ nên $A'_1A'_2 // A_1A_2, ..., A'_nA'_1 // A_nA_1$. Ngoài ra $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = ... = A'_nA'_1$ và $A_1A'_1 = A_2A'_2 = ... = A_nA'_n$.

Vậy các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân bằng nhau.

## DẠNG 4: TỔNG HỢP VUÔNG GÓC

- Vận dụng tổng hợp quan hệ song song và vuông góc để giải toán.
- Khi giải bằng công cụ vectơ phải chọn được hệ vectơ cơ sở
- Để tính diện tích, ngoài cách dùng công thức trực tiếp ta có dùng công thức chiếu $S' = S.\cos\varphi$, hoặc chia cắt, bù trừ các phần diện tích, tỉ số đồng dạng, ...

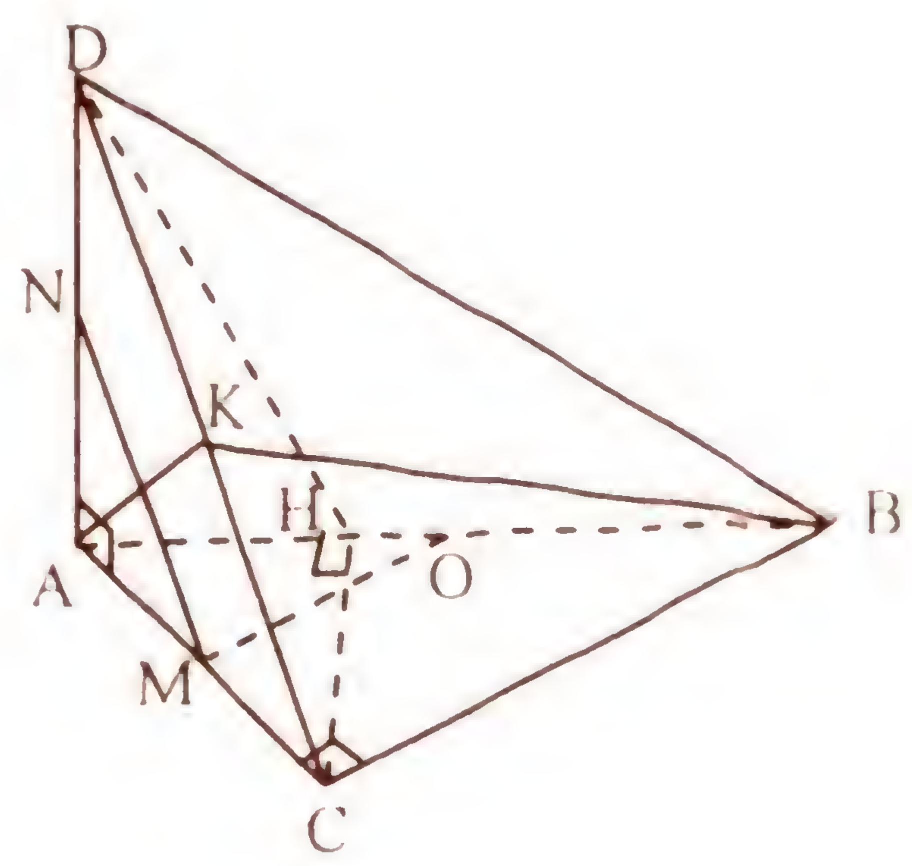
**Ví dụ 1**: Tứ diện ABCD có cạnh $AD \perp mp(ABC)$ và tam giác ABC vuông ở C.

a) Chứng minh rằng các mặt của tứ diện ABCD là các tam giác vuông.

b) Trong $\Delta ABC$ và $\Delta DAC$ vẽ các đường cao CH và AK. Chứng minh rằng $\Delta CHD$, $\Delta AKB$ là tam giác vuông.

c) Gọi M, N và O lần lượt là trung điểm của AC, AD, AB. Chứng minh rằng $\Delta OMN$, $\Delta KMB$, $\Delta KNO$ là tam giác vuông.

**Giải**




a) Theo giả thiết: $\Delta ABC$ vuông ở C, $\Delta ACD$ vuông ở A, $\Delta ABD$ vuông ở A.

Và $AD \perp mp(ABC)$ nên $AD \perp BC$ và do $BC \perp AC$ nên $BC \perp mp(ACD)$

$\Rightarrow BC \perp DC$.

Vậy $\Delta BCD$ vuông ở C;

b) $CH \perp AD$ và $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp HD$.

Vậy $\Delta CHD$ vuông ở H.

Do $BC \perp AK$, $CD \perp AK$ nên:

$AK \perp mp(BCD) \Rightarrow AK \perp KB$.

Vậy $\Delta AKB$ vuông ở K.

c) Ta có: $OM // BC \Rightarrow OM \perp mp(ACD) \Rightarrow OM \perp MN$.

Vậy $\Delta OMN$ vuông ở M.

Và do: $KN = \frac{1}{2}AD$, $KM = \frac{1}{2}AC$, $MN = \frac{1}{2}CD$ suy ra:

$\Delta KMN \sim \Delta ACD$ nên $\Delta KMN$ vuông ở K.

Theo chứng minh trên: $OM \perp mp(ACD) \Rightarrow OM \perp NK$ và $MK \perp NK$

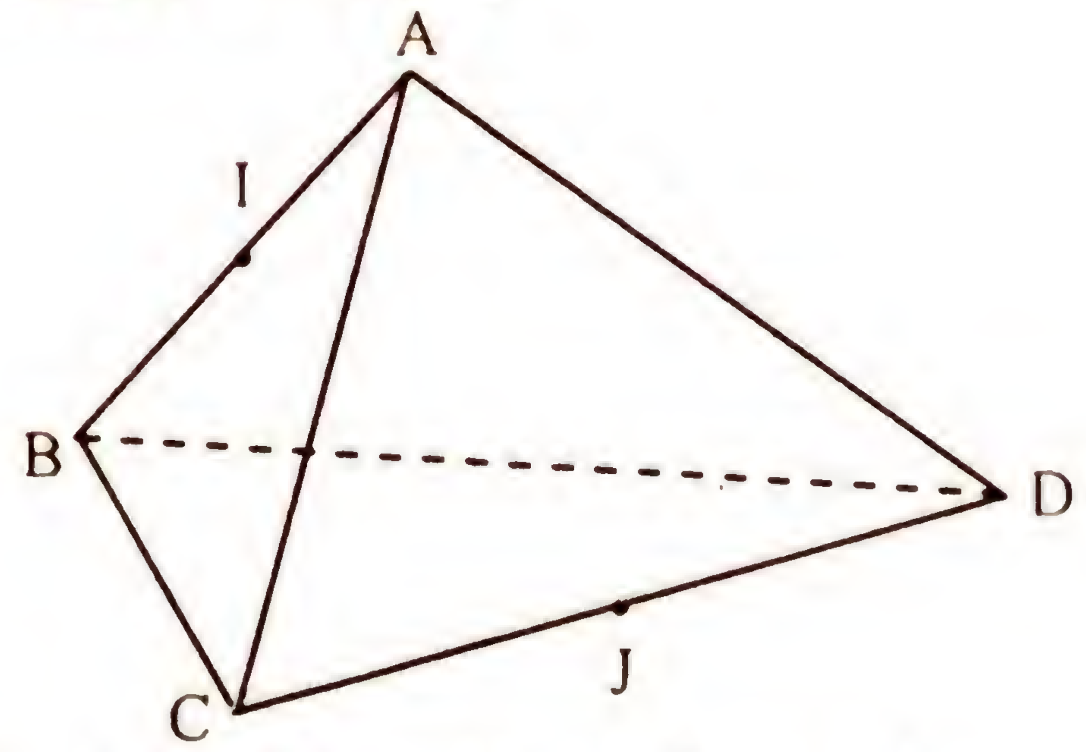
$\Rightarrow NK \perp mp(KMO) \Rightarrow NK \perp OK$ hay $\Delta KNO$ vuông ở K.

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:

a) Ba đường trung bình của tứ diện bằng nhau.

b) Nếu $AB = AC + AD$ thì $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA} = 90^o$.

**Giải**



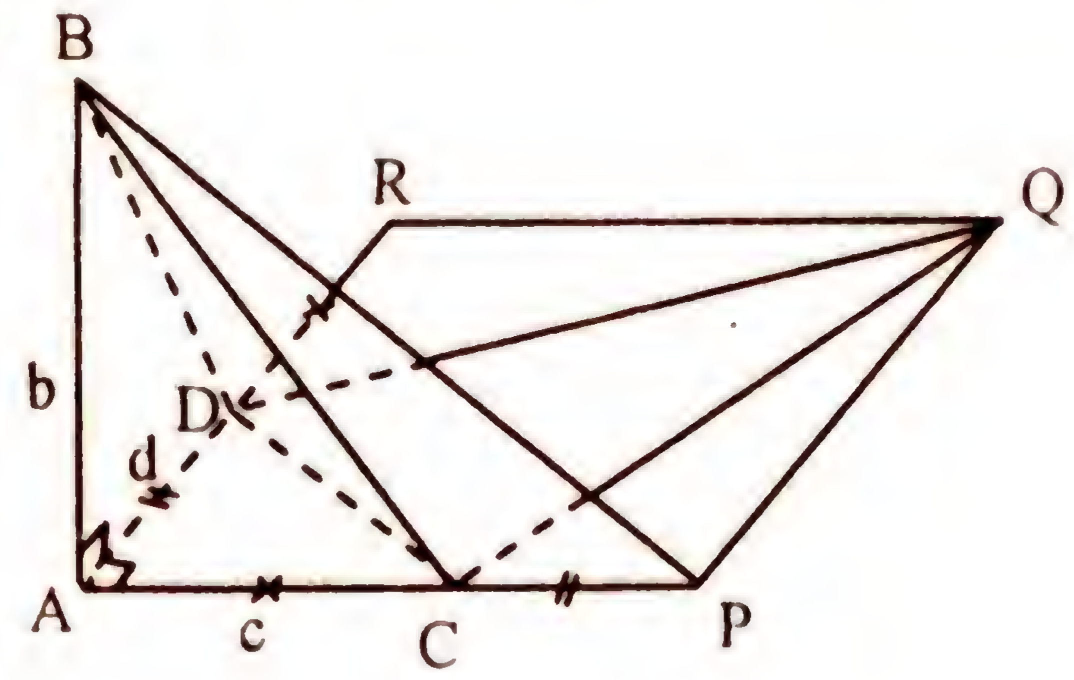

a) Gọi I, J là trung điểm AB, CD.

$$IJ^2 = \overrightarrow{IJ}^2 = (\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI})^2$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$= \frac{1}{4}(AC^2 + AB^2 + AD^2)$$ vì AB, AC, AD đôi một vuông góc.

Tương tự thì có 3 đường trung bình cùng bằng $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + AD^2}$.




b) Trên các tia AC và AD lần lượt lấy các điểm P và R sao cho:

$AP = AR = AB$ và vẽ hình vuông APQR

$\Rightarrow DR = AC$ và $CP = AD$.

Khi đó, ta có:

$\Delta ABC = \Delta RQD$ và $\Delta ABD = \Delta PQC$

$\Rightarrow \Delta BCD = \Delta QDC$.

Do đó: $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA} = \widehat{RQD} + \widehat{DQC} + \widehat{CQD} = \widehat{RQP} = 90^o$

Cách khác: Dùng định lý côsin.

**Ví dụ 3**: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông ABCD vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$.

a) Chứng minh (SAD) vuông góc với (SDC), (SAC) vuông góc với (SCB).

b) Gọi $\varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD), tính $\tan\varphi$.

c) Mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt hình chóp. Xác định và tính diện tích thiết diện.

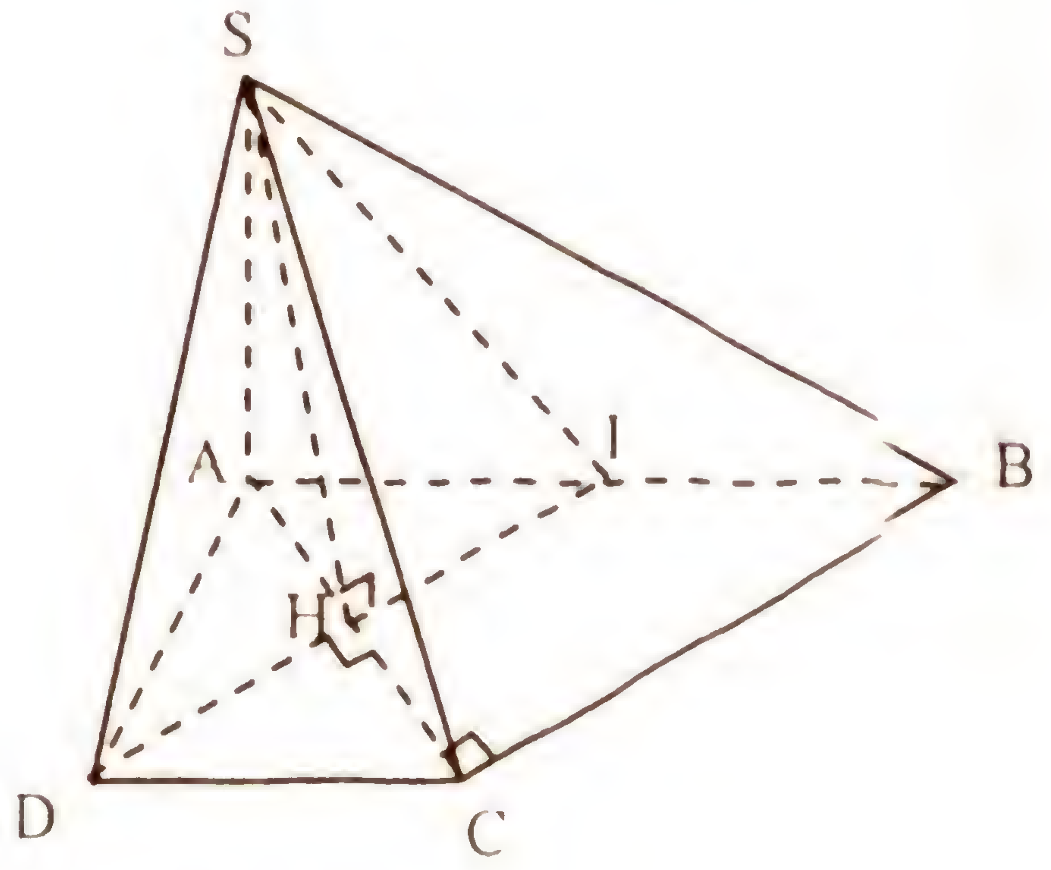
**Giải**

a) Ta có $CD \perp AD$; $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Ta có AICD là hình vuông và IBCD là hình bình hành.

Vì DI // CB và $DI \perp AC$ nên $AC \perp CB$.

Do đó $CB \perp (SAC)$. Vậy $(SBC) \perp (SAC)$.




b) Ta có $CB \perp CA$, $CB \perp SC$

nên $\varphi = \widehat{SCA} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $DI \perp AC$; $DI \perp SA \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow (SDI) \perp (SAC)$.

Do đó thiết diện với hình chóp là tam giác đều SDI có cạnh bằng $a\sqrt{2}$.

Gọi H là tâm hình vuông AICD và có $SH \perp DI$ và $SH = \dfrac{DI\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác SDI có diện tích: $S = \dfrac{1}{2}SH.DI = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

**Ví dụ 4:** Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh a. Trên hai tia Bx và Dy vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và cùng nằm về một phía của mặt phẳng (ABCD) lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho: $BM.DN = \dfrac{a}{2}$. Đặt $\widehat{BOM} = \alpha$, $\widehat{DON} = \beta$.

a) Chứng minh $\tan\alpha.\tan\beta = 1$. Kết luận được gì về hai góc $\alpha$ và $\beta$?

b) Chứng minh (ACM) vuông góc với (CAN).

c) Gọi H là hình chiếu của O trên MN. Chứng minh rằng AH vuông góc với HC và mặt phẳng (AMN) vuông góc với (CMN).

**Giải**

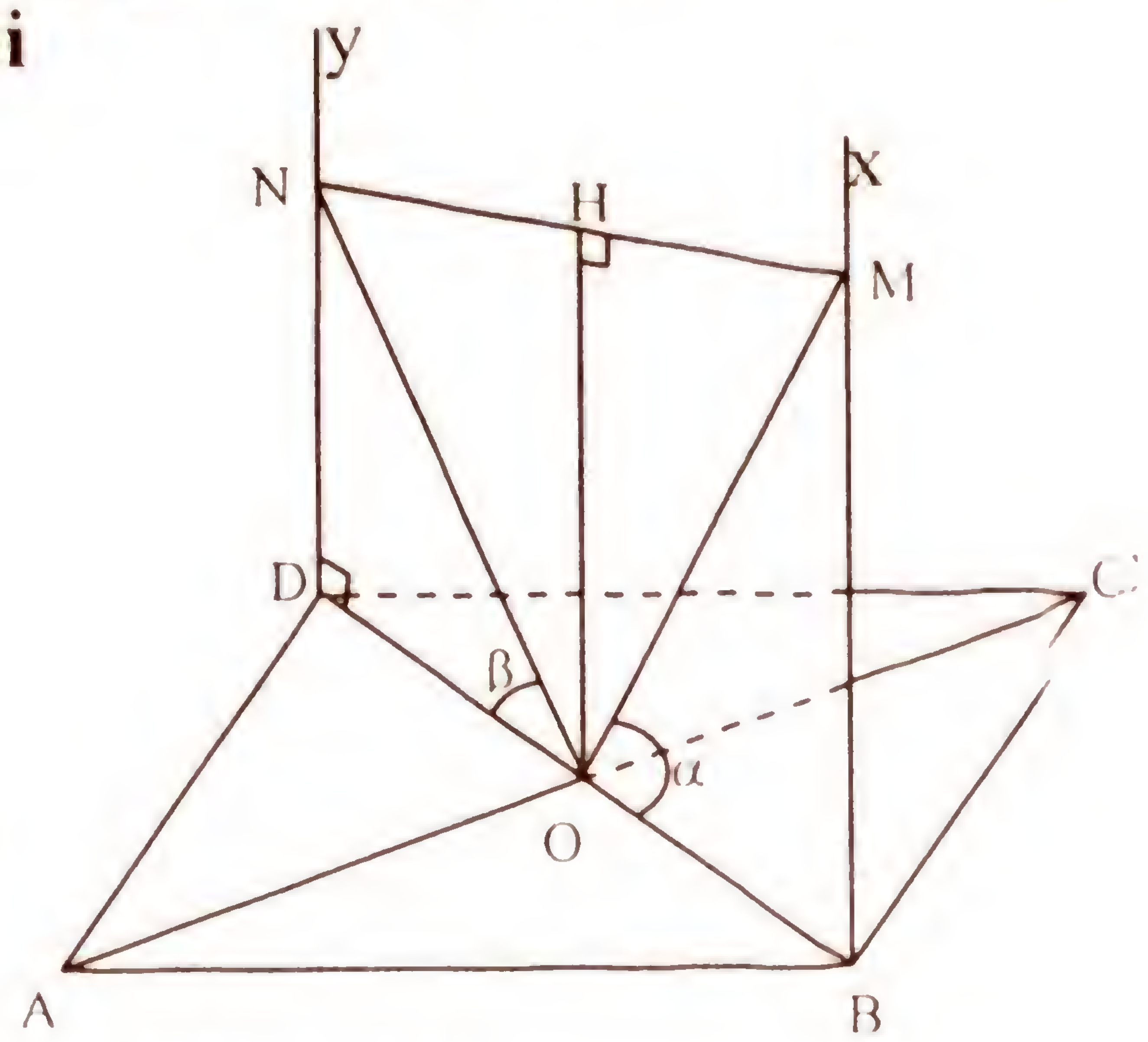
a) $\tan\alpha = \dfrac{BM}{OB}$, $\tan\beta = \dfrac{DN}{OD}$;

$OB = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Theo giả thiết $BM.DN = \dfrac{a^2}{2}$

nên ta có: $\tan\alpha.\tan\beta = \dfrac{BM.DN}{OB.OD} = 1$

Do đó $\tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^0$.




b) Ta có $AC \perp (Bx, Dy)$ nên $OM \perp AC$ và $ON \perp AC$.

Vậy góc $\widehat{MON}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ACM) và (ACN).

Trong (Bx, Dy) ta có: $\widehat{MON} = 180^o - (\alpha + \beta) = 90^o$.

Do đó: (ACM) $\perp$ (ACN).

c) Ta có: $OM = \dfrac{OB}{\cos\alpha}$, $ON = \dfrac{OD}{\cos\beta}$. Vì OH là đường cao trong tam giác vuông MON nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}{OB^2} = \frac{1}{OB^2}$$

nên OH = OB $\Rightarrow$ OH = OA = OC. Do đó AH $\perp$ HC.

Vì MN $\perp$ OH và MN $\perp$ AC nên MN $\perp$ HA, HC.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) bằng $90^o$.

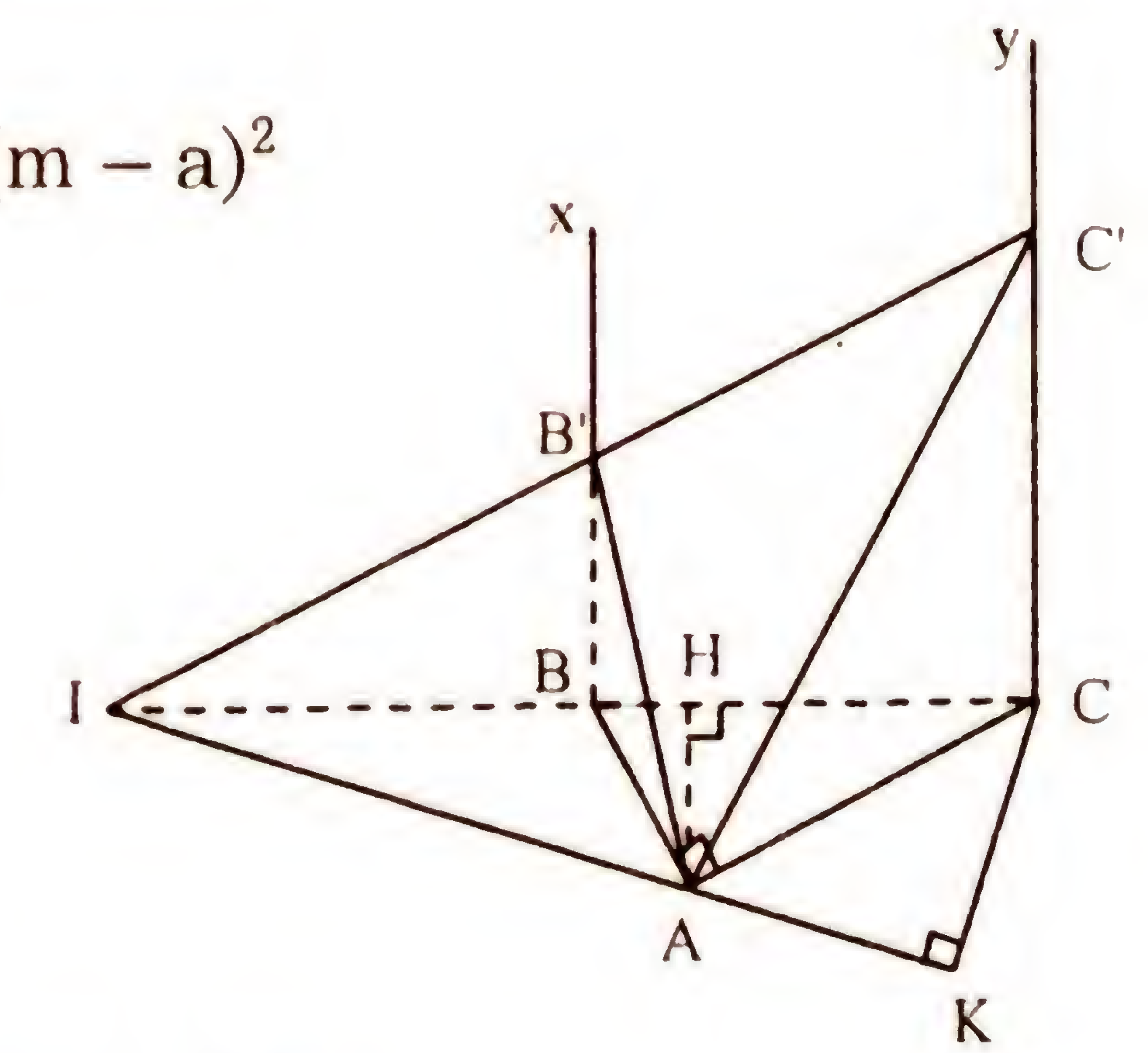
Vậy: (AMN) $\perp$ (CMN).

**Ví dụ 5:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Hai tia Bx và Cy cùng vuông góc với mp(ABC) và nằm về một phía đối với mặt phẳng đó. Trên Bx, Cy lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho BB' = a, CC' = m.

a) Với giá trị nào của m thì AB'C' là tam giác vuông?

b) Khi tam giác AB'C' vuông tại B', hạ AH $\perp$ BC. Chứng minh B'C'H là tam giác vuông. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'C').

**Giải**




a) Ta có $AC^2 = 3a^2$, $AB'^2 = 2a^2$,

$AC'^2 = 3a^2 + m^2$, $B'C'^2 = 4a^2 + (m - a)^2$

Xét 3 trường hợp:

- Tam giác vuông AB'C' vuông ở A:

$5a^2 + m^2 - 2ma = 2a^2 + 3a^2 + m^2$

$\Leftrightarrow -2ma = 0 \Leftrightarrow m = 0$

- Tam giác AB'C' vuông ở C':

$2a^2 = 3a^2 + m^2 + 4a^2 + (m - a)^2$

$\Leftrightarrow m^2 - ma + 3a^2 = 0$ (vô nghiệm).

- Tam giác AB'C' vuông ở B'

$2a^2 + 4a^2 + (m - a)^2 = 3a^2 + m^2 \Leftrightarrow m = 2a$

b) Giả sử tam giác AB'C' vuông ở B', tức là m = 2a.

Vì AH $\perp$ BC nên $BH.BC = AB^2 = a^2 \Rightarrow BH = \dfrac{a}{2}$

$HC = \dfrac{3a}{2}$ và $B'H^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$

$CH^2 = \dfrac{9a^2}{4} + 4a^2 = \dfrac{25a^2}{4}$ ; $B'C'^2 = 5a^2$

Do đó $B'H^2 + B'C'^2 = C'H^2$ nên tam giác B'C'H vuông tại B'.

Gọi I là giao điểm của B'C' và BC. Do BB' // CC', BB' = a, CC' = 2a nên BC = BI, B'C' = B'I.

Ta có tam giác AIC là hình chiếu của tam giác AIC'. Gọi φ là góc giữa mp(ABC) và mp(AB'C') thì:

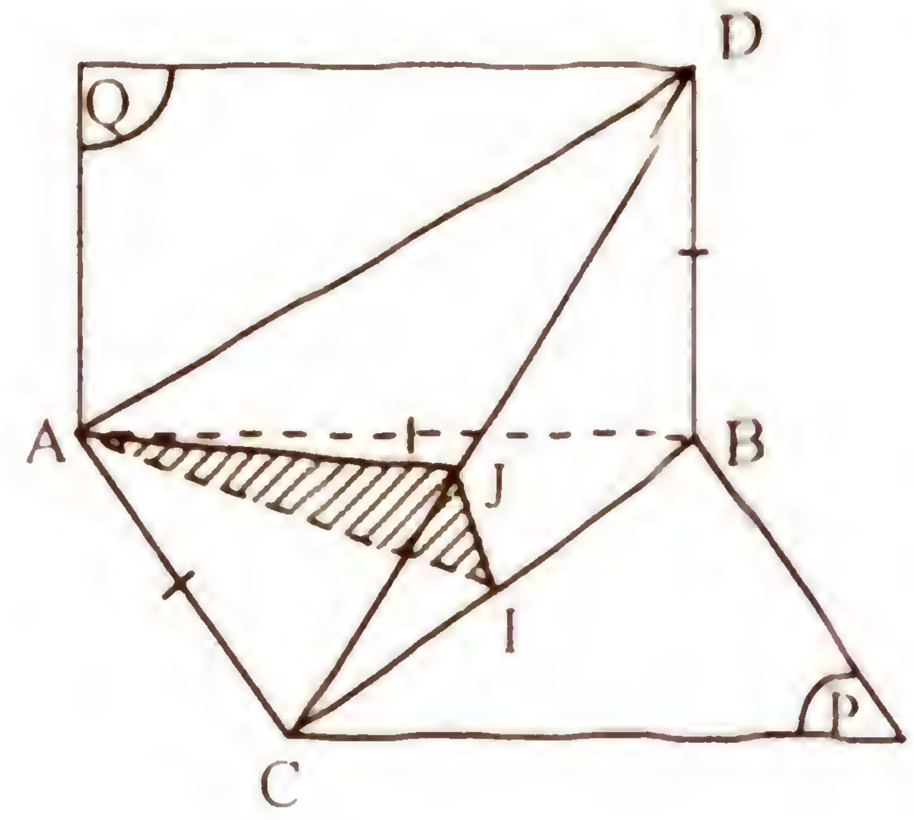
$S_{AIC} = S_{AIC'}.\cos\varphi$, ta có: $S_{AIC} = 2S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Và $S_{AIC'} = \frac{1}{2}IC'.AB' = \frac{1}{2}.2a\sqrt{5}.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{10}$

nên $\cos\varphi = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

**Ví dụ 6**: Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C ∈ (P), D ∈ (Q) sao cho AC ⊥ AB, BD ⊥ AB và AB = AC = BD. Xác định thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích thiết diện khi AC = AB = BD = a.

**Giải**




Gọi I là trung điểm của BC thì AI ⊥ BC. Do BD ⊥ mp(ABC) nên AI ⊥ CD (định lí ba đường vuông góc). Trong mp(CDB), kẻ IJ vuông góc với CD (J ∈ CD) thì mp(AIJ) chính là mặt phẳng (α) và thiết diện phải tìm là tam giác AIJ vuông tại I.

Ta có $S_{AIJ} = \frac{1}{2}AI.IJ$.

với $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ; $\frac{IJ}{DB} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow IJ = \frac{CI}{CD}.DB = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy $S_{AIJ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

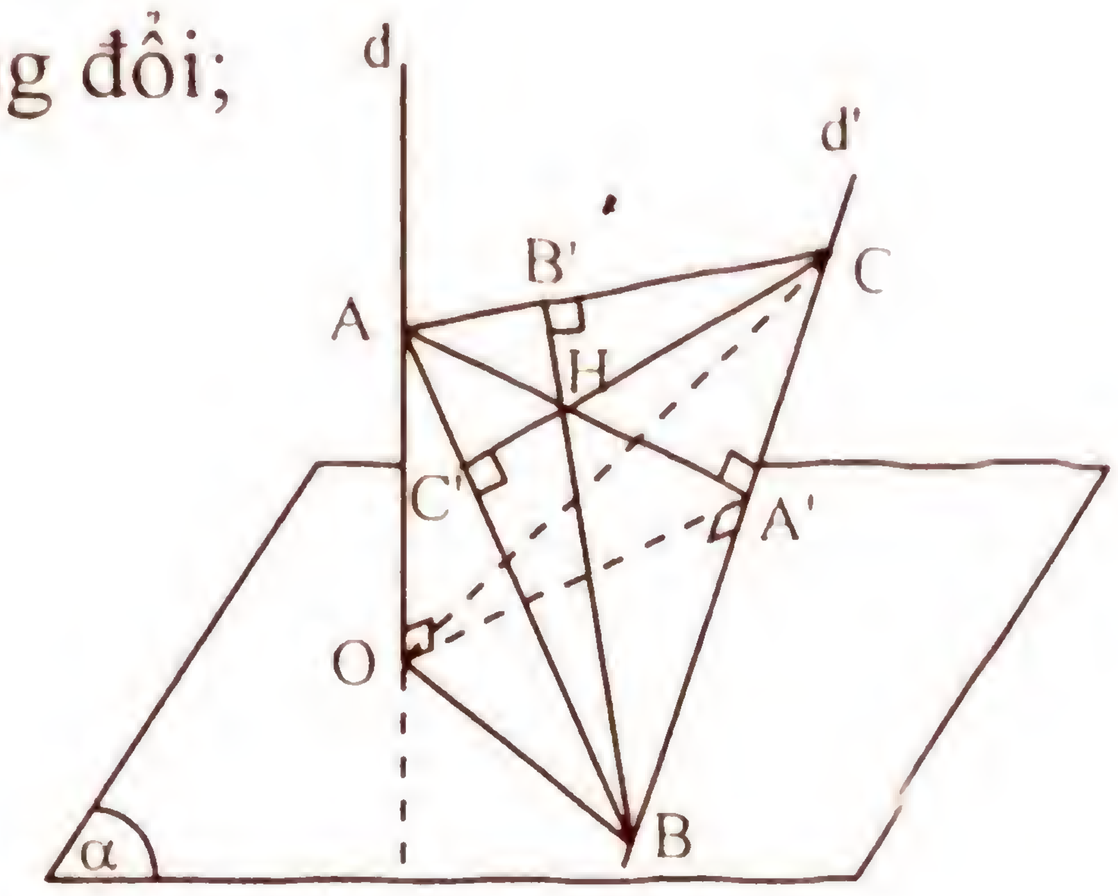
**Ví dụ 7**: Cho d là một đường thẳng vuông góc với mp(α) và cắt (α) tại O. Giả sử A là một điểm cố định trên d, B và C là hai điểm di động trên một đường thẳng d' cố định trên (α) và không đi qua O sao cho mp(B; d) ⊥ m(C; d). Gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường cao AA', BB', CC' của ΔABC.

a) Chứng minh rằng tích A'B .A'C không đổi và trực tâm H của ΔABC luôn cố định.

b) Chứng minh rằng $(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ không đổi;

c) Tìm tập hợp các điểm B' và C'.

**Giải**




a) Vì AA' ⊥ BC nên OA' ⊥ BC.

Theo giả thiết (B; d) ⊥ (C; d) và do (α) ⊥ (C; d) nên giao tuyến OB ⊥ (C; d) ⇒ OB ⊥ OC.

Do O và d' cố định nên A' cố định. Trong tam giác vuông BOC có:

$A'B \cdot A'C = OA'^2$ (bằng hằng số).

Do O là hình chiếu của B xuống mp(C; d) và BB' ⊥ AC nên OB' ⊥ AC ⇒ AC ⊥ mp(OBB') ⇒ AC ⊥ OH. Mặt khác do BC ⊥ mp(OAA') nên BC ⊥ OH ⇒ OH ⊥ mp(ABC) ⇒ OH ⊥ AA'. Vì tam giác vuông OAA' cố định nên H cố định.

b) Ta có: $AB^2 + AC^2 - BC^2 = (AO^2 + OB^2) + (AO^2 + OC^2) - (OB^2 + OC^2) = 2AO^2$ : không đổi.

c) Các điểm B', C' thuộc mặt phẳng cố định (A; d') và đều nhìn đoạn thẳng AH cố định dưới một góc vuông nên chúng đều thuộc đường tròn (C) đường kính AH trong mặt phẳng (A; d').

Do AA' ⊥ BC nên BA và BH không thể vuông góc với AA' nên B' ≡ A, H, tương tự C' ≡ A, H.

Ngược lại, lấy B' ∈ (C) \ {A; H}. Gọi C = AB' ∩ d' và B = HB' ∩ d'. Ta phải chứng minh: mp(C; d) ⊥ mp(B; d).

Thật vậy, do AC ⊥ BB', AC ⊥ OH

nên AC ⊥ mp(OBB') ⇒ OB ⊥ AC.

Mặt khác, OB ⊥ OA ⇒ OB ⊥ mp(OAC)

⇒ mp(B; d) ⊥ mp(C; d).

Chứng minh tương tự đối với C'. Vậy tập hợp các điểm B', C' là đường tròn (C) trừ hai điểm A, H và trong mặt phẳng (A; d')

**Ví dụ 8:** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AA', AC, A'B'. Hãy dựng và tính diện tích của thiết diện của hình hình lăng trụ khi cắt bởi mp(MNP).

**Giải**

Đường thẳng MN cắt A'C' tại I và CC' tại J.

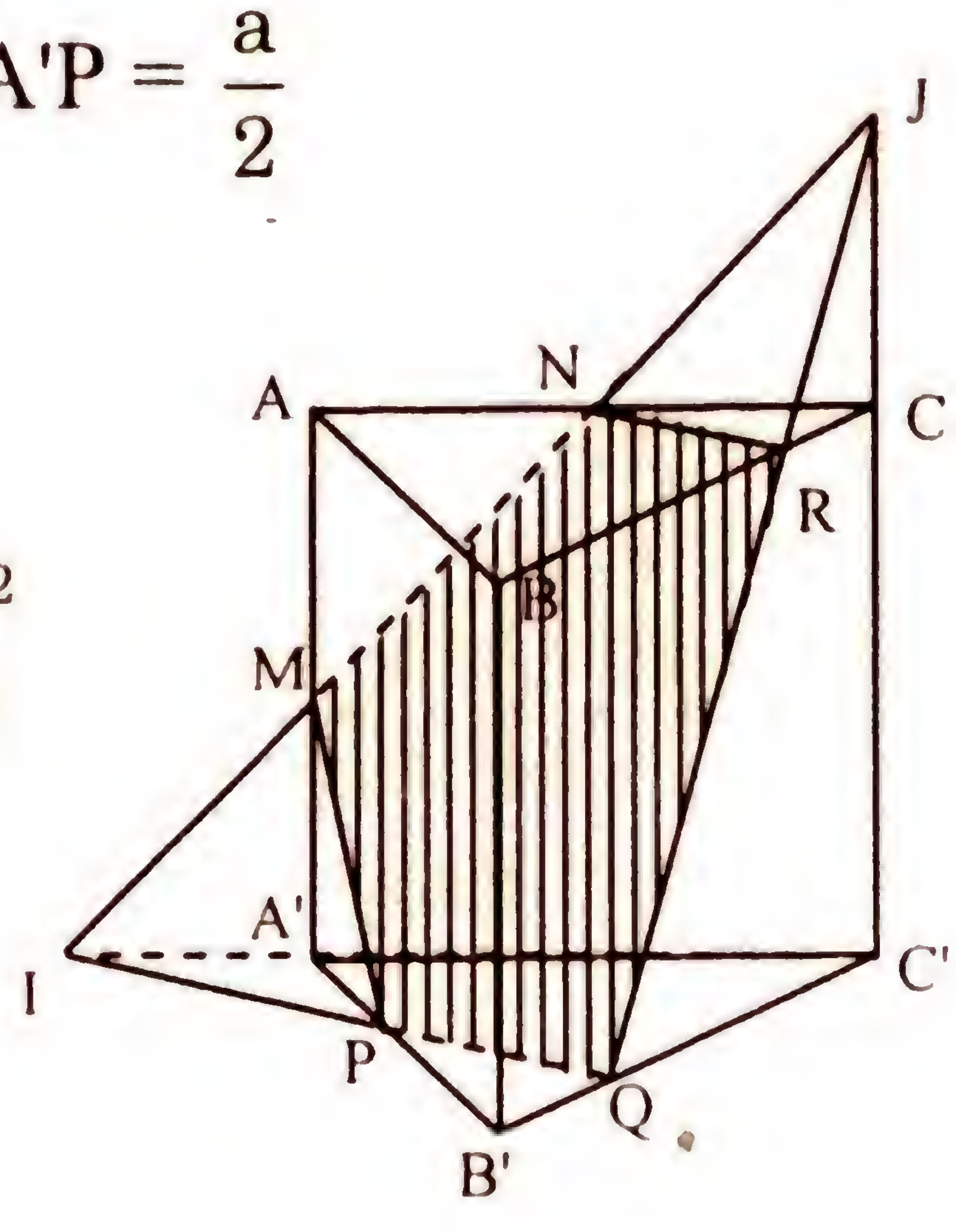
Đường thẳng IP cắt B'C' tại Q và QJ cắt BC tại R.

Thiết diện là ngũ giác NMPQR. Ta có $A'I = A'P = \frac{a}{2}$

và $\widehat{IA'P} = 120^\circ$ nên $\widehat{A'IP} = 30^\circ$.

Do đó tam giác IQC' vuông tại Q.

Và vì vậy ΔIQJ vuông tại Q.




$$JQ^2 = JC'^2 + C'Q^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = 5\left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow JQ = \frac{3a\sqrt{5}}{4}$$

$$IQ = \frac{\sqrt{3}}{2}IC' = \frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $S = \frac{1}{2}JQ.IQ = \frac{1}{2}\frac{3a\sqrt{3}}{4}.\frac{3a\sqrt{5}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{15}}{32}$.

Ta có tam giác JRN đồng dạng với $\Delta JQI$ với tỉ số $\frac{1}{3}$ nên diện tch của JRN là $S_1 = \frac{1}{9}S$

Mặt khác $\frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3}, \frac{IP}{IQ} = \frac{2}{3}$ nên nếu gọi $S_2$ là diện tích tam giác IMP thì $S_2 = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S = \frac{2}{9}S$. Gọi $S_3$ là diện tích thiết diện thì

$$S_3 = S - S_1 - S_2 = S - \frac{1}{9}S - \frac{2}{9}S = \frac{2}{3}S = \frac{2}{3}.\frac{9a^2\sqrt{15}}{32} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{16}.$$

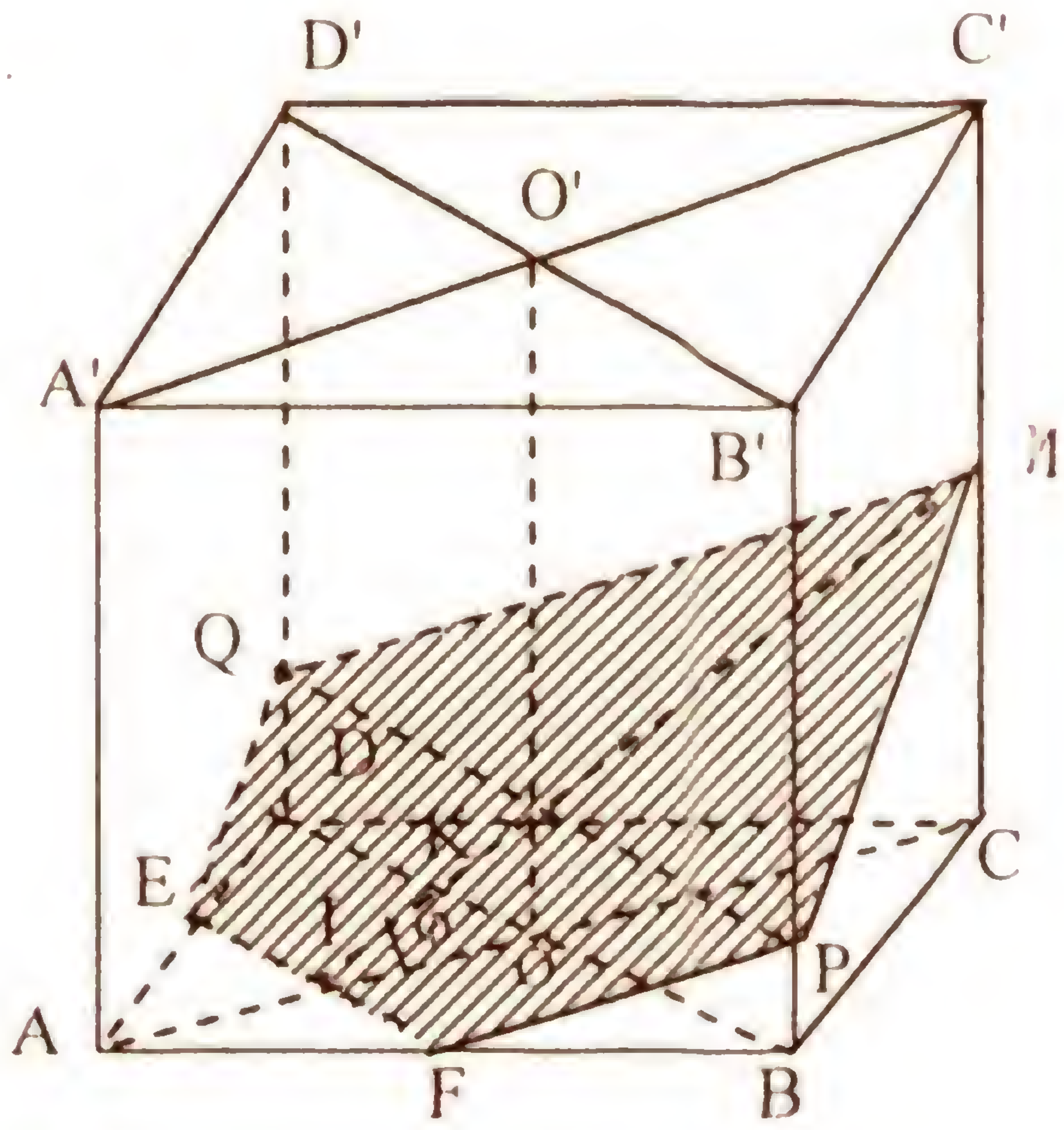
**Ví dụ 9**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là a. Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'.

a) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM).

b) Tính diện tích của thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (EFM).

**Giải:**

a) Ta có giao tuyến của (ABCD) và (EFM) là EF vuông góc với AC nên EF vuông góc IM.




$$\varphi = \widehat{MIC}$$

$$\tan\varphi = \frac{CM}{IC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

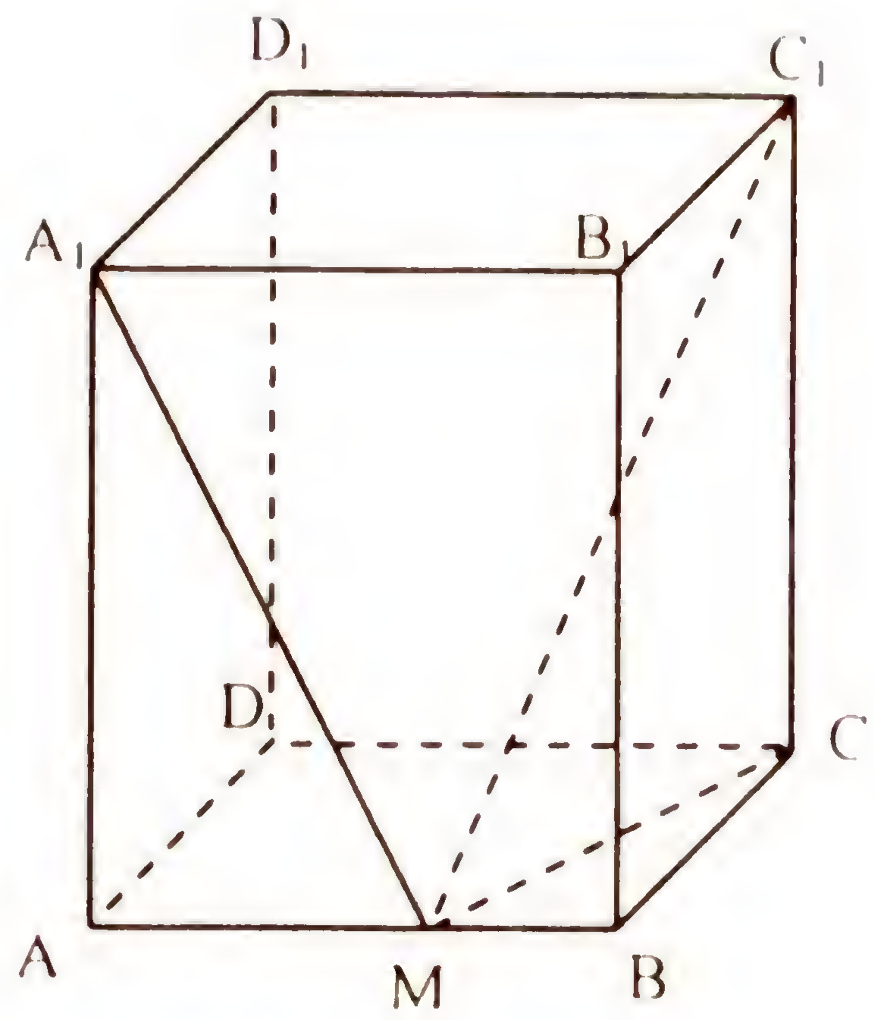
b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông ABCD và A'B'C'D'. IM cắt OO' tại K

Đường thẳng qua K song song với BD cắt BB' và DD' tại P và Q. Thiết diện là ngũ giác EFPMQ.

Gọi S là diện tích thiết diện EFPMQ và S' là diện tích hình chiếu EFBCD của thiết diện.

Ta có: $S' = \frac{7a^2}{8} = S\cos\varphi$ nên $S = \frac{7a^2}{8}.\frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{7a^2\sqrt{11}}{24}$.

**Ví dụ 10**: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao bằng nửa cạnh đáy. Với M là một điểm trên cạnh AB, tìm giá trị lớn nhất của góc $\widehat{A_1MC_1}$.




**Giải**

Chọn cơ sở

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Gọi chiều cao là h thì đáy hình vuông cạnh 2h

$M \in AB$ nên có số $\alpha$ sao cho: $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, với $0 \le \alpha \le 1$.

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AM} = \vec{c} - \alpha\vec{a}$$

$$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = (1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$MA_1^2 = (\vec{c} - \alpha\vec{a})^2 = \vec{c}^2 - 2\alpha\vec{a}.\vec{c} + \alpha^2\vec{a}^2 = h^2(1 + 4\alpha^2)$$

$$MC_1^2 = \left[(1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right]^2 = (1-\alpha)^2\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 = h^2[4(1-\alpha)^2 + 5]$$

Do đó $MA_1 = h\sqrt{1 + 4\alpha^2}$ và $MC_1 = h\sqrt{4(1-\alpha)^2 + 5}$

$$\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MC_1} = (\vec{c} - \alpha\vec{a})\left[(1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right] = \vec{c}^2 - \alpha(1-\alpha)\vec{a}^2 = h^2(2\alpha - 1)^2$$

$$\cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}) = \frac{(2\alpha - 1)^2}{\sqrt{(1 + 4\alpha^2)\left[4(1-\alpha)^2 + 5\right]}} \ge 0$$

Góc $\varphi$ là góc tạo bởi hai đường thẳng $MA_1$ và $MC_1$ thì $0 \le \varphi \le 90^o$.

Do đó $\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1})\right| = \dfrac{(2\alpha - 1)^2}{\sqrt{(1 + 4\alpha)^2\left[4(1-\alpha)^2 + 5\right]}} \ge 0$

Vậy $\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$ (thoả mãn) nên M là trung điểm của AB.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Các mệnh đề Đ, S ?

   a) $\alpha$, $\beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha // \beta$ b) $\alpha$, $\beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \perp \beta$

   c) $\alpha \supset a$, $a \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ d) $\alpha \supset a, b$; $a, b \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

   **ĐS:** a) S b) S c) Đ d) Đ

2. Các mệnh đề Đ, S ?

   a) Hình lăng trụ có 2 mặt bên hình chữ nhật là lăng trụ đứng

   b) Hình lăng trụ có các mặt bên hình chữ nhật là lăng trụ đứng

   c) Qua 1 đường thẳng có duy nhất 1 mặt phẳng vuông góc với 1 mặt phẳng cho trước

d) Hình chóp có đáy đa giác đều và 3 cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.
**ĐS:** a) S b) Đ c) S d) Đ

3. Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân tại B, AC = 2a, cạnh SA vuông góc (ABC) và SA = a.
a) Chứng minh mp(SAB) $\perp$ mp(SBC)
b)Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

**ĐS:** b) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh:
a) (ABC'D') $\perp$ (A'B'CD) b) (AA'CC') $\perp$ (CB'D')

5. Chứng minh tất cả những mặt phẳng đi qua một điểm A cho trước và vuông góc với (P) cho trước đều đi qua một đường thẳng cố định.
**ĐS:** đường thẳng qua A và vuông góc với mp(P).

6. Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng A qua I. Dựng đoạn SD = $a\sqrt{6}/2$ vuông góc với (ABC).
a) Chứng minh: mp(SBC) $\perp$ mp(SAD)
b) Chứng minh: mp(SAB) $\perp$ mp(SAC).
**HD:** Chứng minh mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt trung trực của BD'. Xác định và tính diện tích thiết diện.

**ĐS:** $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

8. Cho hình chóp S.ABCD đáy hình vuông cạnh x, SA = a vuông góc (ABCD). Định x để (SBC) hợp (SCD) góc $60^0$.
**ĐS:** x = a

9. Cho hình chóp S.ABCD đáy hình chữ nhật tâm O mà SO = h vuông góc đáy, AB = a, BC = 2a.
a) Tính góc giữa (SAB), (SCD). b)Tính h theo a để (SAB) $\perp$ (SCD).
**ĐS:** b) h = a

10. Cho tứ giác ABCD nằm trên mặt phẳng (P)) hợp với mặt phẳng (Q) một góc $\varphi$. Gọi A'B'C'D' là hình chiếu của ABCD lên (Q). Chứng minh: S(A'B'C'D')= S(ABCD). cos $\varphi$.
**HD:** chẻ diện tích tứ giác thành 2 tam giác

11. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' tâm O, có 3 kích thước a, b, c. Xét tứ diện AB'CD', tính diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua tâm O và song song (ABC).

**ĐS:** $\dfrac{1}{2}ab$

12. Hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau.
a) Chứng minh rằng AC $\perp$ B'D', AB' $\perp$ CD' và AD' $\perp$ CB'.
b) Khi nào mặt phẳng (AA'C'C) vuông góc với mặt phẳng (BB'D'D)?

**ĐS:** b) Hai mặt phẳng (AA'C'C) và (BB'D'D) vuông góc với nhau khi hình hộp ABCD. A'B'C'D' là hình lập phương.

**13.** Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC thuộc mp(P). Gọi $\beta$, $\gamma$ là góc hợp bởi AB, AC với (P). Tính tang của góc $\alpha$ là góc hợp bởi hai mặt phẳng (ABC) và (P).

**HD:** Chứng minh hệ thức: $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

**14.** Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC), (ABD) cùng vuông góc với đáy (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của tam giác BCD; đường cao DK của tam giác ACD.

a) Chứng minh: $AB \perp (BCD)$

b) Chứng minh (ABE), (DFK) $\perp$ (ADC)

c) Gọi O, H là trực tâm tam giác BCD và ACD. Chứng minh OH $\perp$ (ADC).

**15.** Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a, SA= b và vuông góc với đáy .

a) Chứng minh (SAD) $\perp$ (SDC), (SAC) $\perp$ (SCB)

b) Tính diện tích thiết diện cắt bởi mp qua SD, vuông góc (SAC).

**HD:** gọi O là trung điểm của AD thì ADCO là hình vuông và OBC là tam giác ABC vuông cân tại O.

**16.** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a tâm O, các cạnh bên đều bằng a.Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với (SDC)

a) Xác định chân đường vuông góc hạ từ O đến (SCD)

b) Mặt phẳng (P) cắt SC, SD tại M, N. Hãy tính diện tích của tứ giác ABMN.

**17.** Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh B và AB = a, đoạn SA vuông góc với (ABC) và SA = $a\sqrt{3}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SC và SB, M là một điểm trên đoạn AB. Đặt AM = x ($0 \le x < a$). Gọi (P) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (SAB).

a) Chứng minh $FM = \sqrt{x^2 - ax + a^2}$.

b) Tính diện tích thiết diện cắt tứ diện SABC bởi (P) theo a và x.

c) Tìm tập hợp các hình chiếu của S lên (P) khi M di động trên AB.

**18.** Với điều kiện nào thì hình chiếu của một góc vuông lên mặt phẳng là một góc vuông.

**ĐS:** góc vuông đã cho có ít nhất một cạnh song song hay nằm trên mặt phẳng chiếu.

**19.** Cho hình chóp cụt đều A'B'C'.ABC có cạnh đáy nhỏ A'B' = a và cạnh đáy lớn AB = b, các cạnh bên bằng c.Tính góc giữa các cạnh bên, các mặt bên với đáy.

**20.** Cho hình chóp cụt đều A'B'C'D'.ABCD có cạnh đáy nhỏ A'B'= a và cạnh đáy lớn AB = b, các cạnh bên cùng hợp với đáy góc $60^0$.

a) Tính diện tích mặt chéo AA'C'C

b) Tính góc giữa các mặt bên với đáy

**HD:** a) mặt chéo là hình thang cân

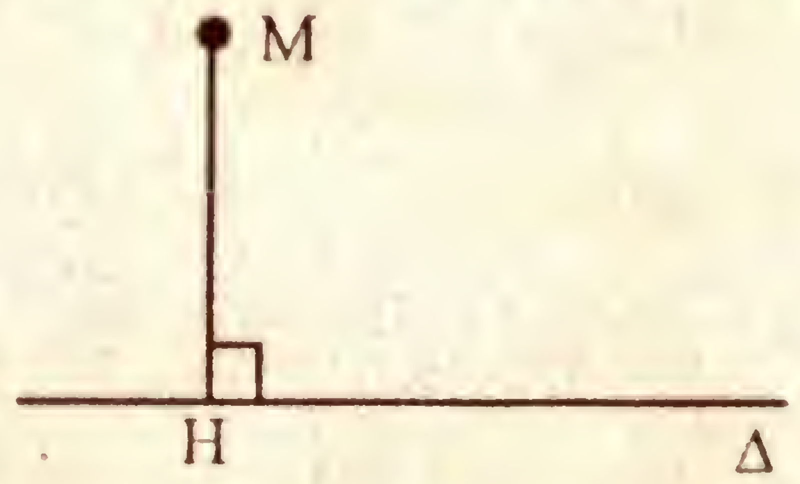
b) gọi 2 trung điểm M và M' của AB và A'B'. Xác định hình chiếu của MM' lên đáy.

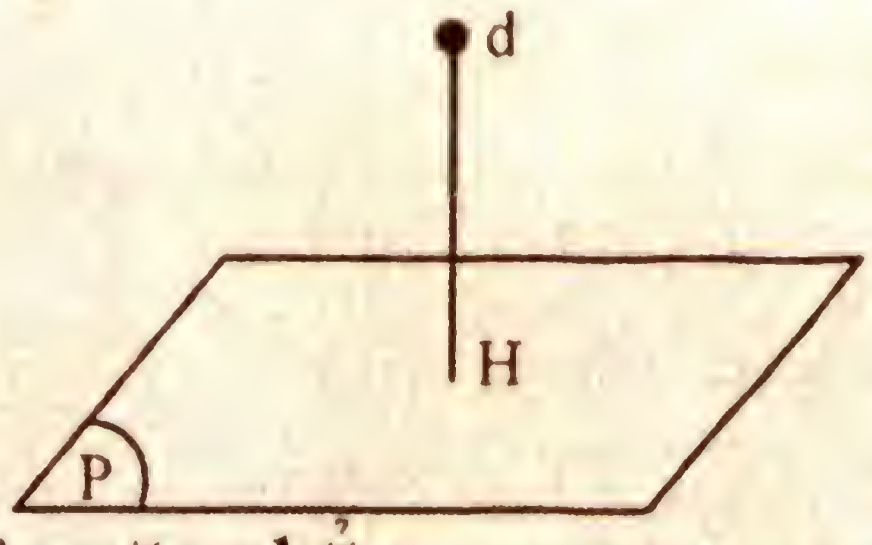
# §5. KHOẢNG CÁCH

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên đường thẳng.

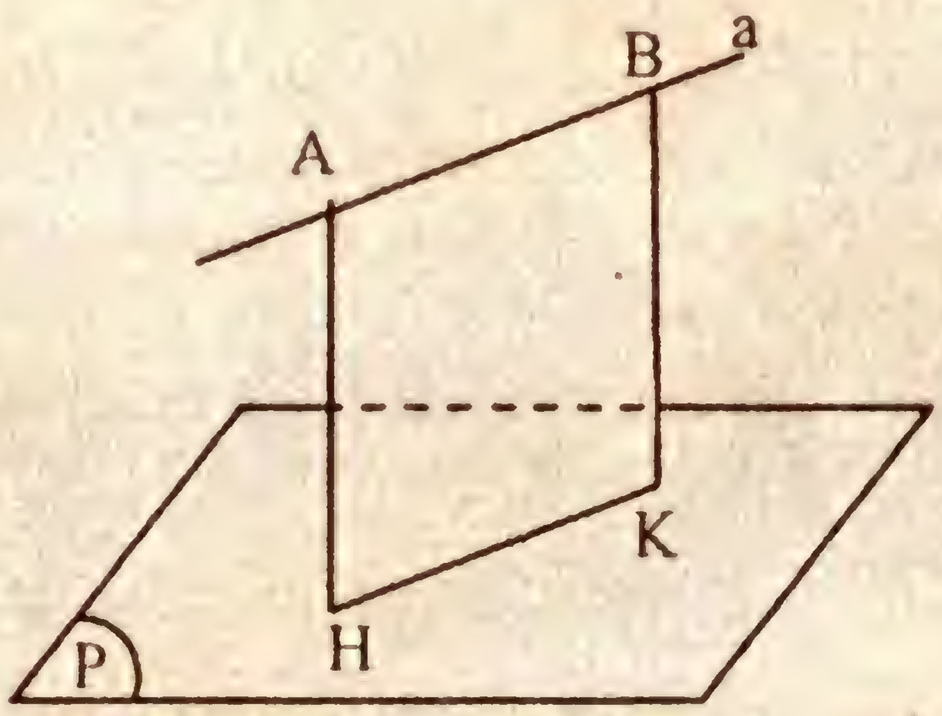
- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

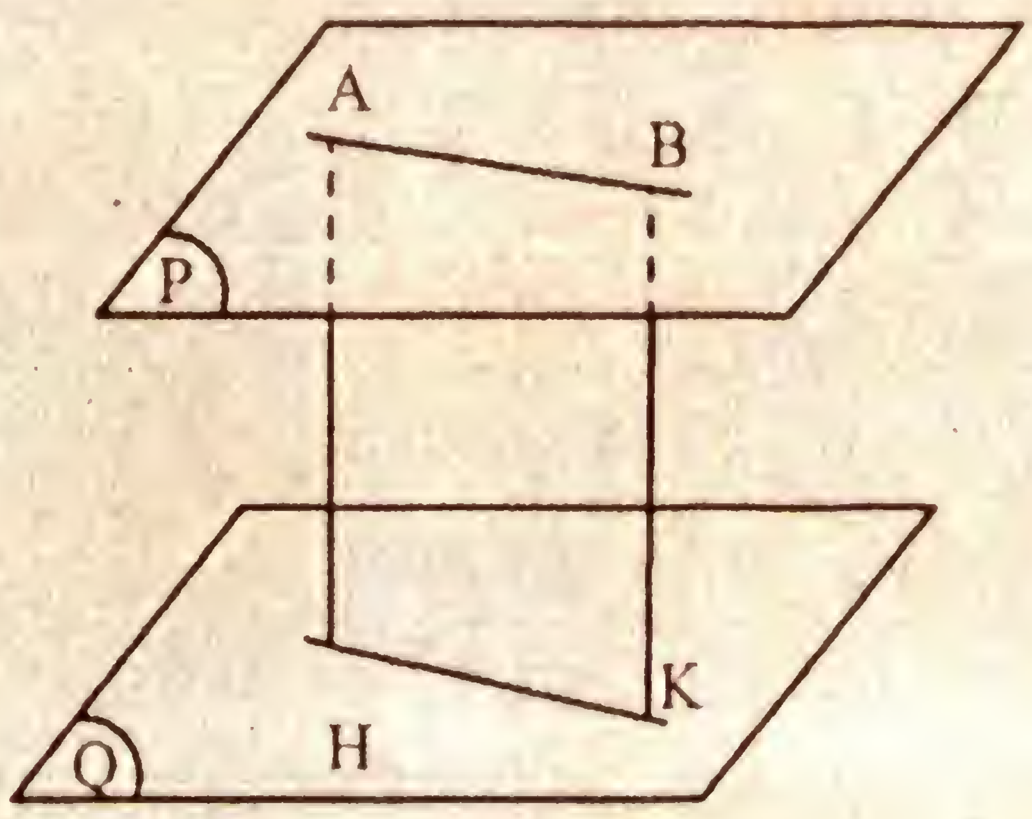



- Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của đường thẳng đến mặt phẳng.

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

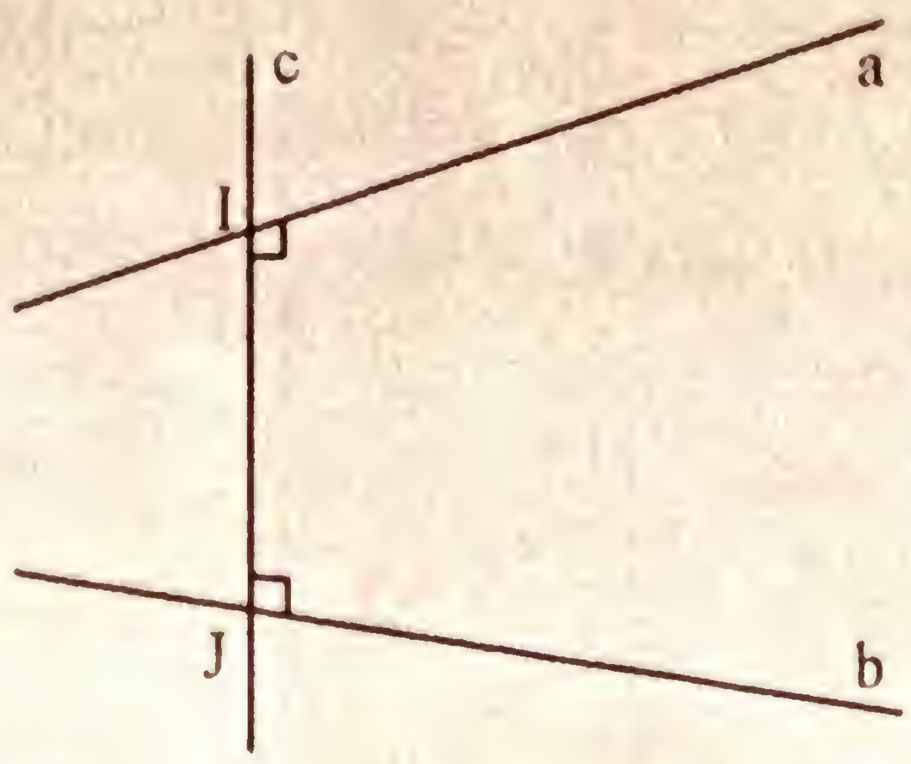


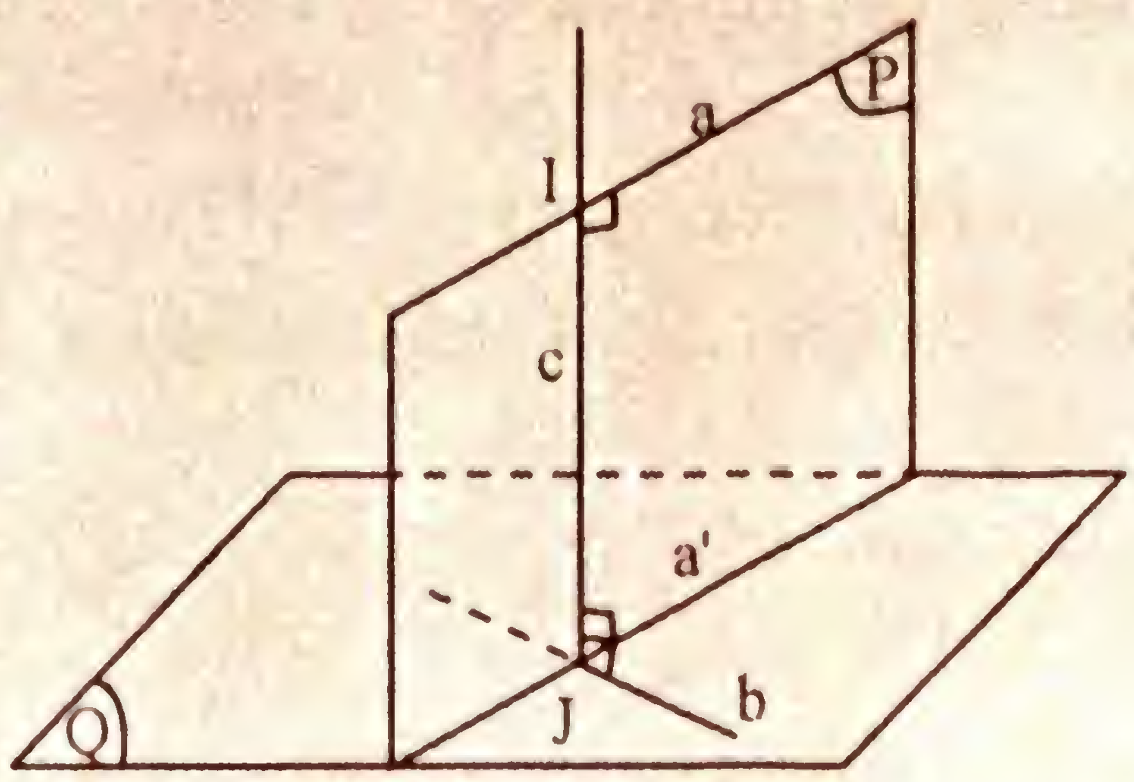




- Đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng chéo nhau gọi là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau.

- Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.




- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

• Chú ý: - Khoảng cách giữa 2 yếu tố điểm, đường thẳng, mặt phẳng là khoảng cách bé nhất giữa hai điểm thuộc 2 yếu tố đó.

- Các kí hiệu thường dùng: d(M; Δ), d(M; (P)), d(a; (P)), d(a; b), d((P); (Q)) tương ứng khoảng cách 2 yếu tố.

## B. PHÂN DẠNG TOÁN

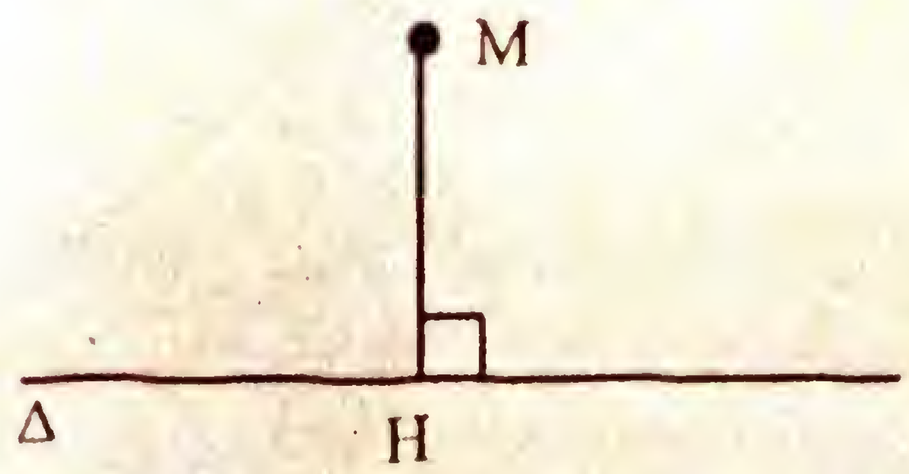
### DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG

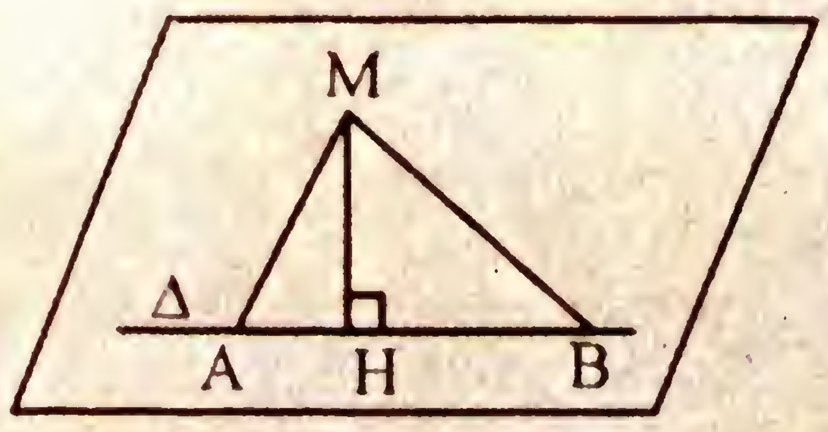
• Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ:

- Hạ MH ⊥ Δ thì d(M; Δ) = MH

- Nếu có mặt phẳng (M; Δ) và A, B thuộc Δ thì MH là đường cao của tam giác MAB.

- Để tính đoạn MH ta có thể dùng hệ thức lượng trong tam giác, tam giác vuông, quan hệ diện tích, tam giác đồng dạng, quan hệ song song, ...

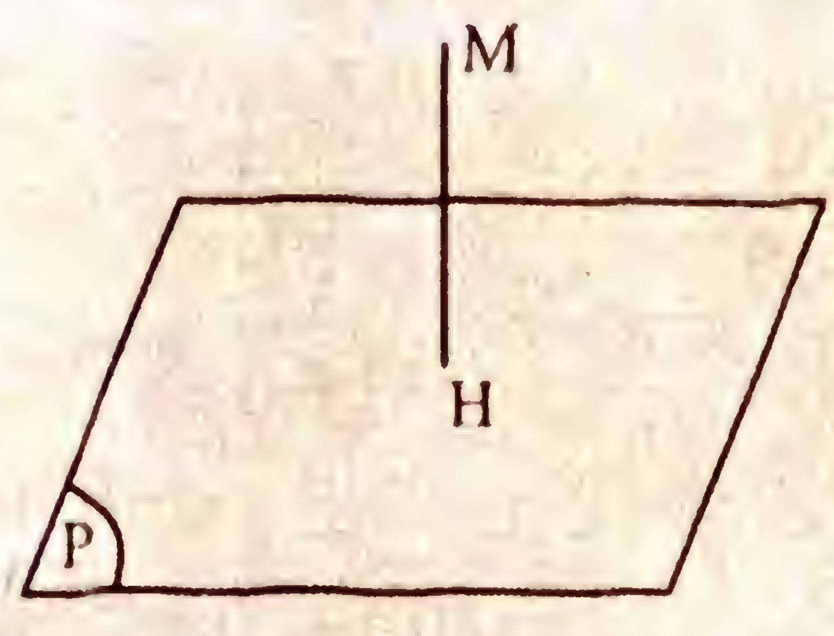


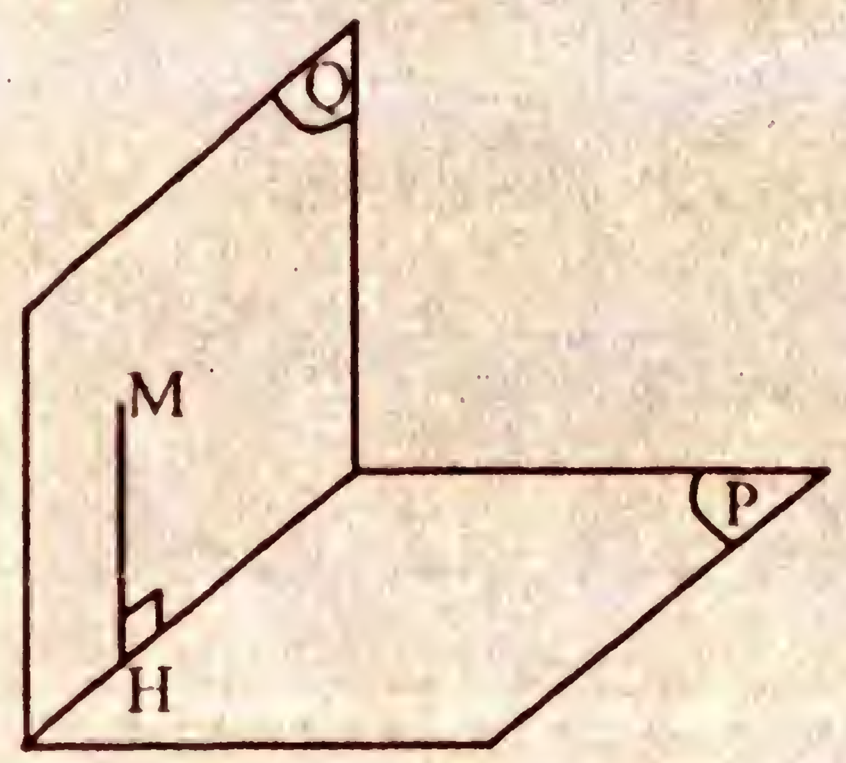




• Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P):

- Hạ MH ⊥ (P) thì d(M; (P)) = MH.

- Ngoài cách xác định hình chiếu thông thường, ta có thể sử dụng quan hệ song song, đặc biệt hơn là phải tìm mặt phẳng (P) chứa M, vuông góc với (P) lúc đó H là hình chiếu trên giao tuyến d của (P) và (Q).




**Ví dụ 1**: Cho tam giác ABC với AB = 7cm, BC = 5cm, CA = 8cm. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A, lấy điểm O sao cho AO = 4cm. Tính khoảng cách từ điểm A và điểm O đến đường thẳng BC.

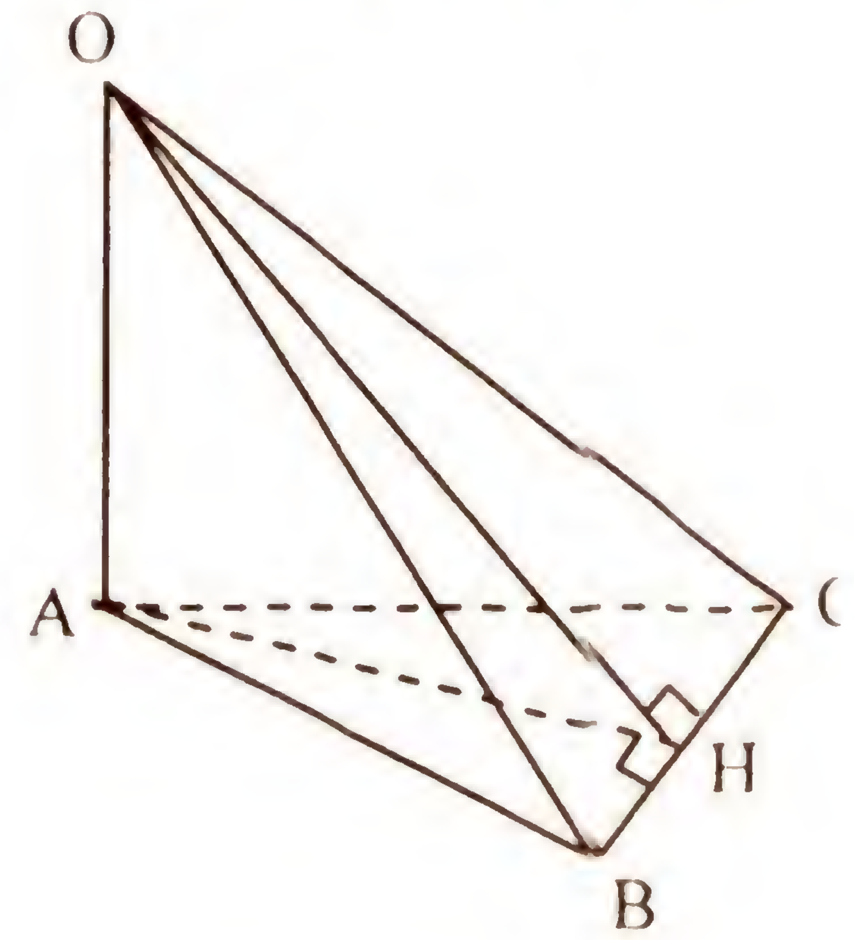
**Giải:**

Dựng AH là đường cao của tam giác ABC thì: d(A, BC) = AH .

Theo công thức Hêrông, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{10.5.3.2} = 10\sqrt{3}\ (cm^2)$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S}{BC} = \frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3}\ \ (cm)$$




Vì $AH \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$

Do đó: $OH^2 = OA^2 + AH^2$

$= 16 + 48 = 64$

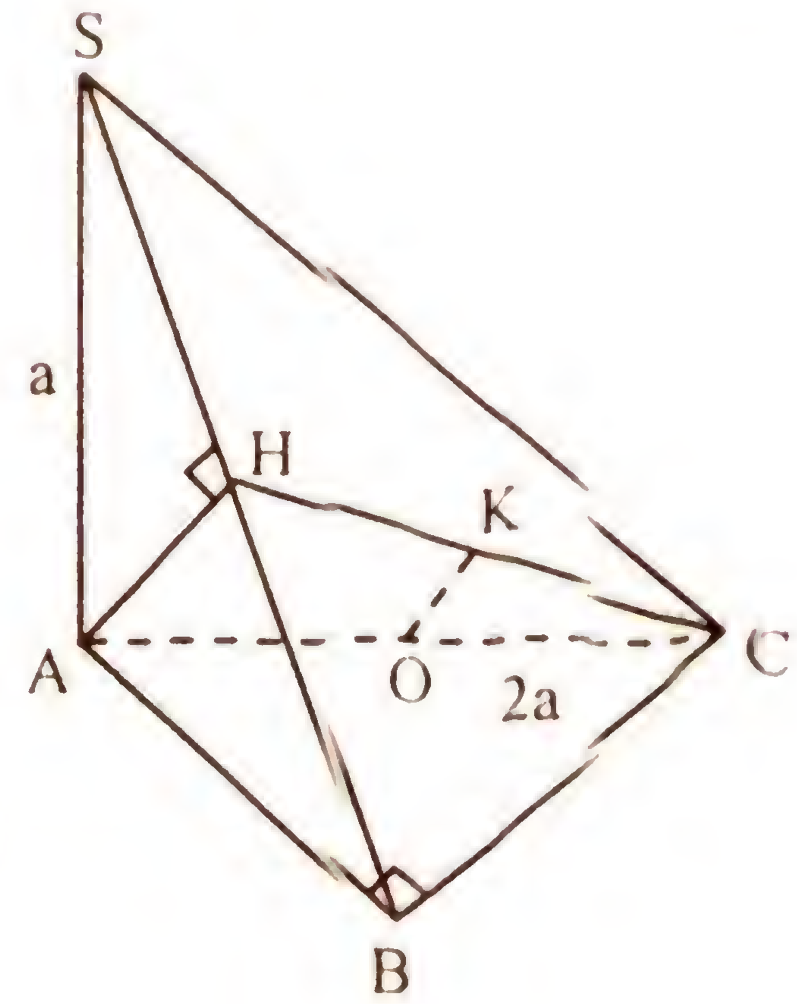
Vậy: OH = 8 (cm)

__Ví dụ 2__: Tứ diện SABC có tam giác ABC vuông cân đỉnh B và AC = 2a. có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = a.

a) Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BC.

b) Hạ $AH \perp SB$. Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến đường thẳng CH.

**Giải**




a) Ta có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$

nên $SB \perp BC \Rightarrow d(S; BC) = SB$.

Tam giác ABC vuông cân tại B,

$AC = 2a$ nên $AB = a\sqrt{2}$ .

Tam giác SAB vuông tại A.

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}\ .$$

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

nên $AH \perp SB$ thì $AH \perp (SBC)$.

Gọi K là trung điểm của HC: $OK \,//\, AH \Rightarrow OK \perp (SBC)$.

nên $OK \perp CH$ do đó $d(O; CH) = OK = \dfrac{AH}{2}$

- Xét tam giác vuông SAB với đường cao AH ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

__Ví dụ 3__: Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Gọi G là trọng tâm của tam giác đáy ABC, M là trung điểm SC.

a) Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng đáy (ABC).

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG).

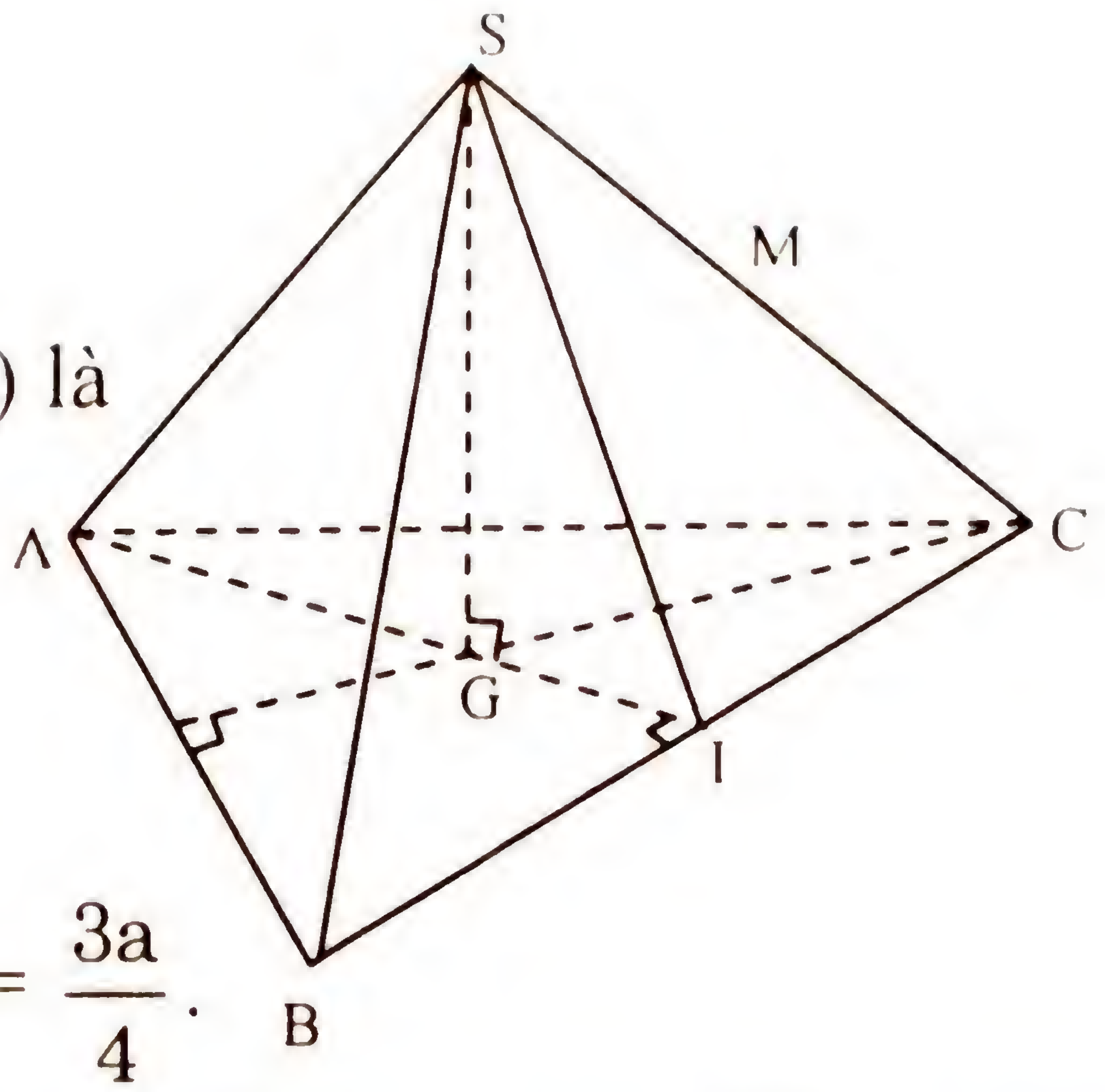
**Giải**

a) SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên $SG \perp (ABC)$.

Tam giác SAG vuông tại G nên

$$SG^2 = SA^2 - AG^2$$

$$= (2a)^2 - \left[\frac{2}{3}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2$$




$= 4a^2 - 3a^2 = a^2.$

Vậy khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC) là SG = a.

b) Ta có $BC \perp AG$, $BC \perp SG$

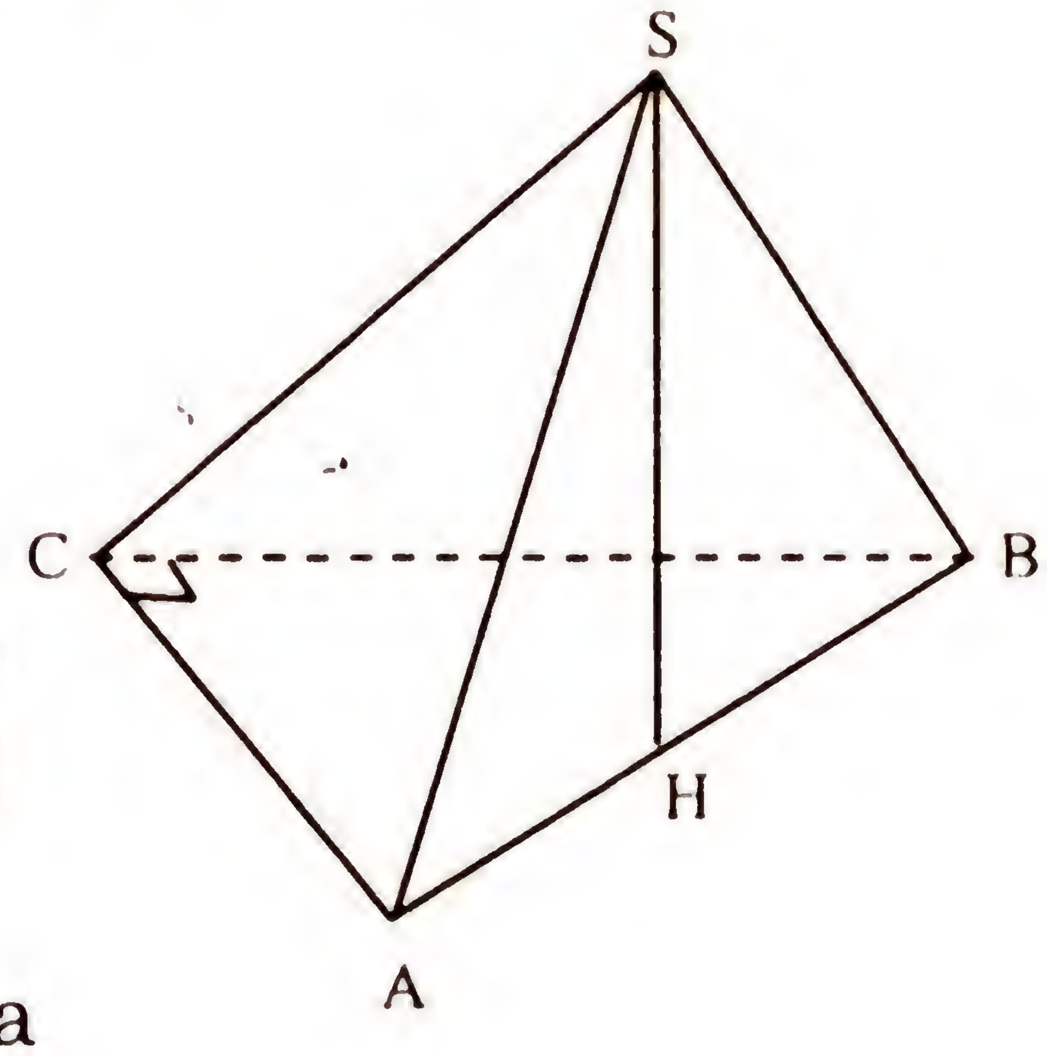
$\Rightarrow BC \perp (SAG)$ tại trung điểm I của BC.

Vì $S \in (SAG)$, M là trung điểm SC nên:

$$d(M; (SAG) = \frac{1}{2}.d(C; (SAG)) = \frac{1}{2}.CI = \frac{3a}{4}.$$

**<u>Ví dụ 4:</u>** Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 120^o$, $\widehat{BSC} = 60^o$, $\widehat{CSA} = 90^o$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

**Giải**




Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

$BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$

nên $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

Hạ $SH \perp mp(ABC)$, do SA = SB = SC nên HA = HB = HC mà $\Delta ABC$ vuông tại C. nên H là trung điểm của cạnh huyền AB. Ta có:

$$SH^2 = SA^2 - \frac{AB^2}{4} = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$$

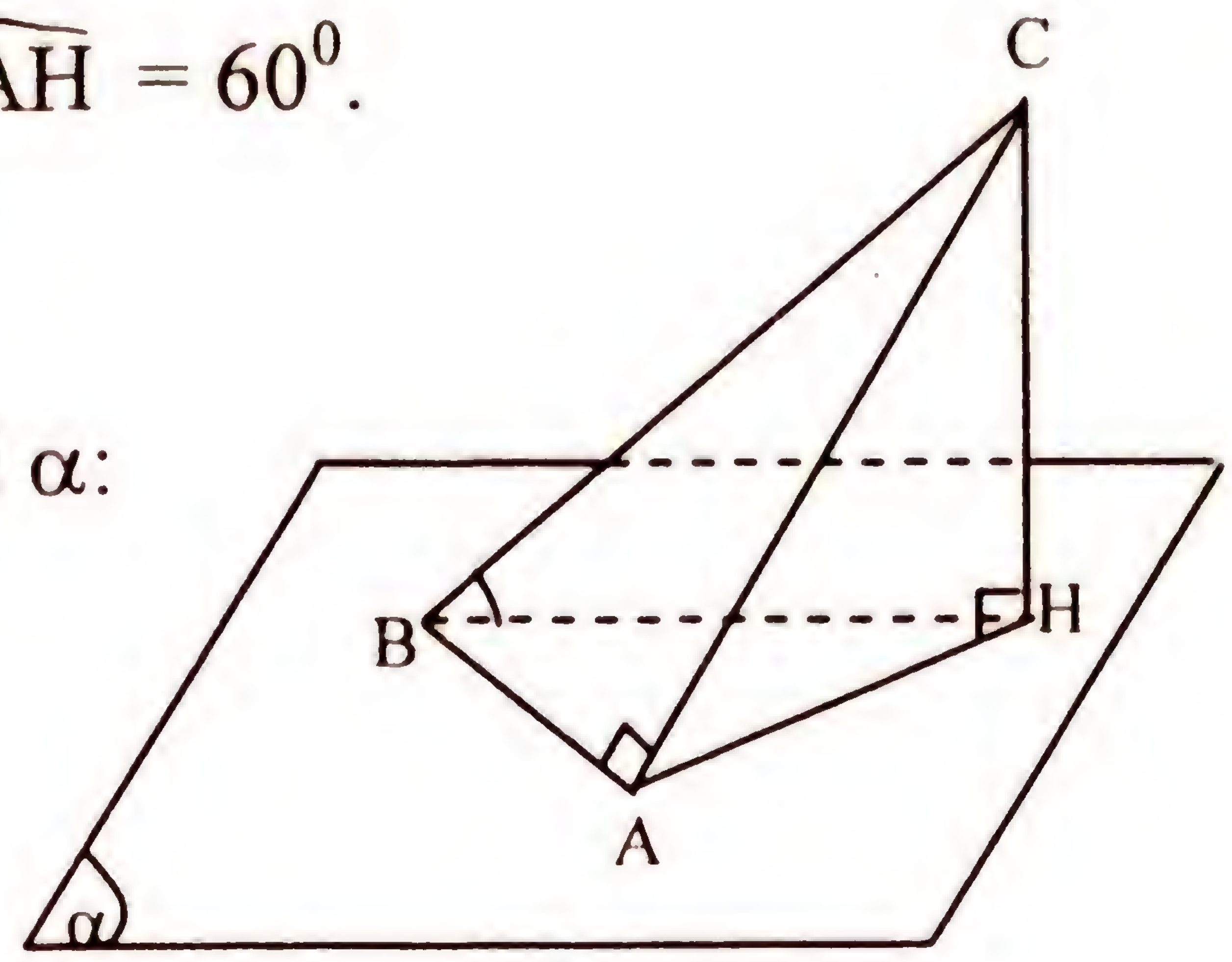
**<u>Ví dụ 5:</u>** Cho tam giác ABC vuông góc tại A, cạnh AB = a và nằm trong mặt phẳng $\alpha$, cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và tạo với $\alpha$ một góc $60^0$. Tính góc hợp bởi BC với $\alpha$.

**Giải:**

Ta có: $BC = a\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu của C trên $\alpha$ thì $\widehat{CAH} = 60^0$.

$$CH = AC.\sin 60^0 = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$




Ta có $\widehat{CBH}$ là góc của cạnh BC tạo với $\alpha$:

Tam giác vuông CBH :

$$\sin\widehat{CBH} = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

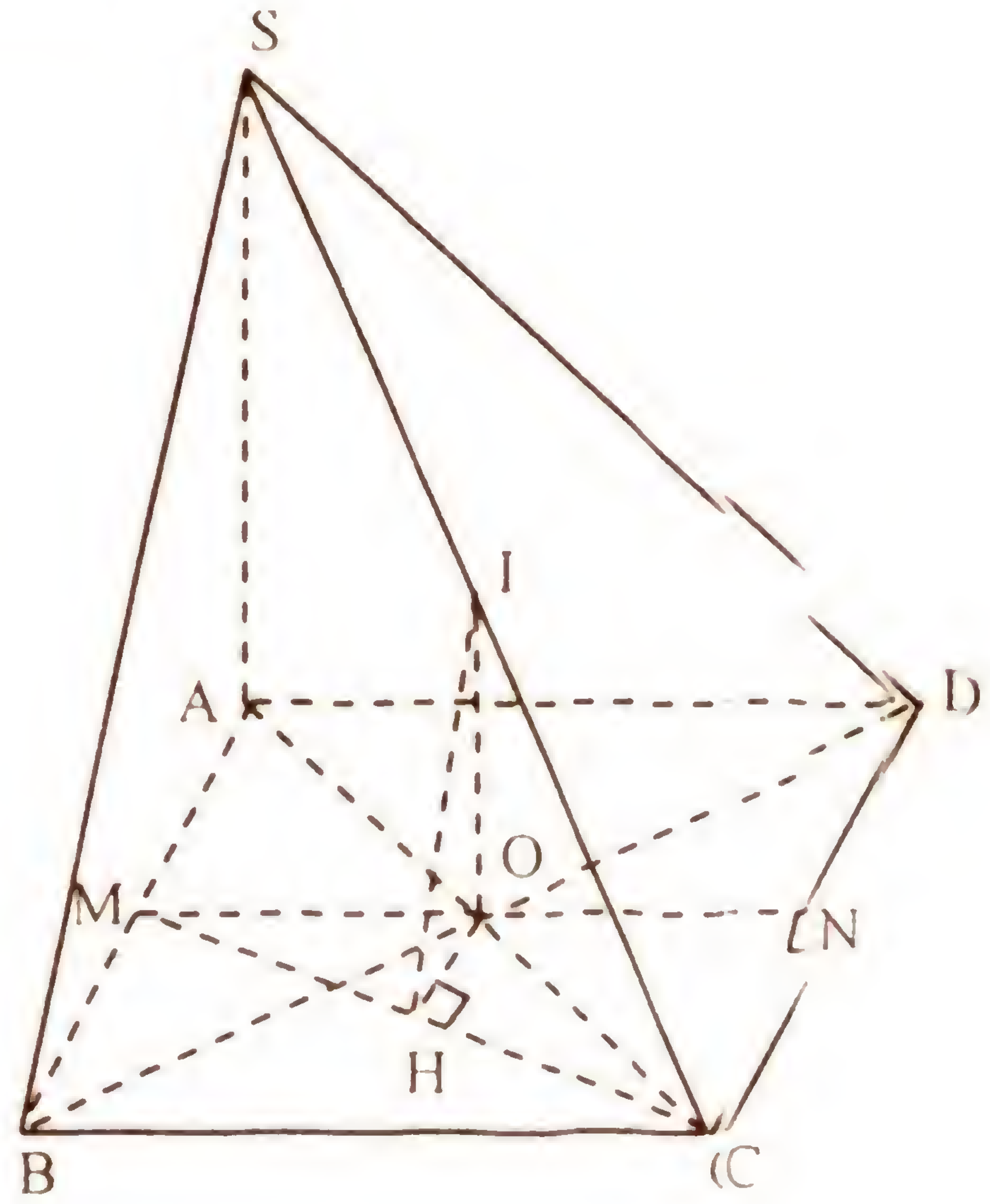
Vậy $\widehat{CBH} = 45^0$.

**Ví dụ 6**: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB.

a) Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABCD).

b) Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM.

**Giải**




a) Ta có SA ⊥ (ABCD) mà IO // SA do đó IO ⊥ (ABCD) nên

$$d(I; (ABCD)) = IO = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}.$$

b) Hạ IH ⊥ CM thì OH ⊥ CM và d(I; CM) = IH

Gọi N là trung điểm của cạnh CD.

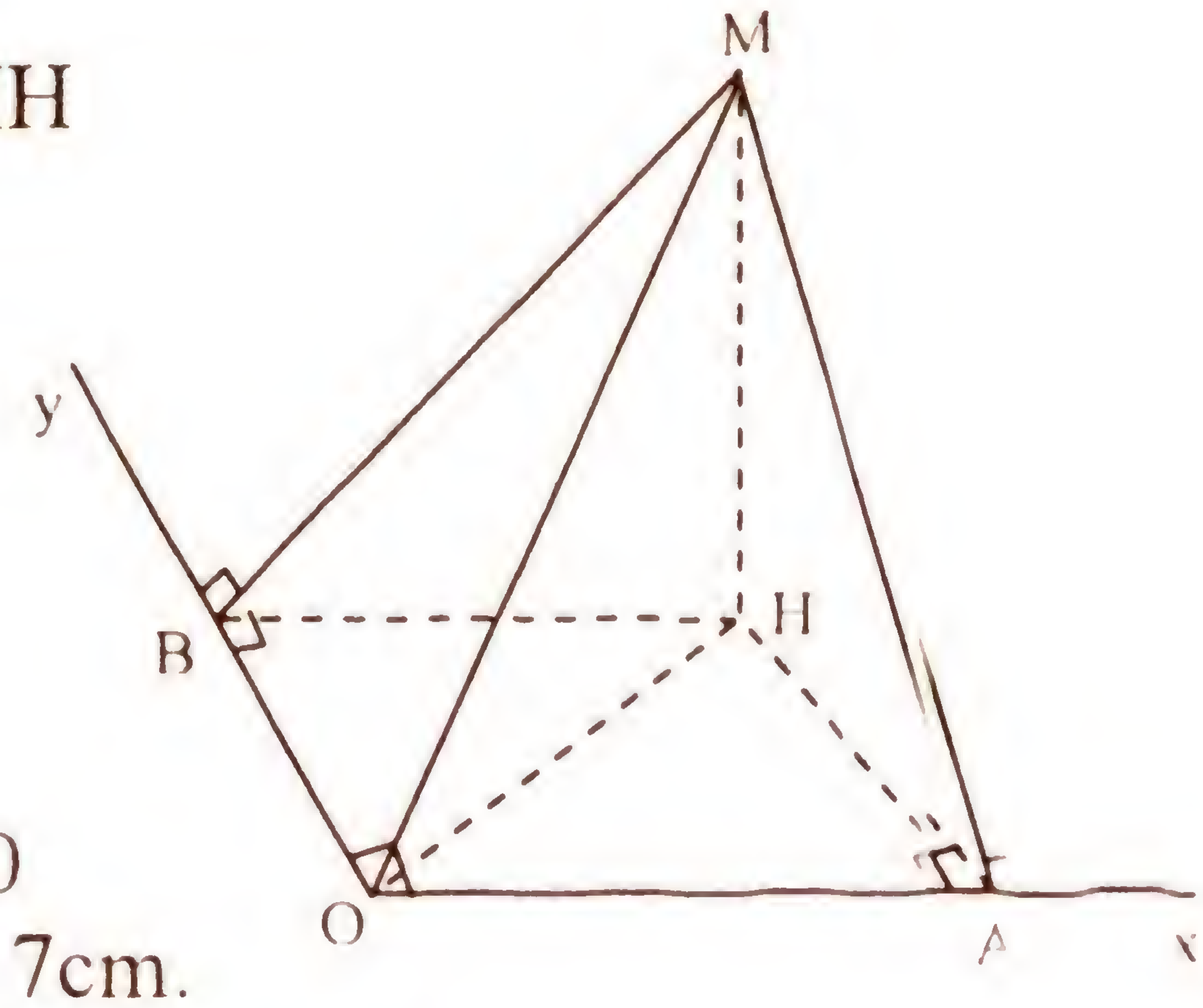
Hai tam giác vuông MHO và MNC đồng dạng nên $\frac{OH}{CN} = \frac{OM}{CM}$.

Do đó $OH = \frac{CN.OM}{MC} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$

nên $IH^2 = IO^2 + OH^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{20} = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

**Ví dụ 7**: Cho góc vuông $\widehat{xOy}$ và một điểm M nằm ngoài mặt phẳng chứa góc vuông. Khoảng cách từ M đến đỉnh O của góc vuông bằng 23cm và khoảng cách từ M tới hai cạnh Ox và Oy đều bằng 17cm. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (xOy) chứa góc vuông.

**Giải**




Hạ MH ⊥ (Ox, Oy) thì d(M, (xOy)) = MH

Hạ MA ⊥ Ox, MB ⊥ Oy

Ta có HA ⊥ OA và HB ⊥ OB

nên tứ giác OAHB là hình chữ nhật.

Hơn nữa vì MA = MB nên HA = HB

nên OAHB là hình vuông

$MH^2 = MO^2 - OH^2 = MA^2 - AH^2$

$\Rightarrow 23^2 - 2OA^2 = 17^2 - OA^2 \Rightarrow OA^2 = 240$

Do đó $MH^2 = 17^2 - 240 = 49$ nên MH = 7cm.

**Ví dụ 8:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách từ A đến mp(A'BD).

b) Khoảng cách từ A', B, C, D' đến đường thẳng AC'.

**Giải**

Điểm A và C' cách đều ba đỉnh của tam giác đều A'BD nên AC' là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'BD, do đó đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD) tại tâm I của tam giác đều A'BD.

a) Ta có d(A; (A'BD)) = AI

Vì AO // A'C' và A'C' = 2AO nên $AI = \frac{1}{3}AC' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

b) Vì AC' $\perp$ mp(A'BD) nên A'I $\perp$ AC',

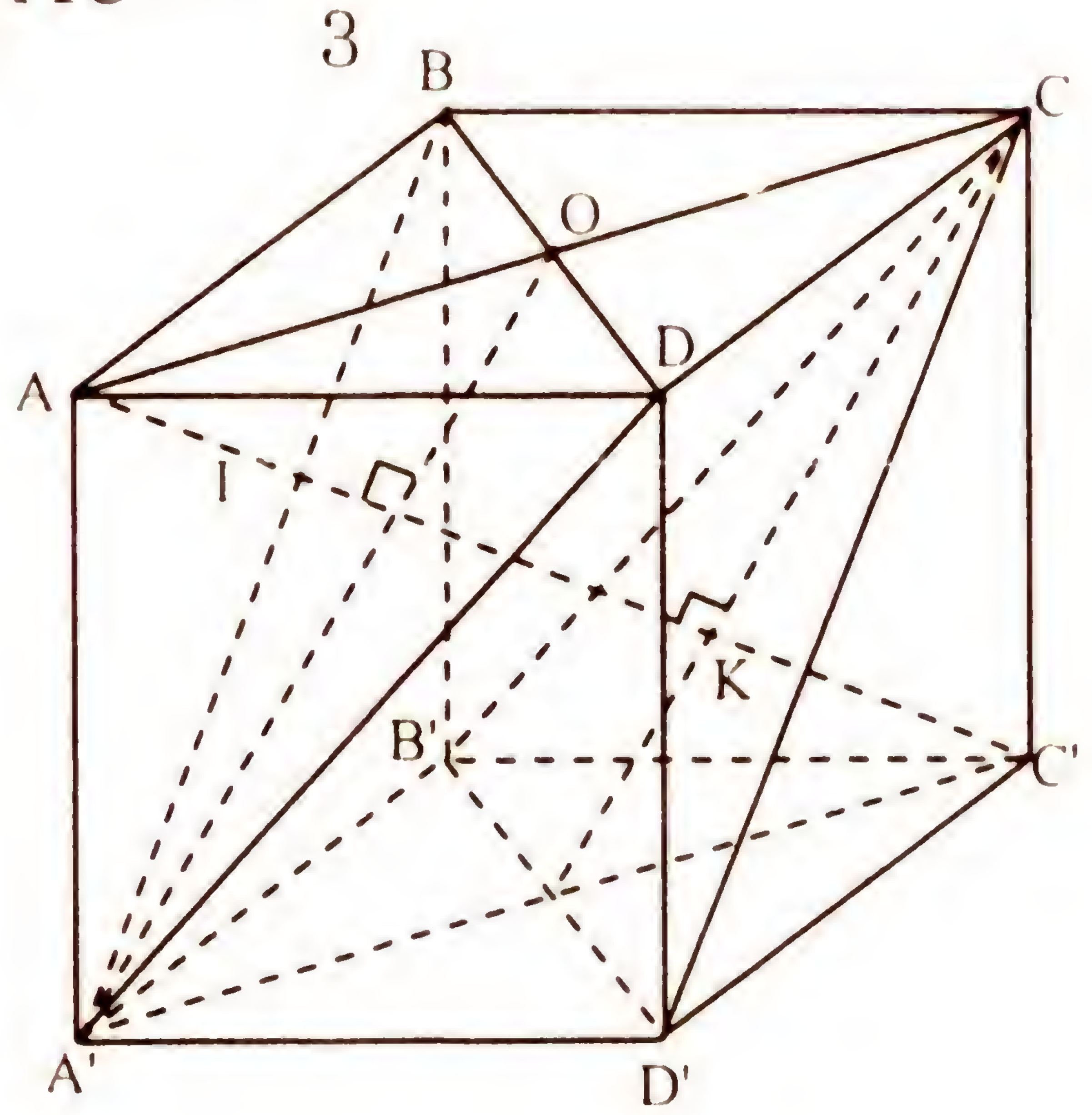
do đó: d'(A'; AC') = A'I

Tam giác AA'I vuông tại I

nên $A'I^2 = AA'^2 - AI^2 = \frac{6a^2}{9}$

Vậy $A'I = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Do (A'BD) // (CB'D') nên khoảng cách từ A', B, C, D' đến AC' đều bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.




## DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

• Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài của đoạn vuông góc chung IJ, trong đó I, J là giao điểm của đường vuông góc chung của a và b với a và b.

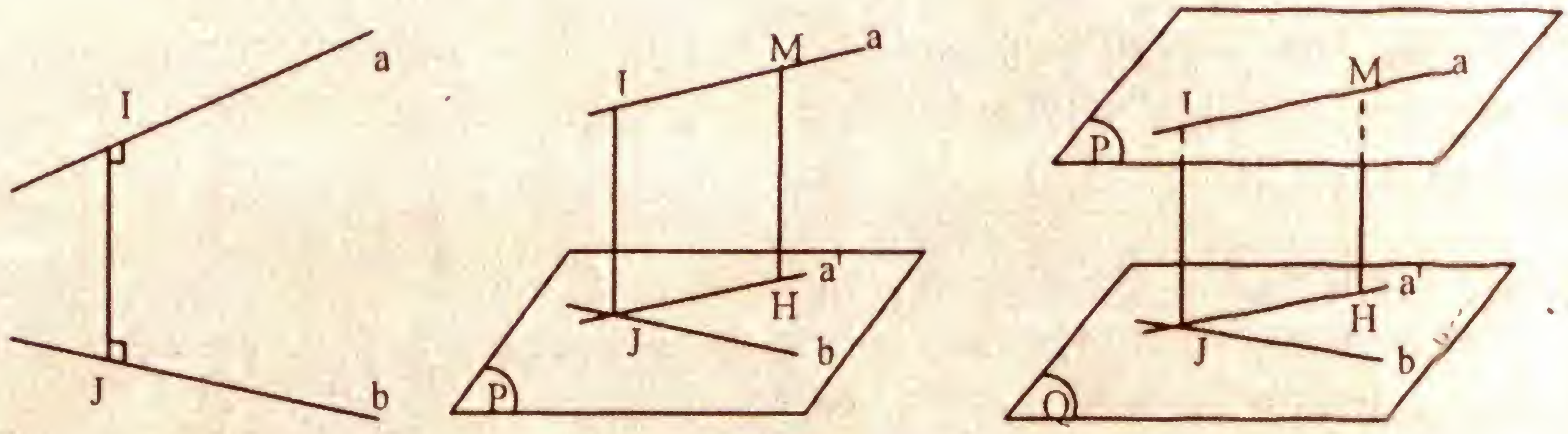
Khoảng cách này bằng khoảng cách giữa 1 đường thẳng và mặt song song chứa đường thẳng kia, cũng bằng khoảng cách giữa 2 mặt song song chứa lần lượt 2 đường thẳng đó. Bài toán đưa về tính khoảng cách từ 1 điểm đặc biệt đến mặt phẳng.

• Nếu yêu cầu tìm đoạn vuông góc chung thì phải xác định rõ 2 mút I, J, ta có thể xem xét:

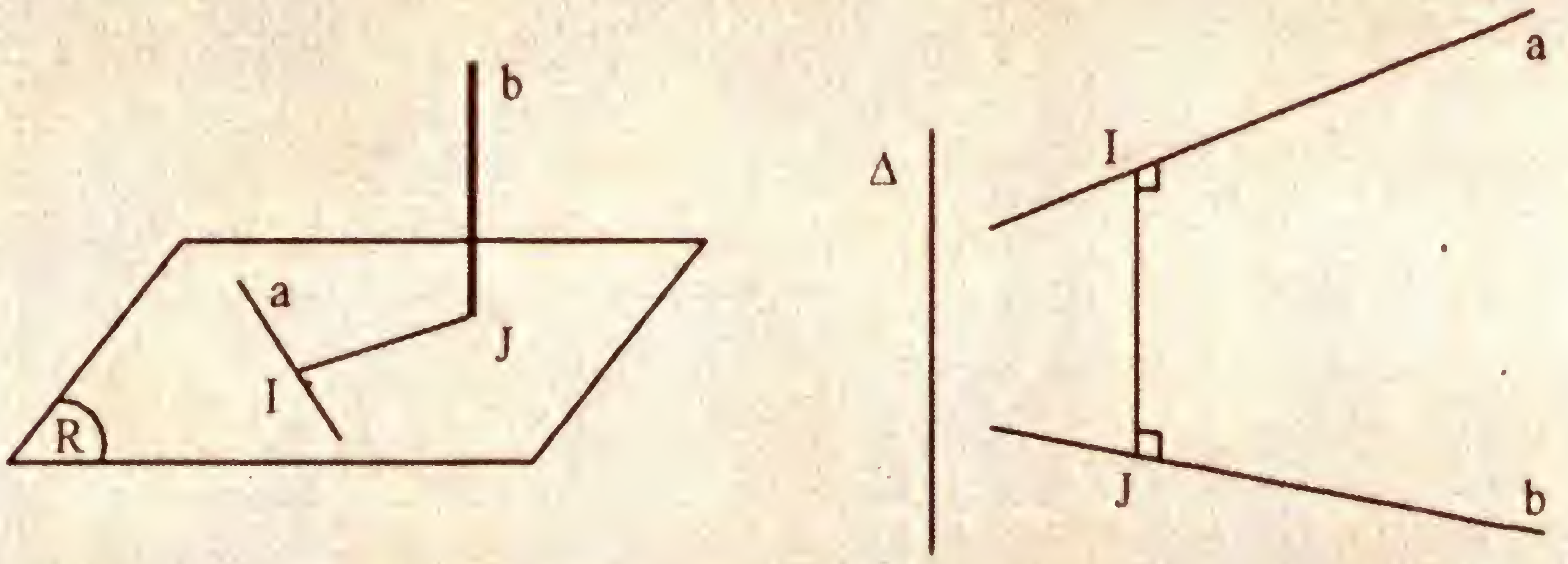
- Đoạn vuông chung IJ có sẵn, IJ $\perp$ a, IJ $\perp$ b.

- Nếu có mp(P) chứa b và song song với a thì chọn điểm thuận lợi M thuộc a, hạ MH $\perp$ (P). Nếu H thuộc b thì MH $\equiv$ IJ, còn nếu H không thuộc b thì qua H vẽ đường thẳng a' song song a cắt b tại J, từ J vẽ JI // HM thì IJ là đoạn vuông góc chung cần dựng, d(a; b) = d(a; (P)) = MH = IJ.

- Nếu có mp(Q) chứa b và song song (P) chứa a thì cũng chọn $M \in a$ như trên.




- Nếu có mặt (R) chứa a và vuông góc với b thì J là giao điểm của b với (R), hạ $JI \perp a$.
- Nếu có đường thẳng d vuông góc chung với a và b thì JI và d đồng phẳng.




**Ví dụ 1**: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng.

a) OA và BC b) AI và OC.

**Giải**

a) Ta có $OI \perp BC$, $OI \perp OA$ nên OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

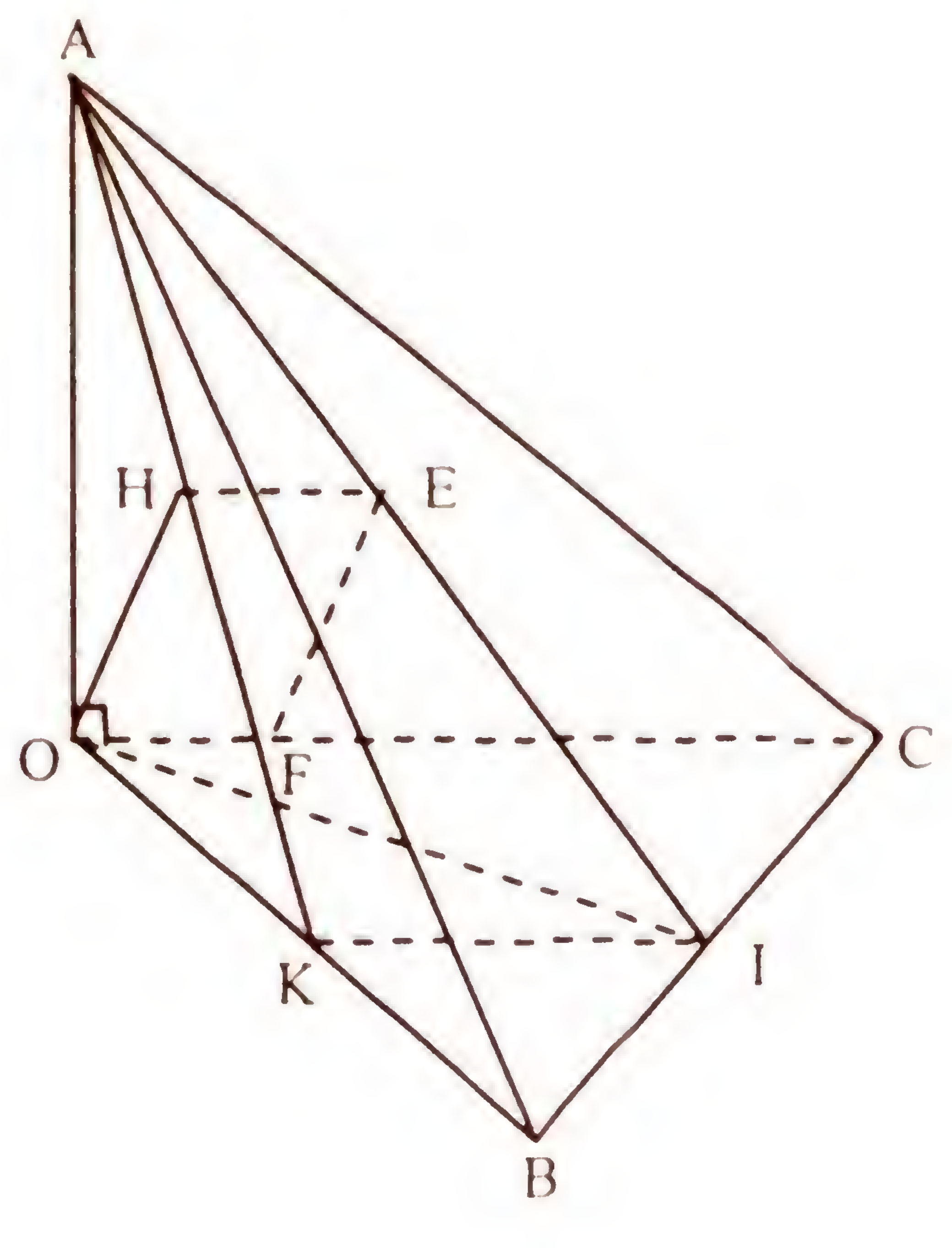
Ta có $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Gọi K trung điểm OB thì IK // OC nên OC // mp(AKI).

Ta có $CO \perp (OAB)$ nên $IK \perp (OAB)$, do đó $(OAB) \perp (AKI)$.

Hạ $OH \perp AK$ thì $OH \perp (AKI)$.

Vẽ HE // OC với $E \in AI$ và vẽ EF // OH với $F \in OC$ thì EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC, EF = OH.




Trong tam giác vuông OAK:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2}$$

nên $OH^2 = \frac{a^2}{5} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

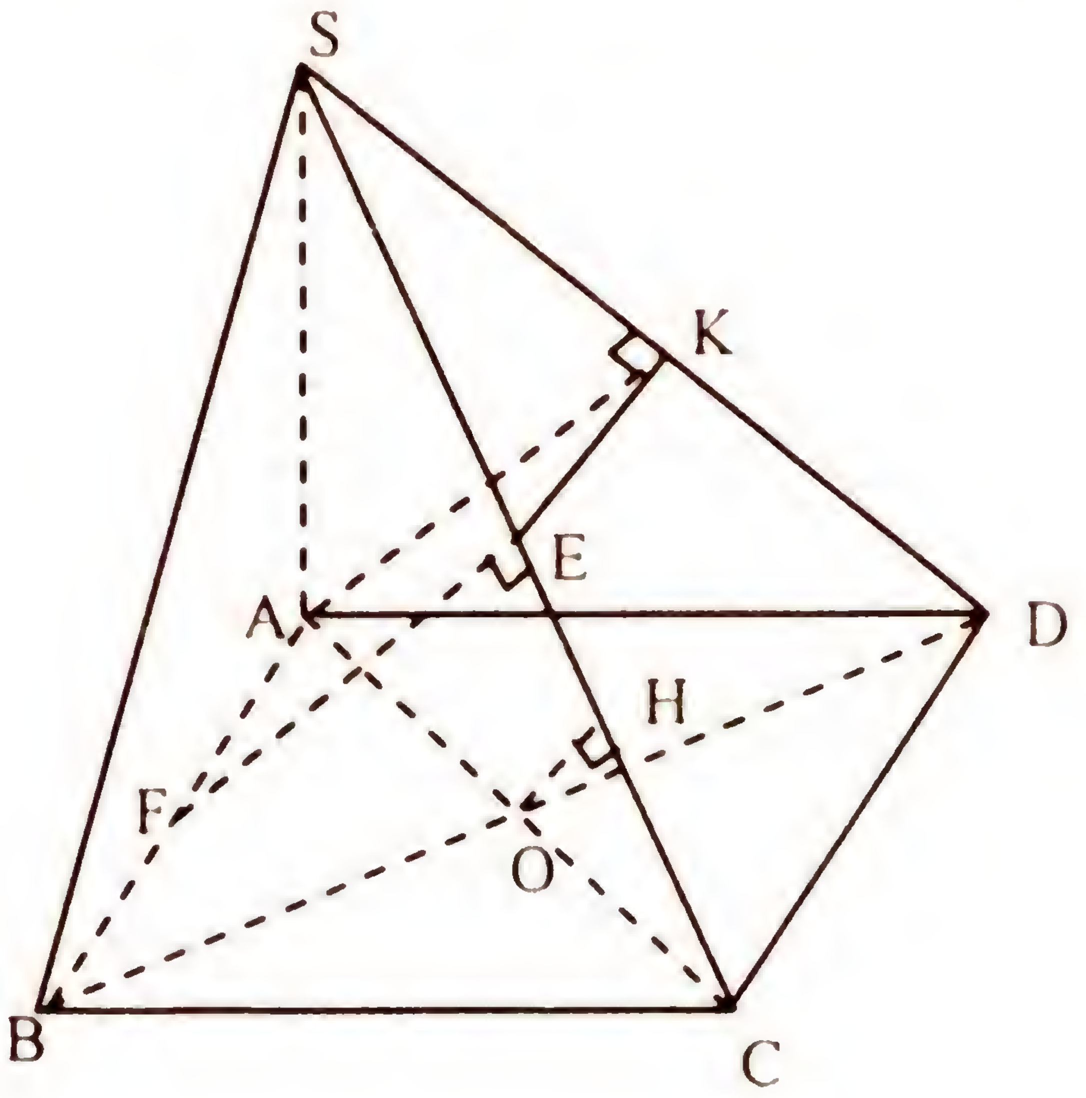
**Ví dụ 2**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, có cạnh SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các đường thẳng.

a) SB và CD b) SC và BD c) SC và AB.

**Giải**

a) Ta có $BC \perp SA, AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Mà có $BC \perp CD$ nên BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD, $d(SB; CD) = BC = a$.




b) Ta có: $BD \perp SA, AC$

nên $BD \perp (SAC)$ tại O. Hạ $OH \perp SC$. Ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ nên OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có: $\frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC}$.

nên $OH = \frac{OC.SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} . \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$.

$CD \perp AD, SA$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SCD)$

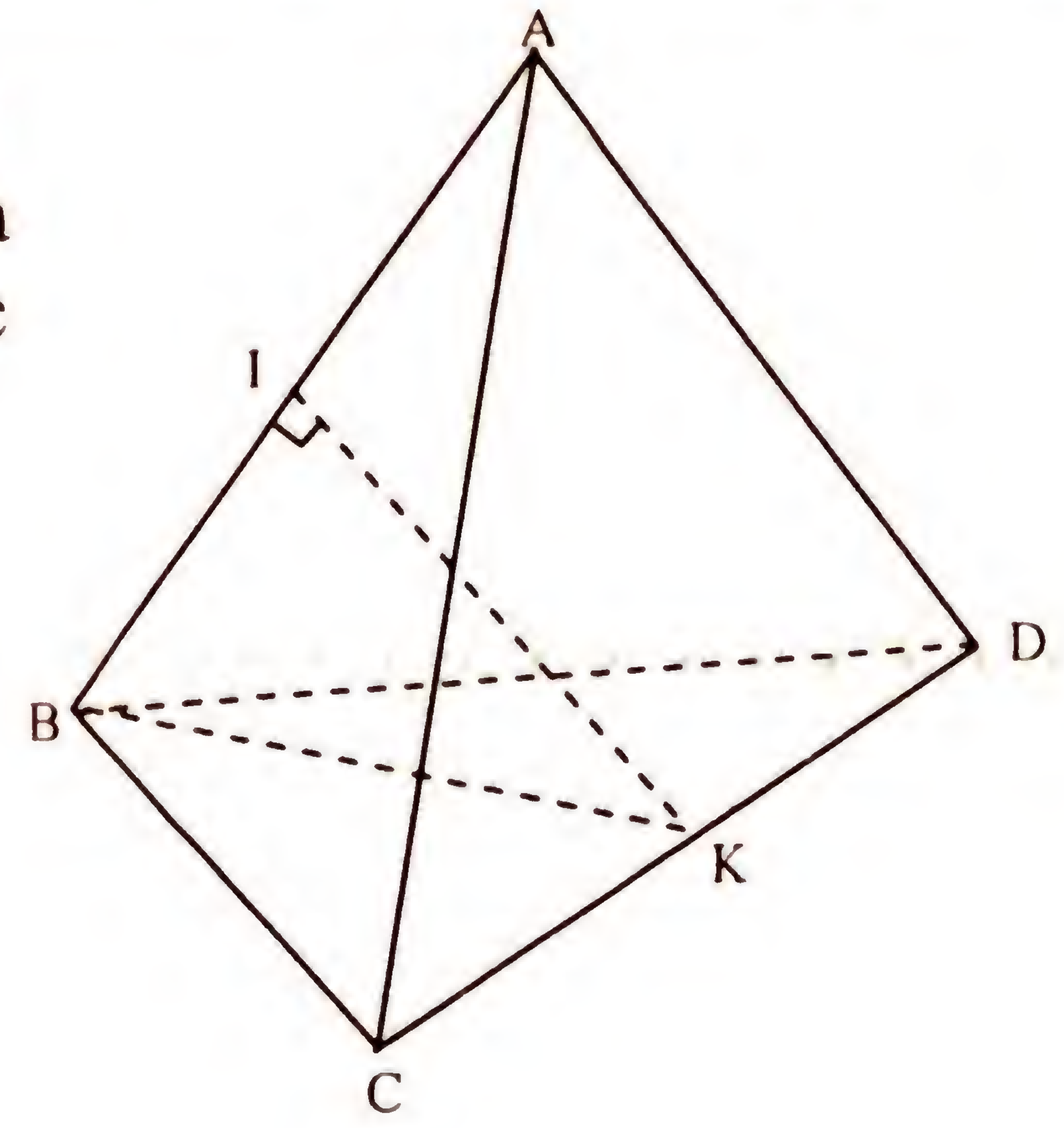
Hạ $AK \perp SD$ thì $AK \perp (SCD)$.

Vẽ KE // CD, $E \in SC$, vẽ EF // AK, $F \in AB$ thì EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

Ta có $EF = AK = \frac{AS.AD}{SD} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**Ví dụ 3**: Cho tứ diện đều ABCD. Xác định và tính đoạn vuông góc chung giữa 2 đường thẳng AB và CD.

**Giải**




Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD thì IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Tam giác BKI vuông tại I.

Ta có: $IK^2 = BK^2 - BI^2$

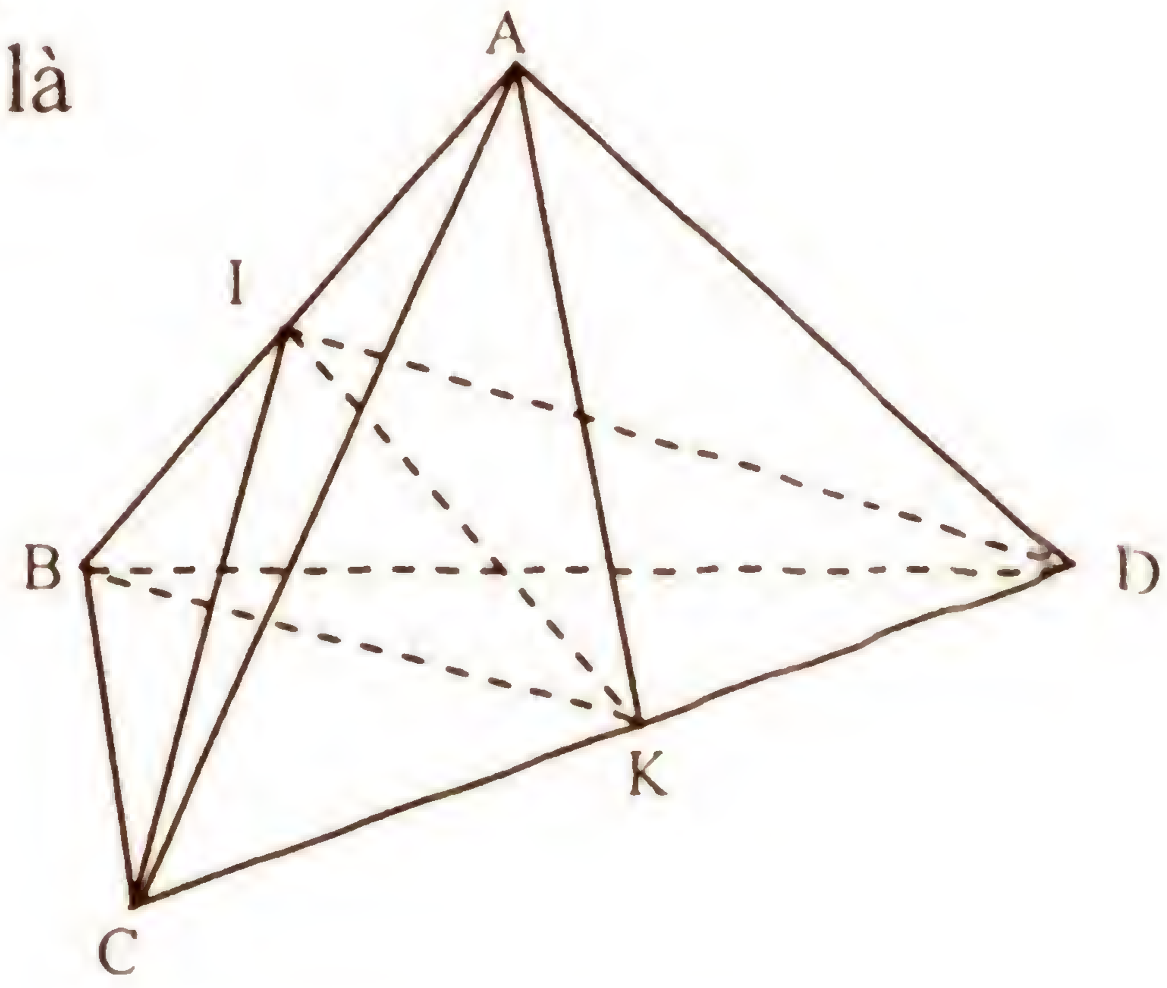
$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Vậy $IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

**Ví dụ 4**: Xác định và tính đoạn vuông góc chung giữa hai cạnh AB và CD của hình tứ diện ABCD biết rằng AC = BC = AD = BD = a và AB = p, CD = q.

**Giải**

Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tam giác cân ABC, ABD nên có $AB \perp IC, ID \Rightarrow AB \perp (ICD)$
$\Rightarrow IK \perp AB$. Tương tự $IK \perp CD$ nên IK là đoạn vuông góc chung của AB và CD.




Ta có $IK^2 = BK^2 - BI^2 = BK^2 - \dfrac{p^2}{4}$

và $BK^2 = BC^2 - CK^2 = a^2 - \dfrac{q^2}{4}$

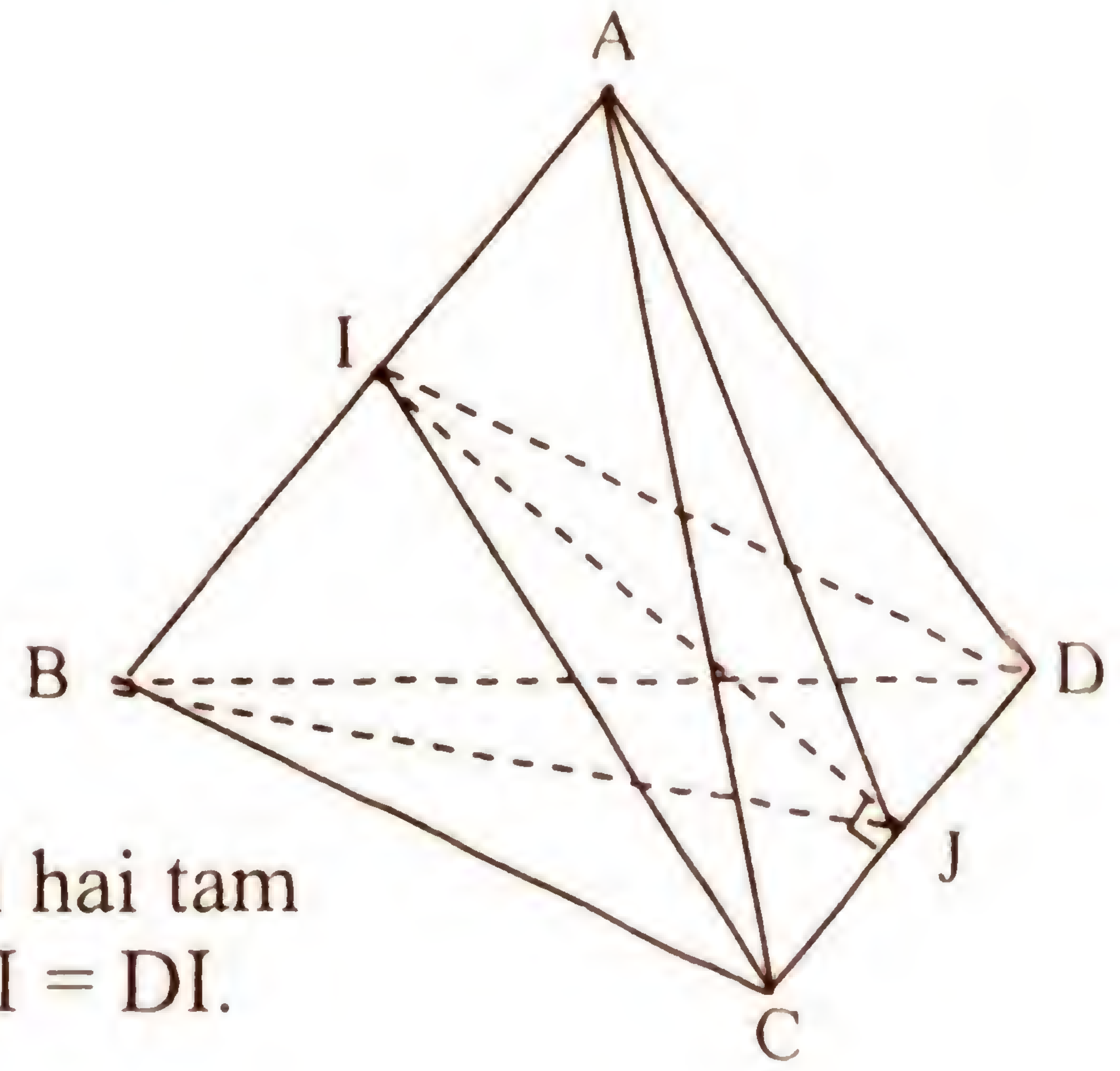
nên $IK^2 = a^2 - \dfrac{p^2 + q^2}{4}$

Vậy $IK = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (p^2 + q^2)}$, với điều kiện $4a^2 - (p^2 + q^2) > 0$

**Ví dụ 5:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.Giả sử AB = CD, AC = BD, AD = BC, chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Phần đảo có đúng không.

**Giải:**

Cho AB = CD, AC = BD, AD = BC.
Hai tam giác ABC và BAD bằng nhau (c.c.c) nên hai trung tuyến tương ứng là CI và DI bằng nhau, do đó tam giác ICD cân, nên $IJ \perp CD$.
Tương tự ta chứng minh được $IJ \perp AB$.
Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.




Đảo lại, nếu IJ vuông góc với AB, CD thì hai tam giác ABJ, CDI cân tại J, I nên AJ = BJ, CI = DI.
Áp dụng định lý trung tuyến:

$$\begin{cases} AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2 \\ CA^2 + CB^2 = DA^2 + DB^2 \end{cases} \Rightarrow 2AD^2 = 2BC^2 \Rightarrow AD = BC$$

Do đó: AC = BD, AB = CD

Cách khác: Chiếu lên mặt phẳng đi qua CD và song song với AB.

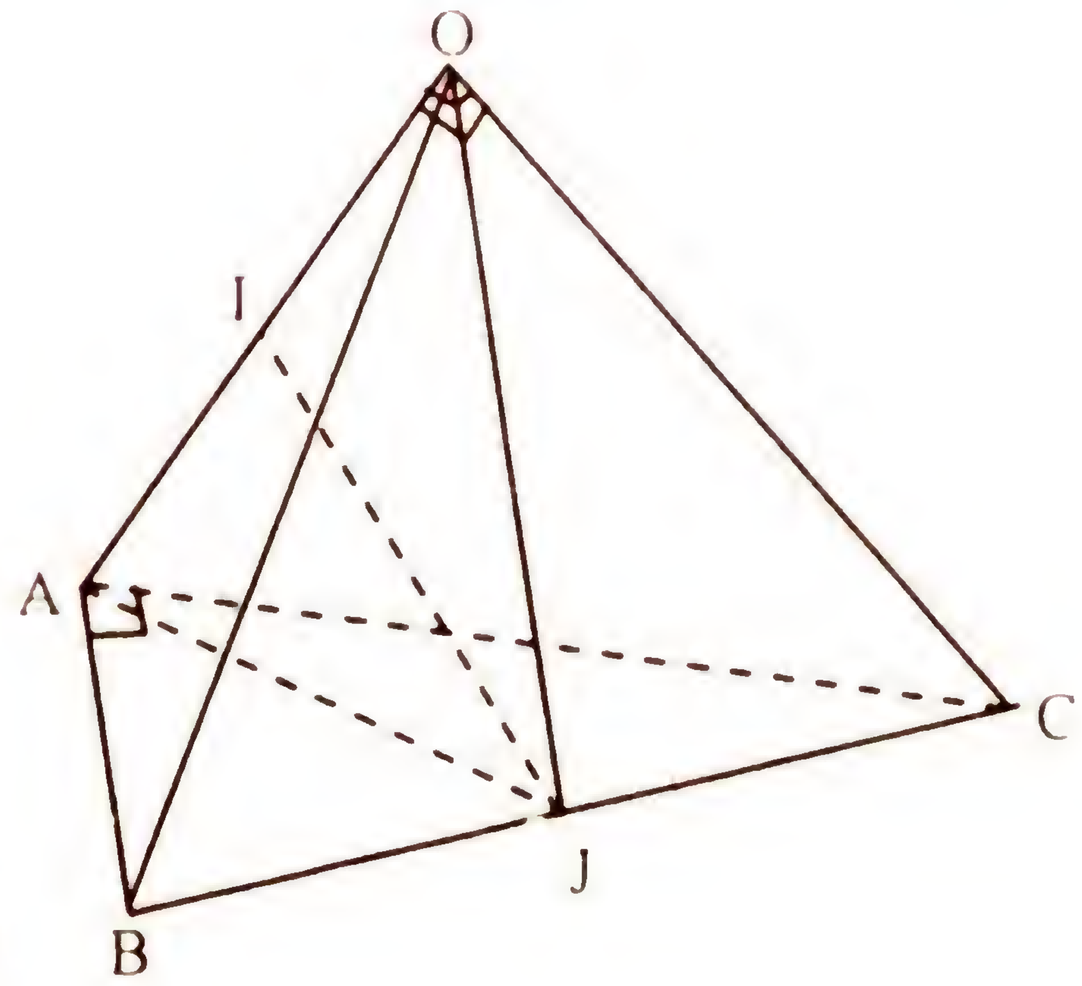
**Ví dụ 6**: Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$, $\widehat{BOC} = 90^o$.

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông và $OA \perp BC$.

b) Tìm đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

**Giải**




a) Vì $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^{\circ}$,

$OA = OB = OC = a$ nên $AB = AC = a$.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta OBC$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi J là trung điểm của BC thì

$OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$ nên $OA \perp BC$.

b) Gọi I là trung điểm của OA, vì OJ = AJ nên $JI \perp OA$, do đó IJ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

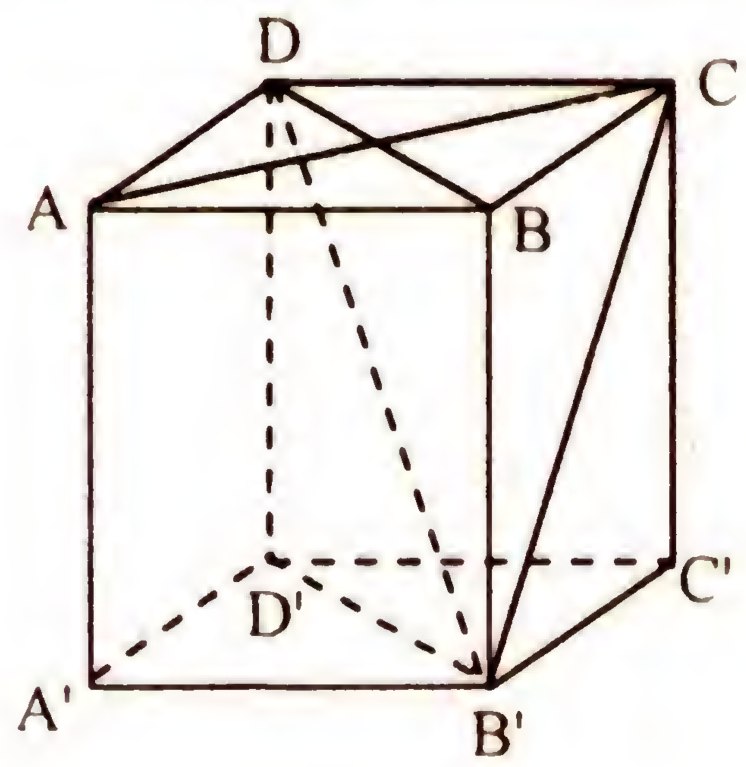
$$IJ^2 = OJ^2 - OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow JI = \frac{a}{2}.$$

c) Ta có $OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$, $IJ = \frac{1}{2}OA$ nên tam giác OAJ vuông tại J. Do đó góc giữa mp(OBC) và mp(ABC) là góc $\widehat{OJA} = 90^{\circ}$.

Vậy mp(OBC) $\perp$ mp(ABC).

**Ví dụ 7**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và CB', AA' và DB', AC và B'D'.

**Giải**




- Ta có $A'B' \perp AA'$, $A'B' \perp B'C'$

$\Rightarrow A'B' \perp CB'$

nên $d(AA', CB') = A'B' = a$.

- Ta có $AA' // BB' \Rightarrow AA' //$ mp(BB', DD')

nên $d(AA'; DB') = d(AA', (BB', DD')$

$= d(A; (BB', DD'))$

$= d(A; DB) = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

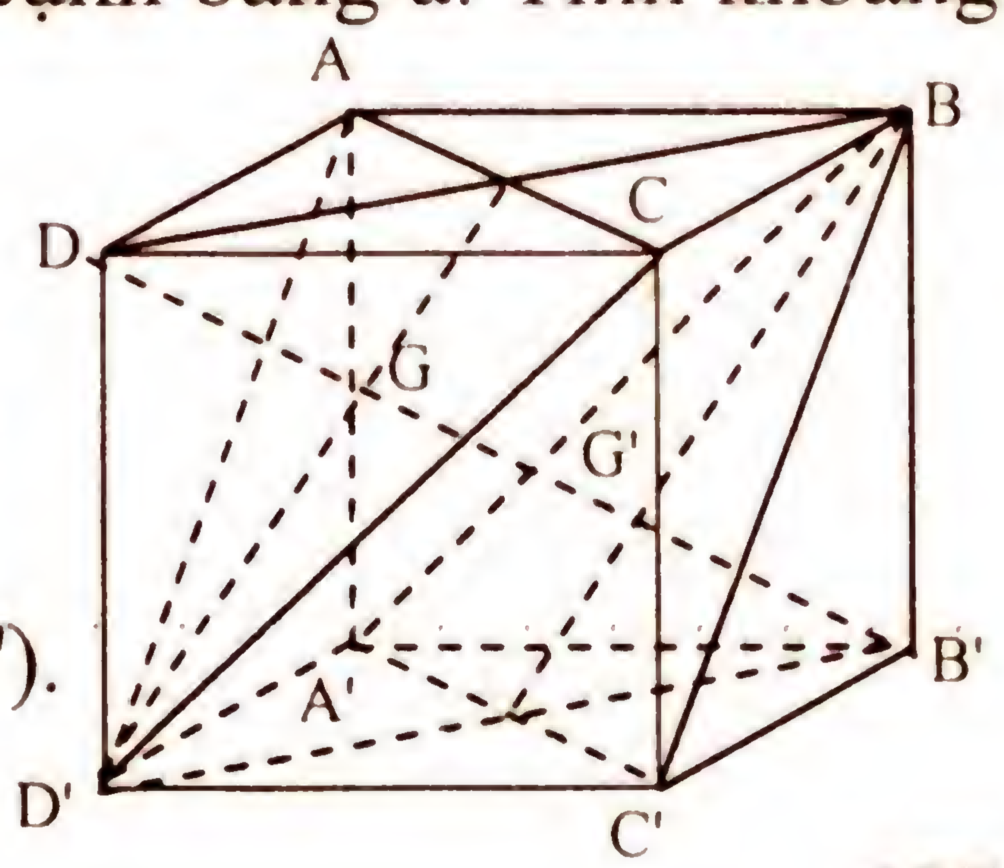
- Ta có AC thuộc mp(ABCD), B'D' thuộc mp(A'B'C'D')

Vì (ABCD) // (A'B'C'D') và có AA' vuông góc chung nên:

$d(AC; B'D') = d((ABCD); (A'B'C'D')) = AA' = a$.

**Ví dụ 8**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

**Giải**




Ta có CD' nằm trong mp(ACD') và BC' nằm trong mp(A'BC'). Vì D và B' cách đều các đỉnh của 2 tam giác đều ACD', A'BC' nên:

$DB' \perp (ACD')$, (A'BC') do đó (ACD') //(A'BC').

Ta có B'D cắt hai mặt phẳng (ACD') và (A'BC') lần lượt tại G G' thì DG = GG' = G'B'.

Vậy d(CD'; BC') = $\dfrac{DB'}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Nếu yêu cầu tìm đoạn vuông góc chung IJ của BC' và CD' thì ta tìm hình chiếu của trung điểm E của BC' lên mp(ACD') hoặc để ý DB' là đường vuông góc chung nên IJ và DB' đồng phẳng, do đó DI và B'J cắt nhau tại trung điểm của CC'.

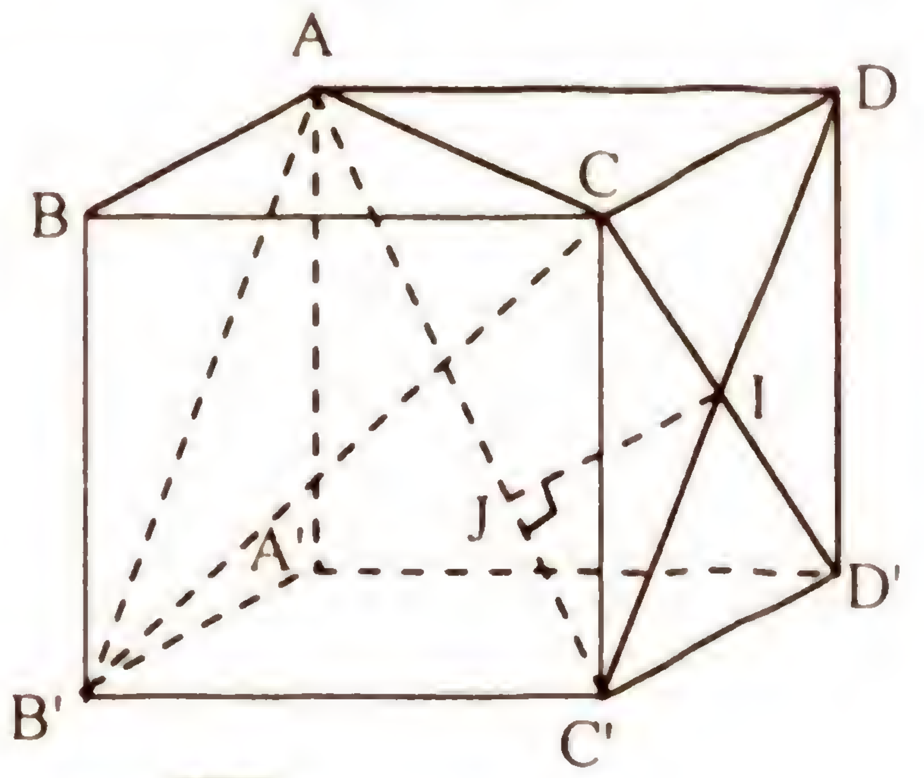
**Ví dụ 9:** Cho hình chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có 3 kích thước AB = AA' = a, AC' = 2a.

a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').

b) Tìm đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và CD'.

**Giải**

a) Xét tứ diện DACD' có DA, DC, DD' đôi một vuông góc nên khoảng cách DH từ D đến mặt phẳng (ACD') với H là trực tâm tam giác ACD, được tính bởi hệ thức:




$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}$$

Ta có: DC = a, DD' = a,

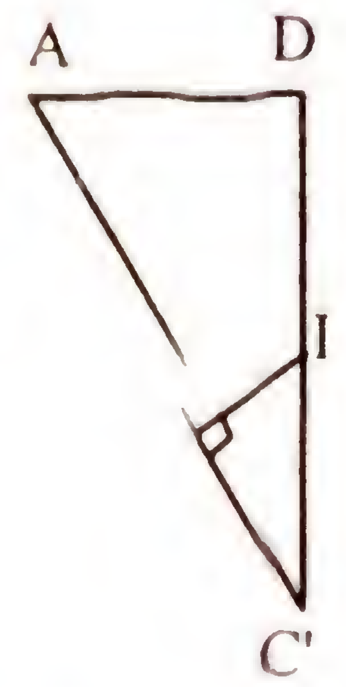
$AC'^2 = AC^2 + CC'^2$

$= DA^2 + DC^2 + CC'^2$

nên $4a^2 = DA^2 + a^2 + a^2 \Rightarrow DA^2 = 2a^2$.

Do đó $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

b) Vì CD = DD' = a nên $CD' \perp C'D$.




Mặt khác $AD \perp (CDD'C')$ nên $CD' \perp AD$ và $CD' \perp$ mp(AC'D).

Gọi giao điểm của CD' với mp(AC'D) là I. Hạ $IJ \perp AC'$ thì IJ là đoạn vuông góc chung của AC' và CD'.

Ta có $\dfrac{IJ}{AD} = \dfrac{IC'}{AC'} \Rightarrow IJ = AD.\dfrac{C'D}{2AC'} = a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2.2a} = \dfrac{a}{2}$.

**Ví dụ 10**: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O có cạnh AB = a. Đường cao SO là hình chóp vuông góc với mặt đáy (ABCD) và có SO = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng :

a) AC và SD    b) SC và AB.

**Giải**

a) Ta có $AC \perp BD$, $AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SOD)$.

Hạ $OE \perp SD$ thì d(AC; SD) = OE

Tam giác SOD vuông tại O

$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

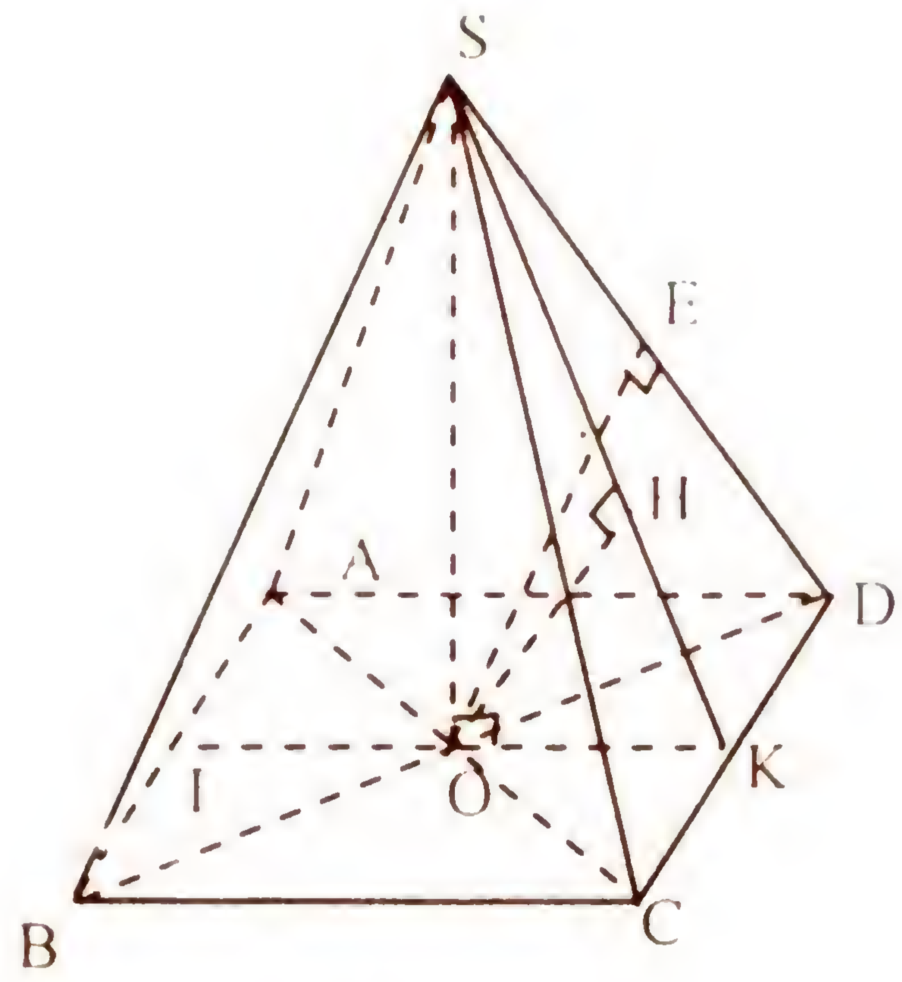
b. Vì AB // CD nên AB // (SCD).

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD thì ta có O là trung điểm của IK. Do đó:

$d(SC, AB) = d(AB, (SCD))$

$= d(I; (SCD))$

$= 2d(O; (SCD))$




Ta có CD ⊥ SO, OK nên CD ⊥ (SOK)

$\Rightarrow (SCD) \perp (SOK)$

Hạ OH ⊥ SK thì OH ⊥ (SCD) nên d(O; (SCD)) = OH

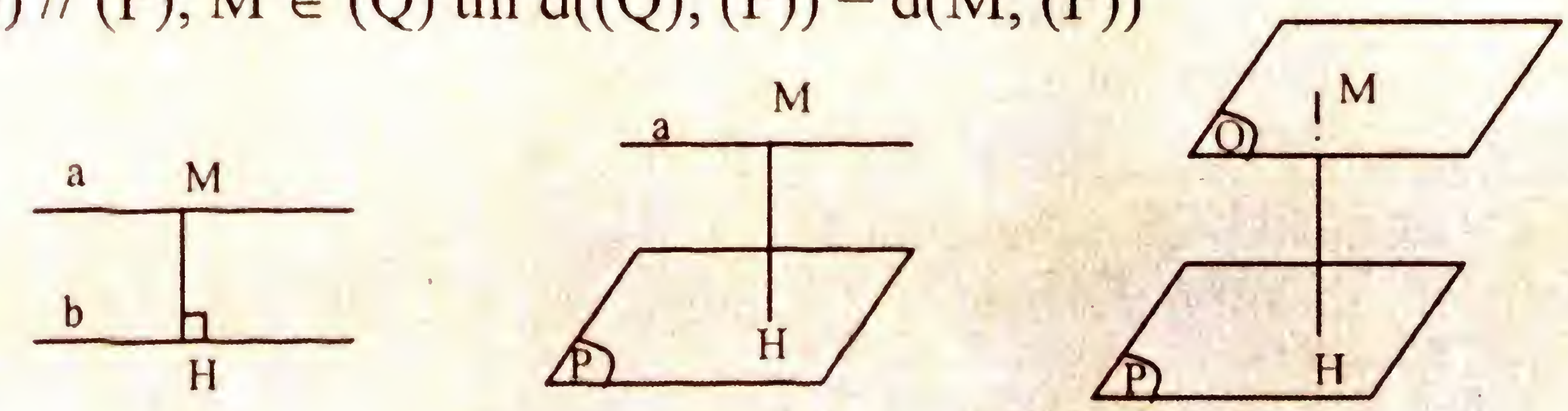
Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d(SC; AB) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

## DẠNG 3: TỔNG HỢP KHOẢNG CÁCH

• Khoảng cách giữa 2 yếu tố song song

- a // b, M ∈ a thì d(a; b) = d(M; b)
- a // (P), M ∈ a thì d(a; (P)) = d(M; (P))
- (Q) // (P), M ∈ (Q) thì d((Q); (P)) = d(M; (P))

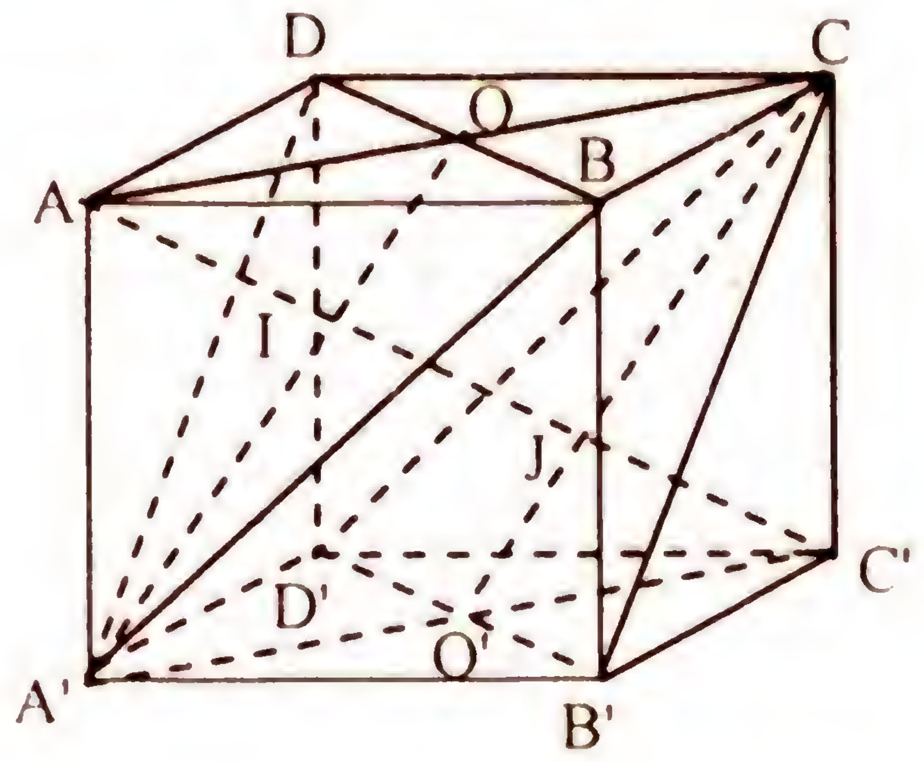



• Nói chung khoảng cách giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng đều đưa về khoảng cách giữa 2 điểm. Thông thường trước khi tính toán, ta phải xác định vị trí các yếu tố cần tìm và tính khoảng cách.

**Ví dụ 1**: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa

a) AA' và mặt phẳng song song (BB', DD')

b) 2 mặt phẳng song song (A'BD) và (CB'D').




**Giải**

a) Ta có AA'// (BB'; DD') nên

$d(AA'; (BB', DD')) = d(A; (BB', DD'))$

$= d(A; BD) = AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Ta có hình chiếu của AC' lên (ABCD) là AC $\perp$ BD nên AC' $\perp$ BD. hình chiếu của AC' lên (AA', BB') là AB' $\perp$ BA' nên AC' $\perp$ BA'.

Do đó AC' $\perp$ (A'BD), tương tự AC' $\perp$ (CB'D') nên (A'BD) // (CB'D'), hơn nữa O và O' là tâm của 2 đáy nên AC' cắt mặt phẳng (A'BD), (CB'D') tại I, J và AI = IJ = JC'.

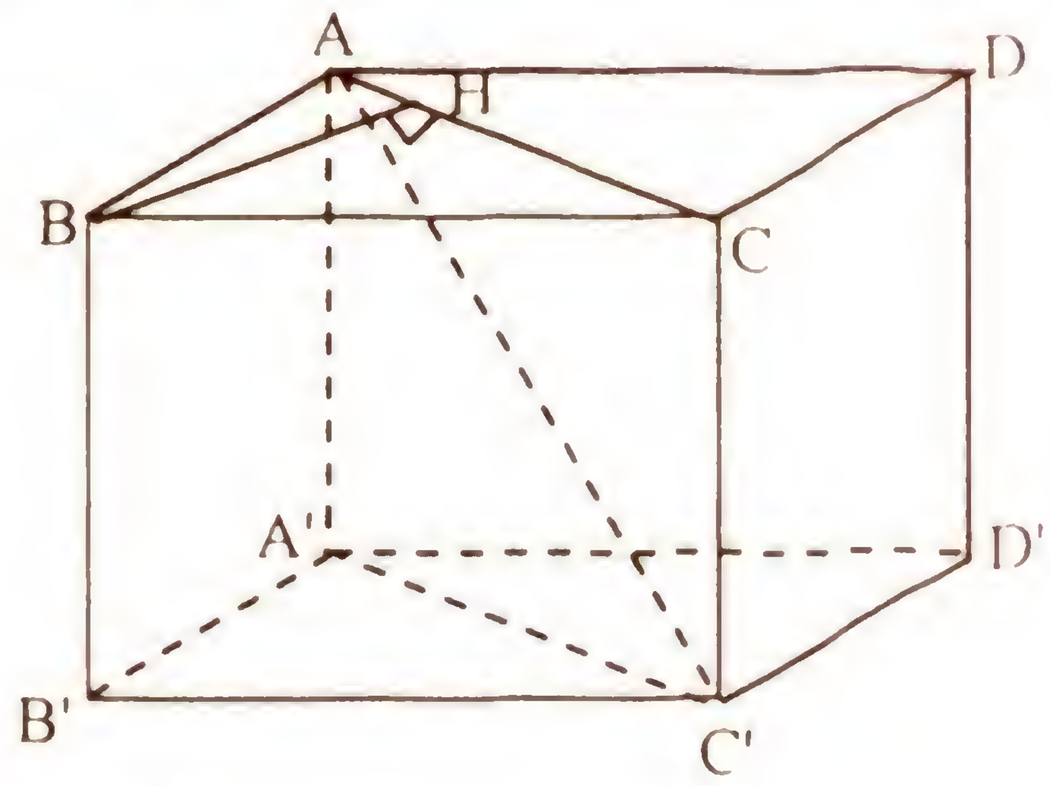
Vậy d((ABD), (CB'D')) = IJ = $\dfrac{AC'}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Ví dụ 2:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = b, AA' = c.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACC'A').

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

**Giải**




a) Hạ BH $\perp$ AC , vì BH $\perp$ AA' nên BH $\perp$ (ACC'A')

Vậy d(B; (ACC'A)) = BH.

Ta có: BH.AC = BA.BC

hay BH = $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

b) BB' và AC' chéo nhau mà BB' // (ACC'A') nên:

$$d(BB'; AC') = d(BB'; (ACC'A') = d(B; (ACC'A')) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Ví dụ 3**: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'.

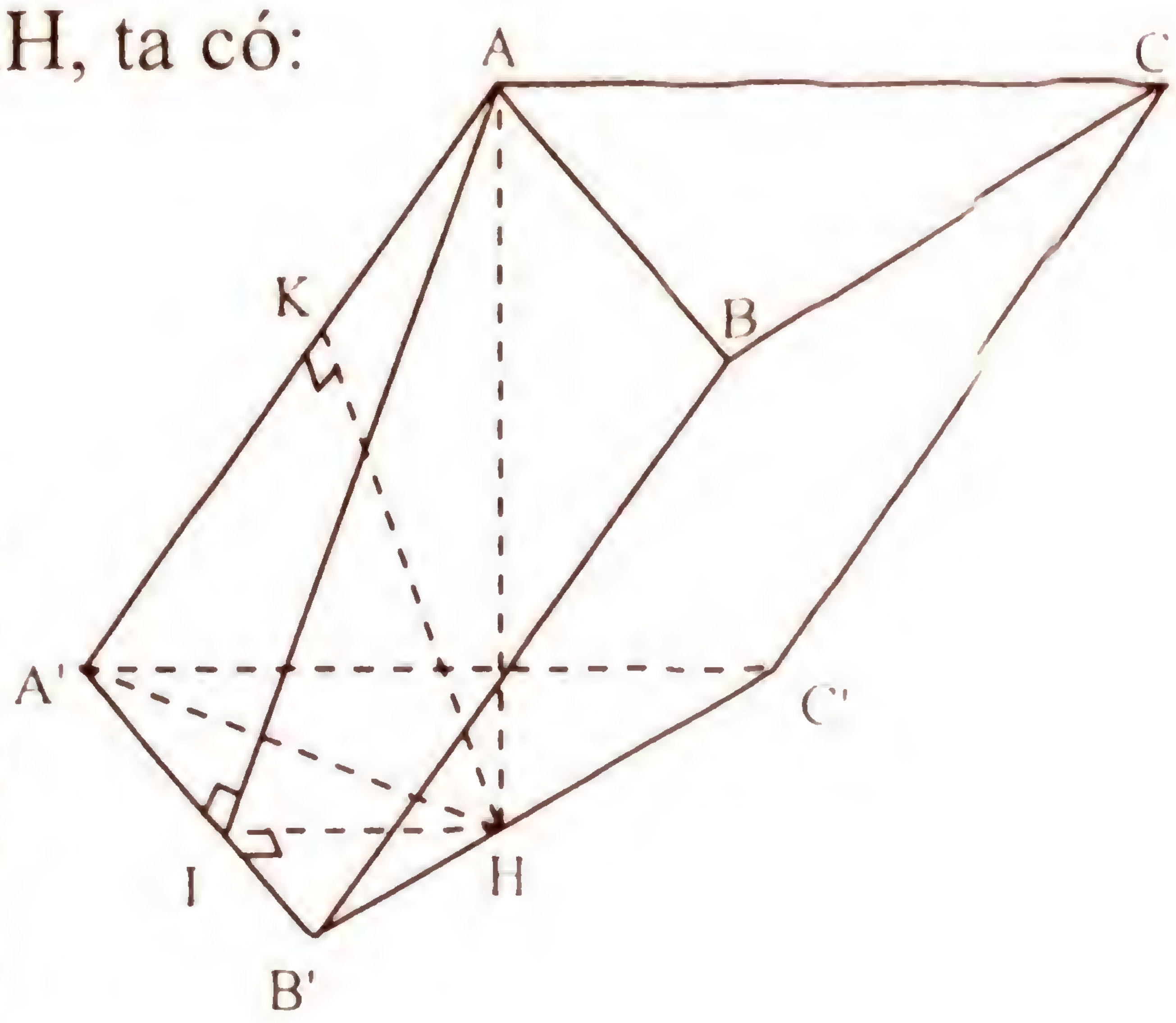
a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và B'C' vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

**Giải**

Do AH $\perp$ (A'B'C') nên $\widehat{AA'H}$ là góc giữa AA' và mp(A'B'C').

Theo giả thiết thì $\widehat{AA'H} = 30^o$.




a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là AH, ta có:

$$AH = AA'\sin 30^o = \frac{a}{2}.$$

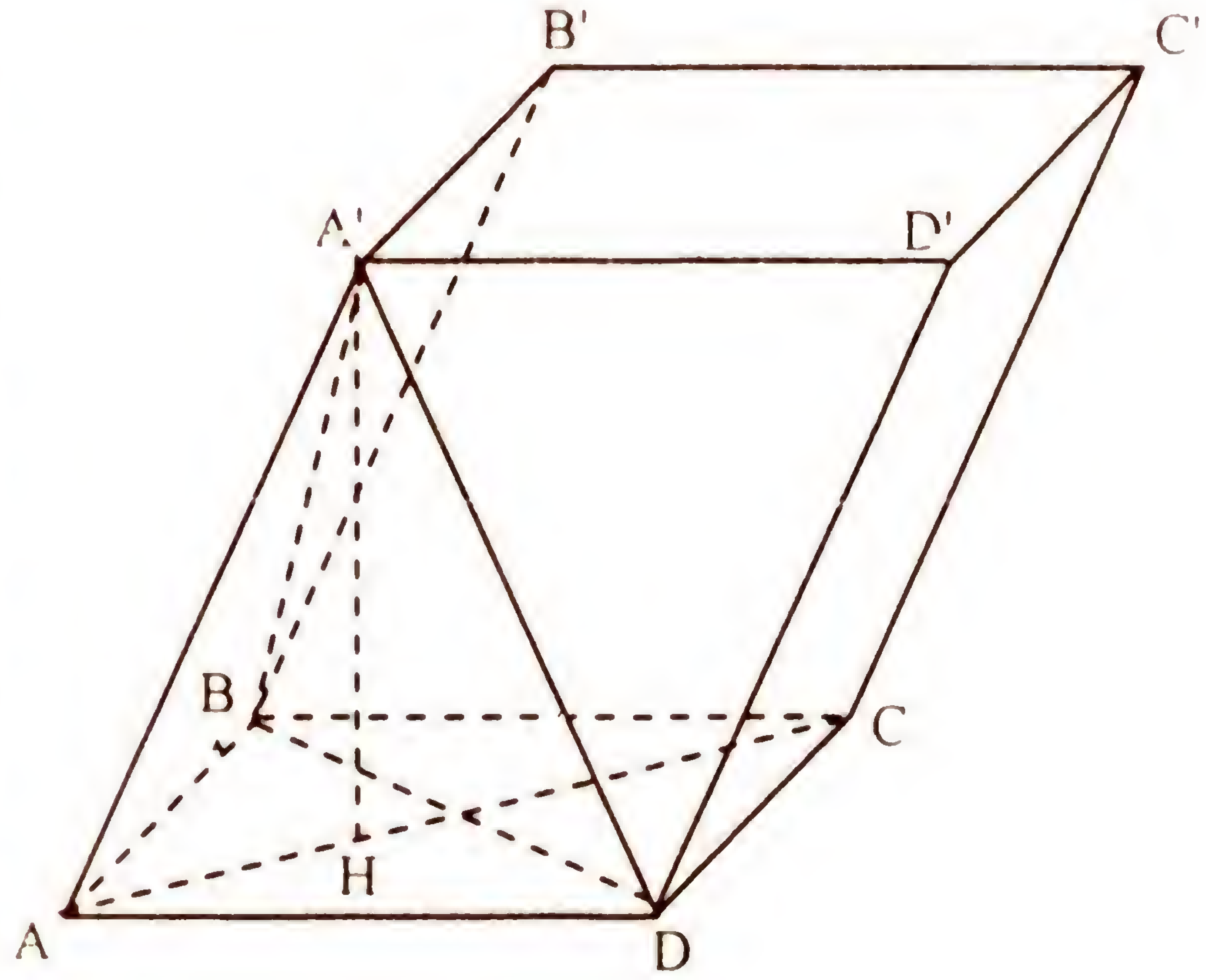
b) $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì A'B'C' là tam giác đều cạnh a, H thuộc đường thẳng B'C' nên A'H $\perp$ B'C' và H là trung điểm của B'C'. Mặt khác AH $\perp$ B'C' nên AA' $\perp$ B'C'. Hạ HK $\perp$ AA' thì HK chính là khoảng cách giữa AA' và B'C'.

Do $AA'.HK = AH.A'H$ nên: $HK = \dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

**Ví dụ 4**: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^{0}$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D').

**Giải**




Từ giả thiết suy ra các tam giác A'AD, BAD, A'AB là các tam giác cân cùng có góc ở đỉnh bằng $60^{0}$ nên chúng là các tam giác đều. Do đó tứ diện A'ABD là tứ diện đều cạnh a, hình chiếu của A' trên mp(ABCD) chính là tâm H của tam giác đều ABD. Khoảng cách giữa hai đáy là A'H. Ta có:

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

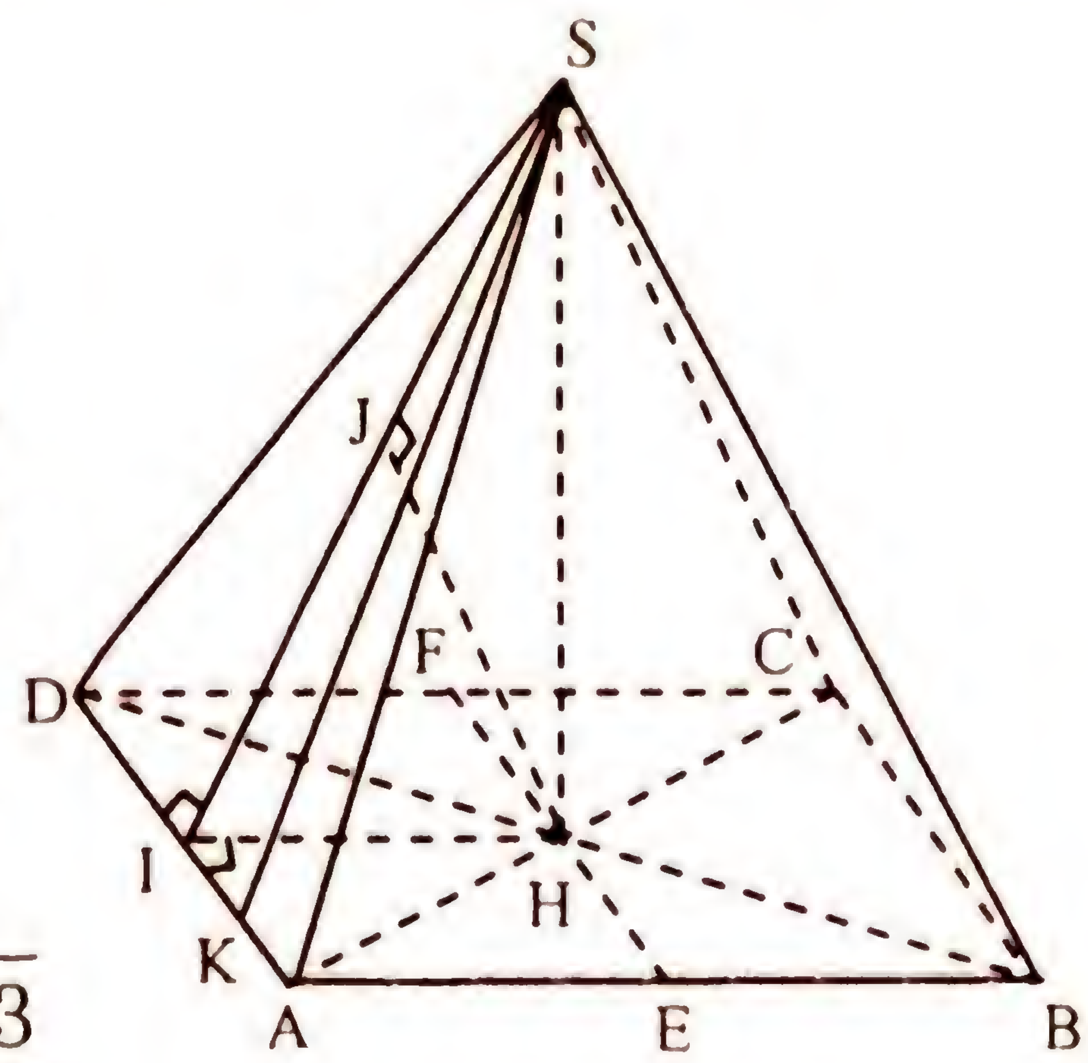
Vậy $A'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

**Ví dụ 5**: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD).

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K, hãy tính khoảng cách đó theo a.

**Giải**




a) Hạ SH ⊥ (ABCD)

Vì $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$ nên HA = HB = HC = HD. Do ABCD là hình chữ nhật nên H chính là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ S đến mp(ABCD) bằng SH.

Ta có: $SH^2 = SA^2 - \dfrac{AC^2}{4} = 2a^2 - \dfrac{AB^2 + BC^2}{4}$

$= 2a^2 - \dfrac{4a^2 + a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Vì EF // AD nên EF // mp(SAD), mặt khác SK nằm trong mp(SAD) nên khoảng cách giữa EF và SK chính là khoảng cách giữa EF và mp(SAD).

Vậy khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của điểm K trên đường thẳng AD.

Ta có d(EF; SK) = d(EF; (SAD)) = d(H; (SAD))

Gọi I là trung điểm của AD, hạ HJ $\perp$ SI thì HJ $\perp$ mp(SAD), do đó d(H; (SAD)) = HJ. Ta có:

$$HJ.SI = SH.HI \text{ và } SI^2 = SA^2 - AI^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

Vậy: $HJ = \dfrac{SH.HI}{SI} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

**Ví dụ 6:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a và có mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I, M, F lần lượt là trung điểm của AD, AB, SB và gọi K là giao điểm của BI và CM.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (CMF) vuông góc với mặt phẳng (SIB).

b) Tính BK và KF và suy ra tam giác BKF cân tại đỉnh K.

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

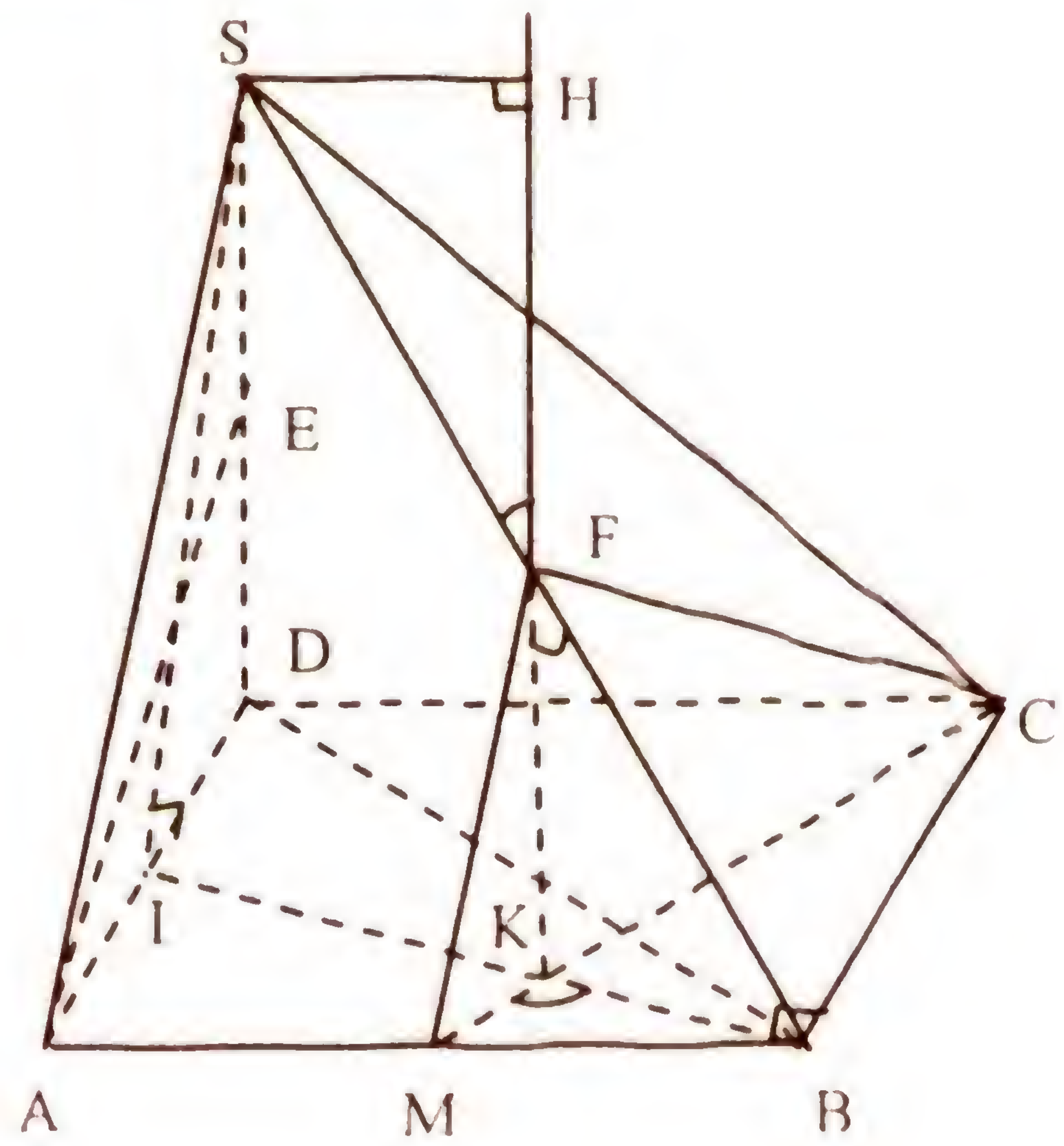
d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM.

**Giải**

a) $\Delta IAB = \Delta MBC$ (c.g.c) nên góc $\widehat{ABI} = \widehat{BCM}$ mà AB $\perp$ BC.

nên CM $\perp$ BI và có CM $\perp$ SI, do đó CM $\perp$ (SIB).

Vậy (CMF) $\perp$ (SIB)




b) Xét tam giác vuông BCM có

$$CM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ và } BK.CM = BM.BC$$

$$\Rightarrow BK = \frac{BM.BC}{CM} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Xét 2 tam giác vuông SIB, BKF:

$$SB^2 = SI^2 + IB^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = 2a^2.$$

nên $FK^2 = BF^2 + BK^2 - 2BF.BK.\cos B = \dfrac{a^2}{5}$

Do đó $FK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = BK$ (đpcm).

c) Vì CD $\perp$ (SAD) nên (SCD) $\perp$ (SDA)

Hạ AE $\perp$ SD thì E là trung điểm SD, đoạn vuông góc chung của SD và AB là $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

d) Vì SA // (CMF) nên d(SA; CM) = d(SA; (CMF))

Hạ SH $\perp$ FK thì SH $\perp$ (CMF). Do đó (SA, CM) = SH, ta có:

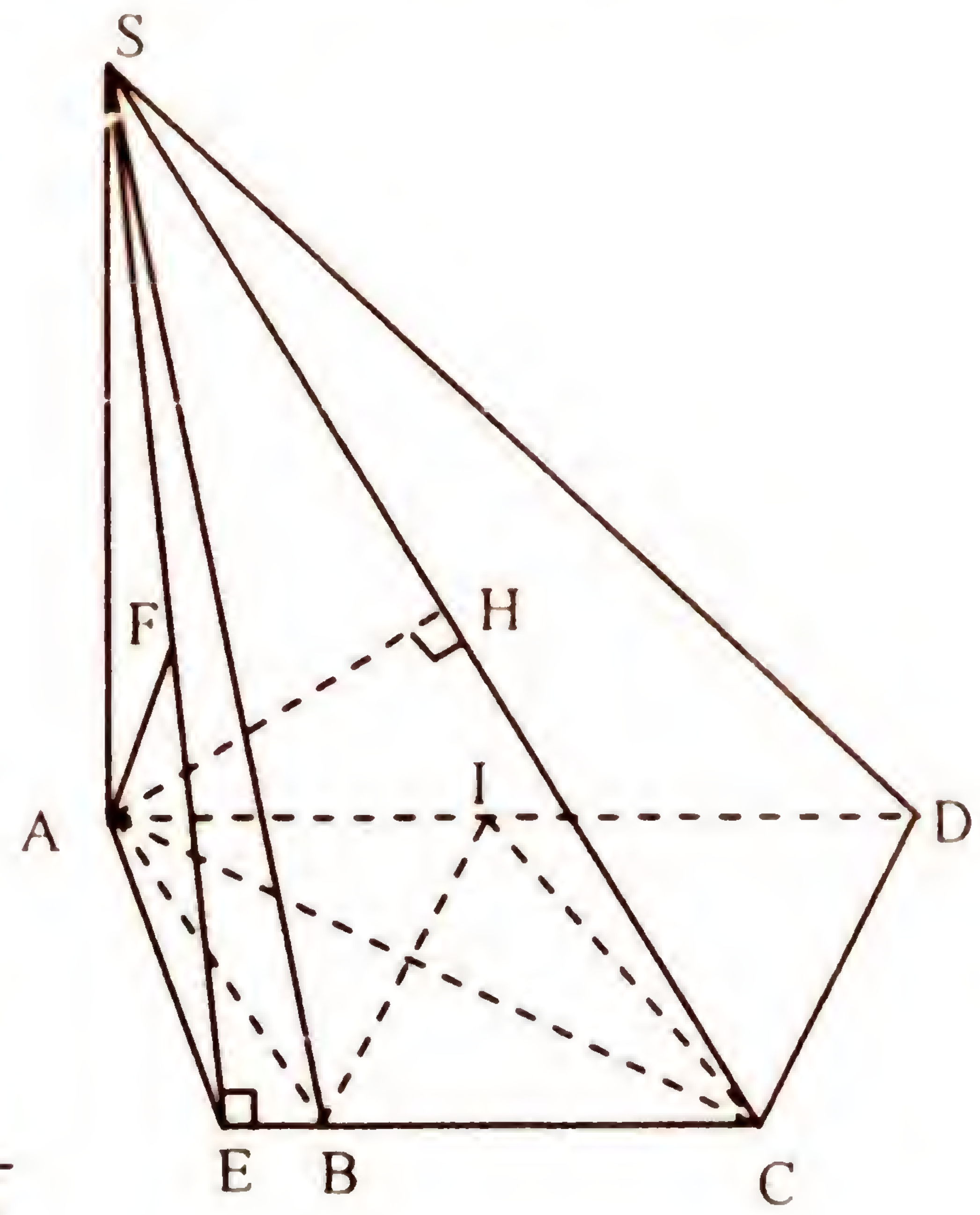
$SH = SF.\sin\widehat{SFH} = SF.\sin\widehat{KFB} = SF.\sin\widehat{SBI} = SF.\dfrac{SI}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

**Ví dụ 7** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng song song (SBC).

**Giải**




a) Vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a nên ta có:

AD // BC và AB = BC = CD = a, đồng thời

$AC \perp CD$, $AB \perp BD$, $AC = BD = a\sqrt{3}$.

Do đó $CD \perp (SAC)$

Hạ $AH \perp SC$ mà $AH \perp CD$ nên $AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

Tam giác SAC vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2}$$

$\Rightarrow AH^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có BI // CD nên BI song song với mặt phẳng (SCD).

Từ đó suy ra d(B; (SCD)) = d(I; (SCD))

$$= \frac{1}{2}\,d(A; (SCD)) = \frac{1}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b) Ta có AD // BC nên AD // (SBC).

Hạ $AE \perp BC \Rightarrow SE \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow (SAE) \perp (SBC)$.

Hạ $AF \perp SE$ thì $AF \perp (SBC)$. Ta có:

d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC)) = d(A; SE) = AF.

Xét tam giác vuông AEB, SAE: $AE = a\sin 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{9}{6a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

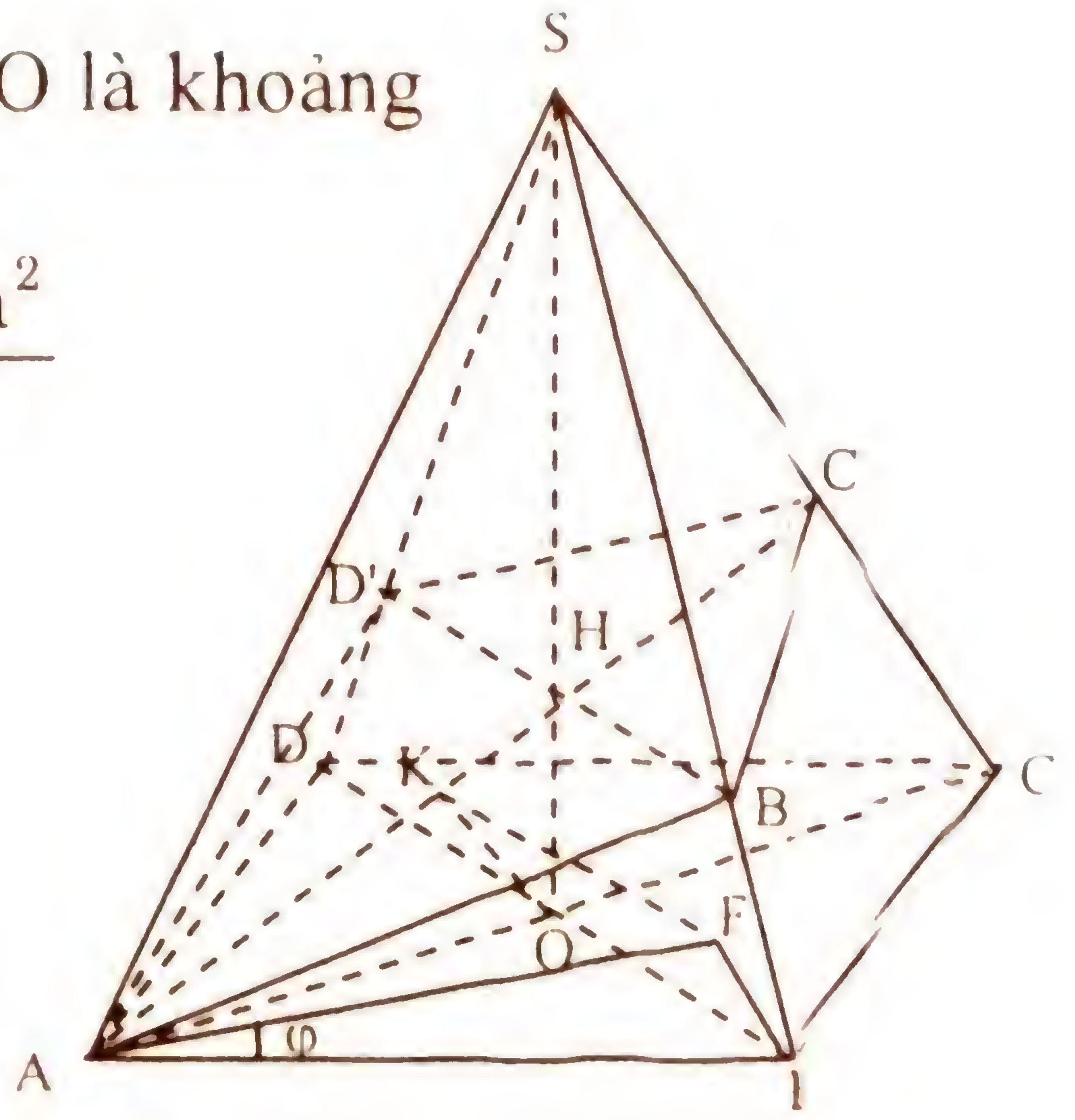
**Ví dụ 8:** Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

b) Xác định và tính thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua A, vuông góc với SC.

c) Gọi φ là góc giữa AB và (P). Tính sinφ.

**Giải**




a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD thì SO là khoảng cách từ S đến (ABCD)

Ta có: $SO^2 = SC^2 - OC^2 = 3a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$

Vậy $SO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

b) Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$.

Hạ $AC' \perp SC$, AC' cắt SO tại H và cắt SC tại C'. Trong (SBD), đường thẳng qua H và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.

Ta có: $B'D' \perp SC$ nên $SC \perp mp(AB'C'D')$ và thiết diện cần tìm là tứ giác AB'C'D'.

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow B'D' \perp AC'$ nên $S = \frac{1}{2}AC'.B'D'$.

Ta có: $AC' = \frac{SO.AC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{2}.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

$SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = 3a^2 - \frac{5a^2}{3} = \frac{4a^2}{3}$

$SH = \frac{SC'.SC}{SO} = \frac{4a}{\sqrt{10}}$. Vì B'D' // BD nên:

$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SH}{SO} = \frac{4a}{\sqrt{10}}.\frac{2}{a\sqrt{10}} = \frac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \frac{4}{5}a\sqrt{2}$

Vậy $S = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.\frac{4}{5}a\sqrt{2} = \frac{2a^2.\sqrt{30}}{15}$.

c) Hạ $OK \perp (P)$ thì K thuộc AC'

Hạ $BF \perp (P)$ thì $BF = OK = \frac{CC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

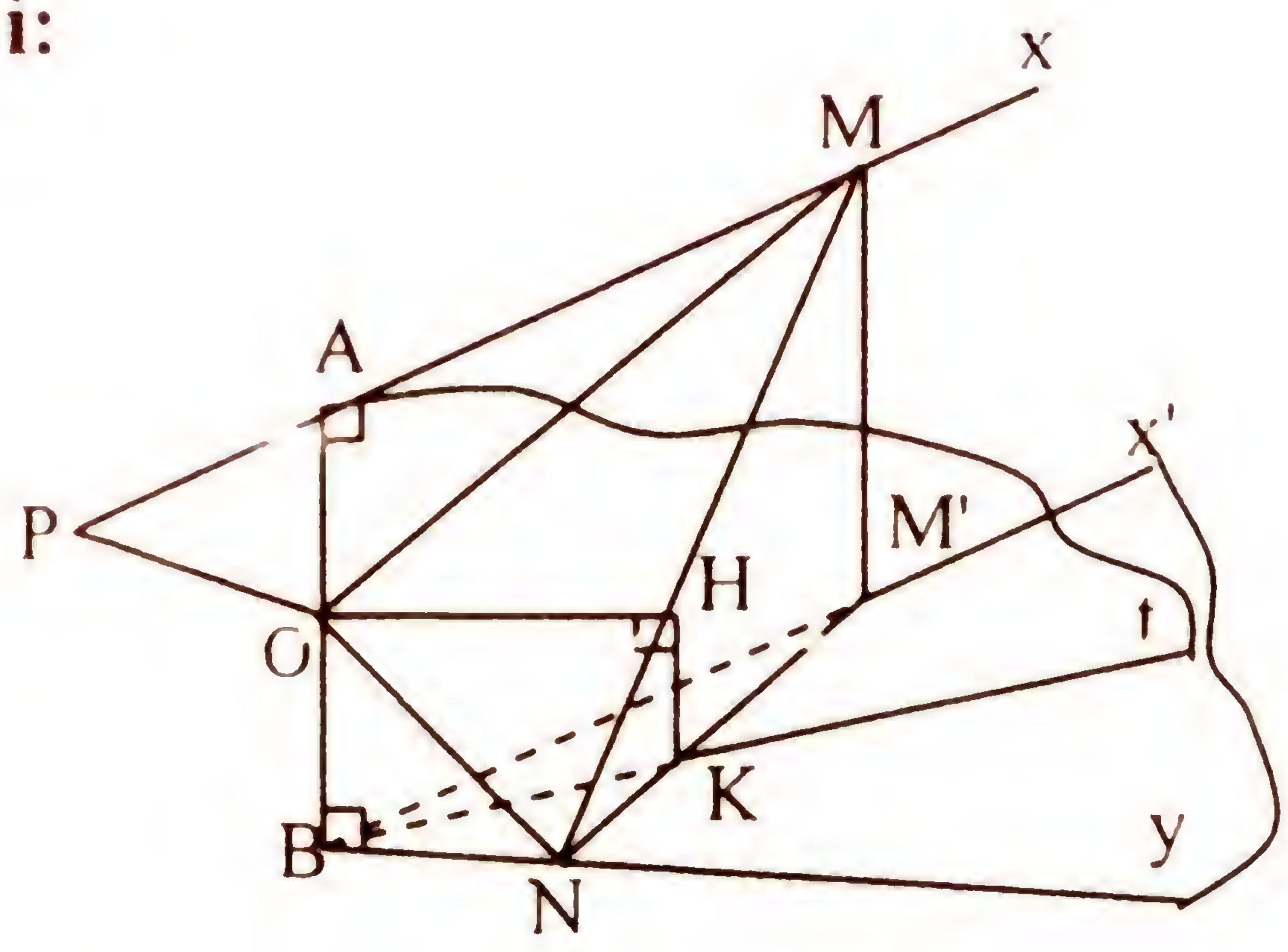
Ta có $\sin\varphi = \sin\widehat{BAF} = \frac{BF}{BA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

<u>**Ví dụ 9**</u>: Cho hai tia Ax và By vuông góc với nhau và nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên Ax và By sao cho AM + BN = MN. Đặt AB = 2a, gọi O là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O trên MN.

a) Chứng minh rằng OH = a, HM = AM, HN = BN.

b) Gọi B'x là tia song song và cùng chiều với Ax và K là hình chiếu của H trên (B'x, By). Chứng minh BK là phân giác của góc x'By và H ở trên một đường tròn cố định.

**Giải:**




a Kéo dài MA đoạn AP = BN

ta có MP = MN và OP = ON.

Do đó: $\Delta OMP = \Delta OMN$ (c.c.c)

$\Rightarrow OA = OH \Rightarrow OH = a$

$\Rightarrow HM = AM, HN = BN$

b Gọi M' là hình chiếu của M trên (Bx', By) thì HK // MM'.

Xét tam giác BNM:

$\dfrac{KM'}{KN} = \dfrac{HM}{HN} = \dfrac{BM'}{BN}$ nên BK là phân giác của góc $\widehat{x'By}$.

Gọi β là mặt phẳng (AB, Bt)

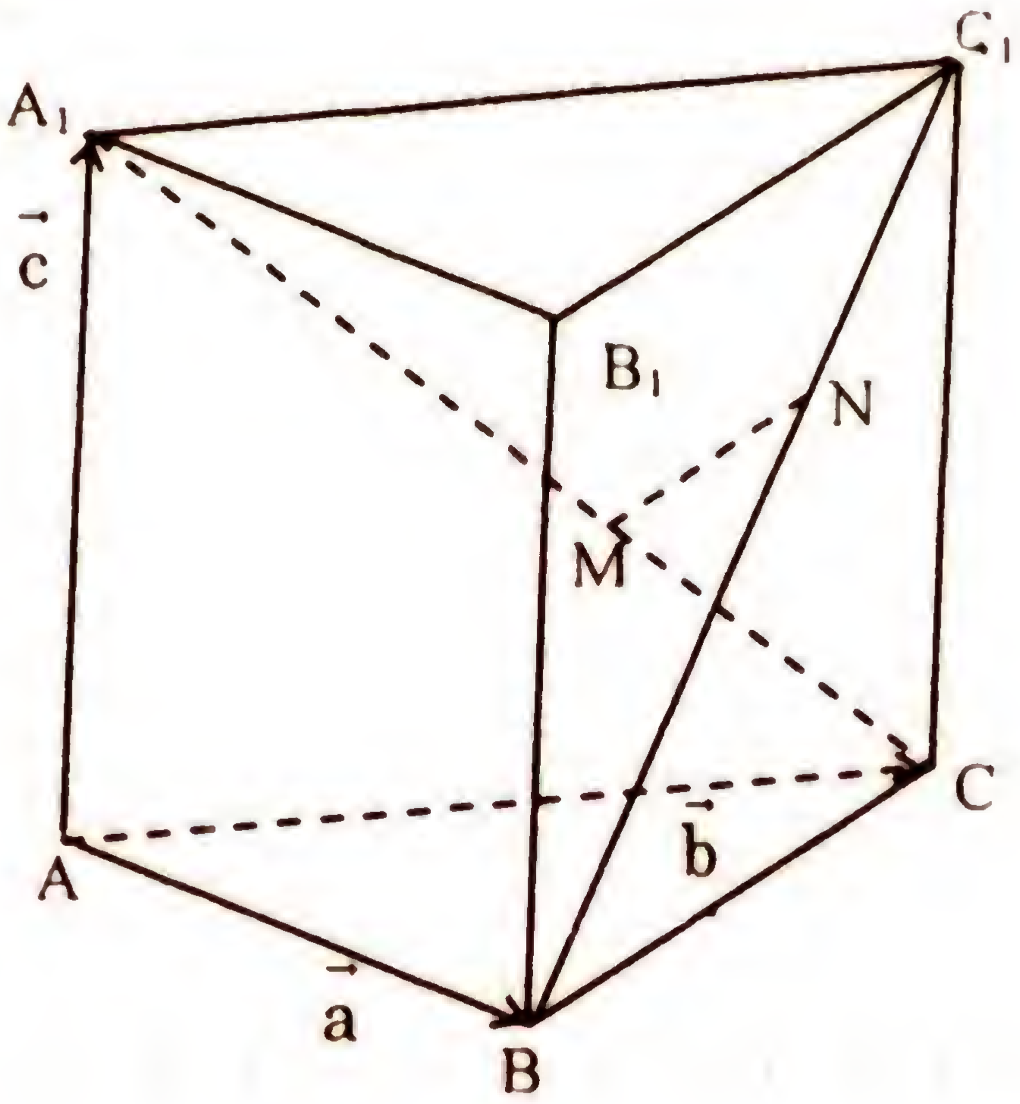
Vì HK // AB nên HK nằm trong β và do đó H thuộc β

Trong β, ta có OH = a. Vậy H ở trên đường tròn cố định đường kính AB và nằm trong mặt phẳng (AB, Bt) cố định.

**Ví dụ 10**: $ABC.A_1B_1C_1$ là một hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh dài bằng a. Xét các đoạn thẳng có hai đầu lần lượt nằm trên hai đường chéo $BC_1$ và $CA_1$ của hai mặt bên lăng trụ và song song với mặt phẳng $(ABB_1A_1)$. Tính chiều dài của đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn thẳng như thế.

**Giải**

Chọn hệ cơ sở: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$




Gọi N thuộc đoạn $BC_1$

Và M thuộc đoạn $CA_1$

Ta có $\overrightarrow{MA_1} = \alpha\overrightarrow{CA_1} = \alpha(\vec{c} - \vec{b})$

với $0 \le \alpha \le 1$.

$\overrightarrow{C_1N} = \beta\overrightarrow{C_1B} = \beta(-\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$

với $0 \le \beta \le 1$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1N}$

$= \alpha(\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} + \beta(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$

$= \beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c}$

Vì MN // mp$(ABB_1A_1)$ và $CC_1$ // mp$(ABB_1A_1)$ nên ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CC_1}$ là đồng phẳng. Do đó có cặp số (p, q) sao cho:

$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{CC_1} = p\vec{a} + q\vec{c}$

Do đó $\beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = p \\ 1 - \alpha - \beta = 0 \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \beta \\ \alpha = 1 - \beta \\ q = 1 - 2\beta \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \beta\vec{a} + 0.\vec{b} + (1 - 2\beta)\vec{c}$ nên:

$$MN^2 = \beta^2\vec{a}^2 + (1 - 2\beta)^2\vec{c}^2 + 2\beta(1 - 2\beta)\vec{a}.\vec{c}$$
$$= \beta^2a^2 + (1 - 2\beta)^2a^2 + 0$$
$$= (5\beta^2 - 4\beta + 1)a^2 = 5(\beta - \frac{2}{5})^2a^2 + \frac{1}{5}a^2 \geq \frac{1}{5}a^2$$

MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $MN^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \beta = \frac{2}{5}$.

Vậy $MN = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ là giá trị nhỏ nhất của các đoạn MN.

## C. BÀI LUYỆN TẬP

1. Cho mặt phẳng $\alpha$. Một đường thẳng AB cắt $\alpha$ tại điểm O sao cho O là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh A và B cách đều $\alpha$
2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.
   a) Tính khoảng cách từ A đến mp(A'B'C'D').
   b) Tính khoảng cách từ B đến đường thẳng A'C'.
   **ĐS:** a) AA' = a b) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$
3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB' và BC'.
   **HD:** đường chéo A'C vuông góc chung với AB' và BC'.
4. Hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J là trung điểm của AD và BC.
   a) Chứng minh mp(SIJ) vuông góc với mp(SBC)
   b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.
5. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và đáy $60^0$, hình chiếu của A lên (A'B'C') là trung điểm của B'C'.
   a) Tính khoảng cách 2 đáy
   b) Chứng minh AA' $\perp$ B'C'.
   c) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và B'C'.

**HD:** vẽ ngược hình, từ trung điểm H của B'C' dựng đường thẳng vuông góc với đáy, lấy điểm A.

6. Chứng minh với tứ diện gần đều thì 4 đường cao bằng nhau.

7. Cho tam giác ABC với AB = c, BC = a, CA = b. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại A, lấy điểm O sao cho AO = d. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.

**HD:** dùng công thức Hêrông để tính đường cao AH của tam giác ABC

7. Tứ diện ABCD có hai mặt (ABC) và (ADC) nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau, tam giác ABC vuông tại A, AB = a và AC = b, tam giác ADC vuông tại D, CD = a.

a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC đều vuông

b) Chứng minh đoạn nối trung điểm là đoạn vuông góc chung của AD, BC.

8. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có ABC là tam giác đều cạnh a, AA' vuông góc với mp(ABC) và AA'= $a\sqrt{2}/2$. Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của AB và A'B'.

a) Chứng minh AB vuông góc (COO')

b) Tính khoảng cách giữa AB và CB'; giữa A'B và B'C.

9. Cho mặt phẳng $\alpha$ và một điểm O ngoài $\alpha$. A là một điểm cố định thuộc $\alpha$ sao cho OA không vuông góc với $\alpha$, d là một đường thẳng lưu động trong $\alpha$ nhưng luôn luôn qua A. Gọi M là hình chiếu của O trên d.

a) Tìm tập hợp các điểm M thoả các tính chất trên

b) Tìm vị trí của d để độ dài OM là lớn nhất

10. Cho tam giác đều ABC cạnh a và một điểm S ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho SA = SB = SC = b

a) Tính khoảng cách từ S đến (ABC)

b) Tính cosin của góc hợp bởi đường thẳng SA và mp(ABC).

**HD:** hình chiếu của S lên đáy là tâm của tam giác ABC

11. Cho 3 tia không đồng phẳng Ox, Oy, Oz mà góc $\widehat{xOy} = 90^0$,

góc $\widehat{yOz} = \widehat{zOx} = 60^0$. Tính góc giữa 2 mặt phẳng (xOz) và (yOz).

**HD:** lấy A, B, C trên 3 tia Ox, Oy, Oz mà OA = OB = OC = 1

**12.** Tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với (ABC), AC = 3cm, BC = 5cm, AB =AD = 4cm.

a) Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD).

b) Tính góc giữa AB và mặt phẳng (BCD).

c) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (BCD).

**13.** Cho tứ diện OABC có OA = 5, OB = 6, OC = 7 đôi một vuông góc. Hạ OH vuông góc (ABC).

a) Tính OH

b) Tính cosin của góc giữa (OBC) và (ABC)

**HD:** H là trực tâm của tam giác ABC

**14.** Cho hình chóp S.ABCD có SA= x và các cạnh còn lại bằng a.

a) Chứng minh tam giác SAC là tam giác vuông

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (BCD).

c) Tính khoảng cách từ S đến đáy.

**HD:** a) tam giác có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng

**15.** Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, hạ AH vuông góc (BCD). Gọi I trung điểm AH.

a) Chứng minh tứ diện IBCD có 3 cạnh IB, IC, ID đôi một vuông góc.

b) Tính góc hợp bởi IB và mp(BCD).

c) Tính khoảng cách giữa BC và IA

**16.** Cắt hình lập phương cạnh a bởi mặt phẳng qua 1 đường chéo. Tìm diện tích thiết diện bé nhất

**HD:** nửa thiết diện là tam giác, chọn đường chéo đó làm cạnh đáy có độ dài không đổi.

**************************

# MỤC LỤC